Matematická analýza 2
2024/2025 Z

2024-09-26 13:41:09

Předmluva

Obsahem textu jsou poznámky pro přednášky pro kurz Matematická analýza 2 2024/2025 Z. Hlavní probíraná témata jsou okruhy pro závěrečnou zkoušku.

Pořadí kapitol přibližně odpovídá harmonogramu výuky. Číslování všech objektů je pro pohodlnější vyhledávaní průběžné (např. poznámka, následující po větě 3.11, bude mít číslo 3.12).

Řada úvah, vysvětlení (a občas i důkazů), jež výklad doplňují a občas jsou nad rámec kurzu, se uvádí zejména pro lepši pochopení látky a jsou vysázeny drobnějším písmem.

Text je koncipován, v rámci možnosti, pro maximální stručnost a zaměřen k výkladu základů učiva bez nutnosti se obracet k jiným zdrojům. Nenajdete proto zde hlubší výklad Riemannova integrálu ani historické vědomosti (což lze nalézt v literatuře). Dle obsahu daného kurzu se konstrukce integrálu vysvětluje velmi zjednodušenou formou. Také integrál neurčitý se rozebírá před integrálem určitým, i když přirozenějším je pořadí opačné.

Toto je pracovní verze textu, předběžná a nekompletní. Soubor je průběžně upravován.

Poznámky a připomínky: `ronto@ped.muni.cz`

2024-09-26 13:41:09

Obsah

§ 2

Integrál neurčitý

§ 2.1. Primitivní funkce a integrál neurčitý

Mějme funkci f definovanou a spojitou na nějakém intervalu (a, b). Pojmy primitivní funkce a integrálu neurčitého slouží pro zodpovězení otázky: *derivací čeho je výraz $f(x)$?*

DEFINICE 2.1. *Primitivní funkce* k funkci f na intervalu (a, b) je taková funkce F, že pro každé x z (a, b) platí $F'(x) = f(x)$.

Např. funkce $F(x) = \frac{5}{3}x^3$ je primitivní funkcí k $f(x) = 5x^2$, neboť $F'(x) = \frac{5}{3} \cdot 3x^2 = 5x^2 = f(x)$. Navíc všechny primitivní funkce pro $f(x) = 5x^2$ mají tvar $F(x) = \frac{5}{3}x^3 + C$, kde C je libovolná konstanta (toto platí i obecně).

DEFINICE 2.2. Výraz

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad x \in (a, b), \tag{2.1}$$

kde F je funkce primitivní k f a C je libovolná konstanta, se nazývá *integrálem neurčitým* funkce f.

Poznámka 2.3. Jinak se dá říci, že integrálem neurčitým dané funkce je jakákoliv její primitivní funkce, anebo souhrn všech primitivních funkcí. Integrál neurčitý se tedy definuje jednoznačné až na „aditivní konstantu". Pojmy primitivní funkce a integrálu neurčitého jsou vesměs shodné.

Symbol $\int$ je označován jako integrační znak, funkce f se nazývá *integrandem* a formální symbol „$\mathrm{d}x$" slouží k označení proměnné, podle níž daný výraz integrujeme. Zápis čteme takto: „integrál z $f(x)$ podle x".

Neurčitý integrál (2.1) zodpovídá otázku: *jak vypadají všecky možné výrazy, které po zderivování vzhledem k proměnné x se promění na $f(x)$?* Platí tedy, že

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x), \quad \left(\int F'(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(x) + C, \tag{2.2}$$

kde C je libovolná konstanta. Operace derivování a nalezení integrálu neurčitého jsou v tomto smyslu navzájem inverzní. Konstanta C se nazývá *integrační konstantou.*

VĚTA 2.4 (o existenci primitivní funkce). Ke každé funkci spojité na intervalu (a, b) existuje na tomto intervalu funkce primitivní a tudíž má funkce integrál neurčitý.

Poznámka 2.5 (o užití diferenciálu). Zápisu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ místo logičtějšího $\int f$ se užívá zejména z důvodů historických (jasnější to je v případě integrálu určitého, kde vystupují určité součty přírůstků funkce, vynásobené přírůstkem argumentu; § 3.2).

