Příklad. Vyšetřeme konvergenci řády

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}.$$

Máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

kde je $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Pak

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n!(n+1)}{(n+1)^n(n+1)} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Jelikož $\lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$, platí

$$\lim_{t\to+\infty} \left(1+\frac{a}{t}\right)^t = \lim_{t\to+\infty} \left(\left(1+\frac{a}{t}\right)^{\frac{t}{a}}\right)^a = e^a$$

a proto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} = e^{-1}.$$

Pak pro poloměr konvergence platí $1/R = e^{-1}$, $R = e$.

Vyšetřování konvergence řady v koncových bodech je netriviálním úkolem. Pro $x = e$ v (1) obdržíme řadu

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$$

a dosazením $x = -e$ obdržíme

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!e^n}{n^n}.$$

1. ZPŮSOB

V literatuře najdeme tzv. Stirlingův vzorec:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{e}{n}\right)^n} = 1,$$

to jest $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{e}{n}\right)^n$ pro $n \to \infty$. Potom

$$\frac{n!e^n}{n^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^n}{n^n} = \sqrt{2\pi n} \to \infty$$

a tudíž $\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n} \neq 0$. Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$ neplatí nutná podmínka konvergence, proto řada (2) (a tudíž i (3)) nekonverguje.

2. ZPŮSOB

Nechť $b_n = \frac{n!e^n}{n^n}$. Pak

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!e^n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1,$$

jelikož pro všechna n platí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e. \tag{4}$$

Nerovnost $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 1$ pro všechna n znamená, že $\{b_n : n \geq 1\}$ je rostoucí posloupnost kladných čísel a proto $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Řady (2) a (3) pak nemohou konvergovat z důvodu porušení nutné podmínky konvergence.

Nerovnost (4) je součástí důkazu toho, že $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Vskutku, nechť

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

potom

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1} \\
&= \left(\frac{n(n+1)+n}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+1)+n-(n+1)}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1} \\
&= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Podle Bernoulliho nerovnosti

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$$

pak obdržíme

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \\
&\geq \left(1-n\frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1+\frac{1}{n+1}-\frac{n}{(n+1)^2}-\frac{n}{(n+1)^3} \\
&= 1+\frac{(n+1)^2-n(n+1)-n}{(n+1)^3} = 1+\frac{(n+1)(n+1-n)-n}{(n+1)^3} \\
&= 1+\frac{(n+1)^2-n(n+1)-n}{(n+1)^3} = 1+\frac{1}{(n+1)^3} > 1,
\end{aligned}$$

to jest $x_{n+1} > x_n$ pro každé n. Jelikož $\{x_n : n \geq 1\}$ je rostoucí a $x_1 = 2 > 0$, limita $\lim_{n\to\infty} x_n = e$ musí být vetší než x_n, což dokazuje (4).