Toto označení však má svůj smysl a poskytuje určitou výhodu. Nehledě na to, že „dx“ v zápisu integrálu je pouze formální symbol, jenž značí proměnnou, podle níž se integruje, v praxi je pohodlné (a z hlediska výpočtů také vhodné) tlumočit výraz „$f(x)\,\mathrm{d}x$“ jako „$f(x)\cdot\mathrm{d}x$“ („$f(x)$ krát dx“). Píšeme tedy např. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Všude dále v této kapitole platí

Úmluva 2.6 (o vynechání integrační konstanty). Jelikož integrační konstanta k výsledkům integrace vždy automaticky patří, bez újmy na přesnosti ji občas budeme pro zkrácení zápisu vynechávat.

§ 2.2. Vlastnosti integrálu neurčitého

Základními vlastnostmi integrálu neurčitého jsou relace (2.2). Vzhledem k § 3.1 a vlastnostem derivace platí vlastnost *linearity* integrálu: pro libovolné spojité funkce f_1, f_2 a konstanty λ_1, λ_2 je

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\,\mathrm{d}x = \lambda_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mimo jiné, konstantu lze vždy vytknout před znak integrálu a integrál součtu (rozdílu) dvou výrazů je součtem (rozdílem) příslušných integrálů.

Poznámka 2.7 (důležité varování). Neexistují smysluplné vzorce, které by vyjadřovaly $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ nebo $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$ přes $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int g(x)\,\mathrm{d}x$!

§ 2.3. Výpočet integrálu neurčitého

„Výpočtem“ integrálu neurčitého se rozumí jeho vyjádření s využitím konečně mnoha elementárních funkcí pomocí algebraických operací a operace složení. Např. $\int (x^2+5e^{3x})\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+\frac{5}{3}e^{3x}+C$ (výsledkem je lineární kombinace funkcí mocninné a exponenciální); $\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$ (složení funkcí exponenciální a kvadratické), kde C je libovolná konstanta.[5]

Derivace konkrétních funkcí vždy vypočítáme podle známých pravidel derivování, to jest výsledek je svým způsobem garantován a k jeho dosažení stačí jen znát základní vlastnosti derivace a tabulku derivací elementárních funkcí. V případě integrace je situace odlišná: může se totiž stát, že neurčitý integrál nějaké funkce zásadně „nelze vypočítat“. Toto znamená, že existují elementární funkce, jejichž primitivní funkce již mezi elementární funkce nepatří. Je tomu tak např. pro $f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = \sin(x^2)$ apod.; jsou to funkce, pro něž nelze integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ žádným způsobem vyjádřit přes funkce elementární (to jest mocninné, exponenciální, trigonometrické, polynomiální, racionální lomené).[6]

Poznámka 2.8. Na rozdíl od derivací, pro integrál platí, že:

---

[5]Kontrola zderivováním: $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5}{3}e^{3x}+C\right)' = \frac{1}{3}3x^2+\frac{5}{3}e^{3x}3 = x^2+5e^{3x}$; $\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$.

[6]Skutečnost, že se nějaký integrál nevyjadřuje ve funkcích elementárních, nikterak nesvědčí o jeho podřadném významu nebo nepoužitelnosti. Například, funkce $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ je důležitá v teorii pravděpodobnosti (tzv. chybová funkce), funkce $C_q(x) = \int_0^x \cos\left(qx^2\right)\mathrm{d}x$ a $S_q(x) = \int_0^x \sin\left(qx^2\right)\mathrm{d}x$ jsou tzv. integrály Fresnelovy, jichž se užívá ve fyzice apod.

(1) ne každý integrál neurčitý „lze vypočítat“;
(2) i pokud daný integrál neurčitý vypočítat lze, je potřeba nalézt způsob jak to udělat. *Obecně platná metoda pro výpočet libovolných integrálu neexistuje.*

Pro integrál, jež explicitně vypočítat lze, můžeme očekávat následující případy:

(1) vzorec pro integrál je znám bezprostředně z tabulek;
(2) po vhodné úpravě lze obdržet integrál, shodný s některým z tabulkových nebo jemu podobný;
(3) na integrál lze (bezprostředně nebo po úpravě) aplikovat jednu z integračních metod (integrace s pomocí nové proměnné nebo po částech; §§ 2.3.2, 2.3.3).

§ 2.3.1. Tabulky základních integrálů

Přečtením tabulky známých derivací elementárních funkcí v opačném směru přirozeně vzniká užitečná tabulka základních integrálů (viz tabulka 2.1).[7]

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \tag{2.4}$$

$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x \qquad \int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a \neq 1) \tag{2.5}$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x \qquad \int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x \tag{2.6}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \tag{2.7}$$

TABULKA 2.1. Integrály některých elementárních funkcí.

Vskutku, máme $(x^m)' = mx^{m-1}$ a pak pro $m \neq 0$ platí $x^{m-1} = \frac{(x^m)'}{m} = \left(\frac{x^m}{m}\right)'$, to jest $F(x) = \frac{x^m}{m}$ je primitivní funkcí k $f(x) = x^{m-1}$. Dále platí $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ atd. Podobným způsobem se odvodí integrály řády dalších známých funkcí.

Jiné často využívané vzorce pro integrály nalezneme v tabulce 2.2; jejích odvození však je složitější.

Tyto „tabulkové“ integrály v uvedené podobě zpravidla nepotkáme a u konkretních integrálů je potřeba vymyslet vhodné úpravy.

[7] Pro lepší přehlednost v této tabulce vynecháváme libovolnou aditivní konstantu, která tam, samozřejmě, vždycky patří.

Druhý vzorec v (2.4) chápeme jako přehlednou, avšak neúplné přesnou podobu vzorce (2.3), vyjadřujícího integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$. I když tento vzorec v takovéto zkrácené podobě zcela běžně potkáváme, jeho matematicky precizním zněním je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \begin{cases} \ln(-x) + C_1 & \text{pro } x < 0, \\ \ln x + C_2 & \text{pro } x > 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Integrační konstanty zde tedy mohou být *různé* na levé a pravé poloose. Důvodem je fakt, že $\ln|x|$ není v bodě $x = 0$ definován a tak se definiční obor této funkce dělí na dvě části, na nichž se výraz $\frac{1}{x}$ integruje zvlášť.

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{A} + C \tag{2.8}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm B}\right| + C \tag{2.9}$$

$$\int \frac{1}{A^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + C \tag{2.10}$$

$$\int \frac{1}{A^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + C \tag{2.11}$$

TABULKA 2.2. Další často využívané integrály.

PŘÍKLAD 2.9. Integrál $\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ v tabulkách bezprostředně nenalezneme. Vypočítáme ho však velice snadno pomocí vzorce pro cosinus dvojitého uhlu, jenž nám umožní mocninu snížit:

$$\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1 + \cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}(\sin x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + C.$$

§ 2.3.2. Metoda integrace po částech (*per partes*)

Metoda integrace po částech může být vhodná v případech, když je integrand ve tvaru součinu dvou výrazů, z nichž jeden je žádoucí zderivovat a druhý dovedeme integrovat.[8]

§ 2.3.2.1. Princip integrace po částech

VĚTA 2.10 (o integrací po částech). Pro diferencovatelné funkce u a v platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

Důkaz. Mějme dvě diferencovatelné funkce u a v. Pak dle pravidla derivovaní součinu je $(uv)' = uv' + u'v$, odkud $uv' = (uv)' - vu'$ a proto

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.13}$$

Podle (2.2) platí[9] $\int (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)$ a proto z (2.13) integrací obdržíme (2.12). □

Poznámka 2.11. Využijeme-li pojmu diferenciálu, můžeme zapsat vztah (2.12) v podobě

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x), \tag{2.14}$$

která je obvykle pohodlnější k zapamatování.

Způsobu výpočtu integrálů, jenž se zakládá na vzorcích (2.12), (2.13), se říká *integrace po částech* neboli *per partes*. Využití této metody je vhodné, jestliže bude integrál $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ jednodušší než $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ (to jest zderivování u při současném zintegrování v' zpět na v situaci v nějakém smyslu zlepšuje).

[8] Je to, v podstatě, jediná funkční náhražka chybějícího pravidla integrace součinu.

[9] Můžeme zde vzít konstantu integrování rovnou 0, protože se v součtu (2.12) vyskytuje další neurčity integrál, obsahující integrační konstantu.

§ 2.3.2.2. Jednoduché příklady integrace po částech

PŘÍKLAD 2.12. Vypočtěme integrál $\int x \cos x \,\mathrm{d}x$ s pomocí integrace *per partes*.

Řešení. Oba dva činitele x a $\cos x$ se dobře derivují a integrují, avšak pro ten první je $x' = 1$. Zvolme tedy ve vzorci (2.12) $u(x) = x$; pak musí být $v'(x) = \cos x$, odkud dostaneme $v(x) = \int v'(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x$ (viz tabulka 2.1) a tudíž dle (2.12)

$$\int \overbrace{x}^{u} \cdot \overbrace{\cos x}^{v'} \,\mathrm{d}x = \overbrace{x}^{u} \cdot \overbrace{\sin x}^{v} - \int \overbrace{1}^{u'} \cdot \overbrace{\sin x}^{v} \,\mathrm{d}x = x \sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Integrál $\int \sin x \,\mathrm{d}x$ je tabulkový ($\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x$ až na aditivní konstantu; viz (2.6)) a proto

$$\int x \cos x \,\mathrm{d}x = x \sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + C,$$

kde C je libovolná konstanta. □

Poznámka 2.13 (o správné volbě členů). Pro úspěšnou integraci po částech je třeba v (2.12) rozumně zvolit u a v'. Položíme-li, např. v $\int x \cos x \,\mathrm{d}x$ z příkladu 2.12 $u(x) = \cos x$, $v'(x) = x$, bude $u'(x) = -\sin x$, $v(x) = \int x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2$ a dostaneme

$$\int x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x,$$

což je výsledek nevyhovující, jelikož ukol výpočtu integrálu $\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$ není nikterak snadnější než původní zadání. Nevhodná volba členů tedy způsobí, že při integraci po částech k zjednodušení původního integrálu nedochází (je zřejmé, že by v tomto případě bylo vhodné člen x právě derivovat, nikoliv integrovat).

Metody integrace po částech lze, samozřejmě, využít i opakovaně.

PŘÍKLAD 2.14. Vypočtěme $\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x$.

Řešení. Vzhledem ke zkušenosti s příkladem 2.12 budeme derivovat x^2 (zjednoduší se) a integrovat e^x (umíme to provést). Metodu integrace po částech zde použijeme dvakrát:

$$\overset{\boxed{\begin{array}{l} u=x^2, \quad v'=e^x \\ u'=2x,\ v=\int e^x \,\mathrm{d}x=e^x \end{array}}}{\int} x^2 e^x \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - 2 \overset{\boxed{\begin{array}{l} u=x,\ v'=e^x \\ u'=1,\ v=e^x \end{array}}}{\int} x e^x \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x \,\mathrm{d}x\right)$$

$$= x^2 e^x - 2\,(x e^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

Integrační konstantu stačí přidat až na konci. □

V některých případech integrace po částech nevede přímo na konečný výsledek, avšak po jejím opakovaném využití obdržíme vztah, jenž lze chápat jako rovnici pro určení hodnoty integrálu.

PŘÍKLAD 2.15. Vypočtěme integrály

$$I(x) = \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x, \quad J(x) = \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x. \tag{2.15}$$

Řešení. Jelikož $(e^x)' = e^x$ a derivace sinu a kosinu jsou, až na znaménko, znovu kosinus nebo sinus, očekáváme, že metodou *per partes* jeden z těchto integrálu převedeme na ten druhý a naopak, přičemž v daném případě není důležité, který z těchto členů budeme derivovat. Vykonáme-li toto dvakrát, dostaneme zase integrál původní a tudíž i vztah pro určení jeho hodnoty. Uvažujme např. $J(x)$ a proveďme *per partes* s $u(x) = \sin x$, $\mathrm{d}v(x) = e^x\,\mathrm{d}x$; pak bude $\mathrm{d}u(x) = \cos x\,\mathrm{d}x$, $v(x) = \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$ a tudíž

$$J(x) = \int \overbrace{\sin x}^{u}\,\overbrace{e^x\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}v} = \overbrace{\sin x}^{u}\,\overbrace{e^x}^{v} - \int \overbrace{e^x}^{v}\,\overbrace{\cos x\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}u} = e^x \sin x - I(x). \tag{2.16}$$

Vykonáme-li podobné úpravy s $I(x)$, obdržíme

$$I(x) = \int \overbrace{\cos x}^{u}\,\overbrace{e^x\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}v} = \overbrace{e^x}^{u}\,\overbrace{\cos x}^{v} - \int \overbrace{e^x}^{v}\,\overbrace{(-\sin x)\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}u} = e^x\cos x + \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x,$$

což znamená, že $I(x) = e^x \cos x + J(x)$. Odvodili jsme tedy, že pro uvažované integrály platí vztahy

$$I(x) = e^x\cos x + J(x), \quad J(x) = e^x \sin x - I(x),$$

odkud dostaneme $I(x) - J(x) = e^x \cos x + J(x)$, $I(x) + J(x) = e^x \sin x$ a tudíž je

$$I(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C, \quad J(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Přidali jsme na konci integrační konstantu, jelikož integrál neurčitý má zahrnovat všecky primitivní funkce.

Poznamenejme, že, zajímá-li nás pouze jeden z integrálů (2.15), např. $J(x)$, stačí v (2.16) provést integraci po částech ještě jednou, čímž získáme rovnici pro určení $J(x)$. □

§ 2.3.2.3. Běžné typy integrálů, jež lze vypočítat integrací po částech

Metodu *per partes* je vhodné použit zejména pro následující často se vyskytující typy integrálů:

§ 2.3.2.3.1. Integrály $\int p(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)\sin(ax)\,\mathrm{d}x$ a $\int p(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x$

Integrand je ve tvaru součinu polynomu $p(x)$ a funkce, jejíž integrál lze snadno vypočítat. Derivujeme pak ten polynom ($u = p(x)$), v novém integrandu obdržíme polynom nižšího stupně (*per partes* aplikujeme několikrát, až se polynom zderivuje na konstantu). Modelem je příklad 2.12.

§ 2.3.2.3.2. Integrály $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, $\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$

Zde oba dva činitele lze zcela jednoduše integrovat i derivovat. Jelikož $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, vychází, že lze $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ vyjádřit přes $\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$ a naopak. Použijeme-li *per partes* dvakrát (ve stejném směru, abychom se nevrátili na začátek!), obdržíme vztah, jenž lze považovat za rovnici pro určení daného integrálu (příklad 2.15).

§ 2.3.2.3.3. Integrály součinů typů $\int p(x)(\ln x)^m\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)(\operatorname{arctg} x)^m\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)(\operatorname{arcctg} x)^m\,\mathrm{d}x$

Integrály tohoto typu, kde m je přirozené číslo a $p(x)$ je polynom, lze vypočíst integrací po částech (derivujeme člen s $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$). Společným u těchto integrálu je to, že derivace $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ jsou racionální výrazy, kdežto integrálem polynomu je opět polynom. Je-li $m > 1$, integraci po částech provedeme víckrát.

Podobně lze vypočítat $\int p(x)(\arcsin x)^m\,\mathrm{d}x$ $\int p(x)(\arccos x)^m\,\mathrm{d}x$

PŘÍKLAD 2.16. Vypočtěme $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

Ř e š e n í. Integrací po částech obdržíme

$$\int \overbrace{1}^{v'} \cdot \overbrace{\arcsin x}^{u} \, \mathrm{d}x = \overbrace{x}^{v} \overbrace{\arcsin x}^{u} - \int \overbrace{x}^{v} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}^{u'} \, \mathrm{d}x = x \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{t-x^2}}$$
$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}(1-x^2).$$

Jelikož s $1 - x^2 = s$, $-2x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}s$ je

$$\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}(1-x^2) = \int s^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}s = 2s^{\frac{1}{2}} = 2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.17}$$

dostaneme

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

PŘÍKLAD 2.17. Vypočtěme $\int (\arcsin x)^2 \, \mathrm{d}x$.

Ř e š e n í. Podobně příkladu 2.16

$$\int \overbrace{1}^{v'} \cdot \overbrace{(\arcsin x)^2}^{u} \, \mathrm{d}x = \overbrace{x}^{v} \overbrace{(\arcsin x)^2}^{u} - \int \overbrace{x}^{v} \overbrace{\frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}^{u'} \, \mathrm{d}x. \tag{2.18}$$

Ve výsledku opět integrujme po částech s $u = \arcsin x$, $v' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$ (to jest tak, aby byl zderivován zase člen s $\arcsin x$); dle (2.17) bude $v = \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}(1-x^2) = 2\sqrt{1-x^2}$ a tudíž

$$\int \overbrace{\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}^{v'} \overbrace{\arcsin x}^{u} \, \mathrm{d}x = \overbrace{2\sqrt{1-x^2}}^{v} \overbrace{\arcsin x}^{u} - \int \overbrace{2\sqrt{1-x^2}}^{v} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}^{u'} \, \mathrm{d}x$$
$$= 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

Dosazením do (2.18) dostaneme

$$\int (\arcsin x)^2 \, \mathrm{d}x = x\,(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

§ 2.3.3. Metoda integrace s pomocí nové proměnné (substituce)

Metoda integrace s pomocí nové proměnné, jak říká její název, je založena na zavedení nové integrační proměnné, např. t, místo původní proměnné x prostřednictvím určitého vztahu typu $x = \phi(t)$ anebo $t = \psi(x)$ (tzv. substituce). Aplikujeme-li tuto substituci v nějakém integrálu $\int g(x) \, \mathrm{d}x$, po vyloučení původní proměnné x z integrandu $g(x)$ a diferenciálu $\mathrm{d}x$ dostaneme jiný integrál podle nové proměnné. Substituci lze hodnotit jako úspěšnou, dostaneme-li ve výsledku integrál v nějakém smyslu jednodušší nebo vhodnější pro další úpravy.[10] Po výpočtu pomocného integrálu podle nové proměnné je potřeba se vrátit k proměnné původní.

[10] A, samozřejmé, v první řadě, je-li vůbec možné danou substituci korektně provést, to jest jsou-li splněné příslušné podmínky.

§ 2.3.3.1. Princip integrace s pomocí nové proměnné

Derivujeme-li složený výraz tvaru $F(\phi(t))$, dle řetězového pravidla máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\phi(t)) = F'(\phi(t))\,\phi'(t).$$

Integrací tohoto vztahu (za předpokladu spojitosti funkcí f, ϕ a ϕ') bezprostředně dostáváme

$$\int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\phi(t)) + C, \tag{2.19}$$

kde $f = F'$. Jelikož F je funkcí primitivní pro f, platí $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ a tudíž lze vztah (2.19) zapsat ve tvaru

$$\int f(\phi(t)\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.20}$$

kde v integrálu na pravé straně po jeho výpočtu za x dosadíme $x = \phi(t)$. Připomeneme-li si pojem diferenciálu,[11] můžeme tuto skutečnost vyjádřit názornějším vzorcem

$$\int f(\phi(t))\,\mathrm{d}\phi(t) = \int f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.22}$$

jenž je ekvivalentní s (2.20). Shrnutím uvedených úvah obdržíme takovou větu.

VĚTA 2.18 (o integraci s pomocí substituce). Buďte f funkce spojitá na intervalu (a, b) a ϕ funkce definovaná na intervalu (α, β) a mající v každém jeho bodě derivaci, přičemž $\phi(t) \in (a, b)$ pro všechna $t \in (\alpha, \beta)$. Potom pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ platí uvedené výše rovnice (2.20), (2.22), dosadíme-li na jejich pravých stranách po výpočtu integrálu $x = \phi(t)$.

Toto znamená, že pokud má integrand tvar $f(\phi(t))\,\phi'(t)$ s nějakou diferencovatelnou funkcí ϕ, pak je výsledek jednoduše integrálem z f s dosazeným místo argumentu výrazem $\phi(t)$. Stačí tedy odvodit integrál z f.

Na vzorcích (2.20), (2.22) je založena tzv. *substituční* metoda vypočtu integrálu. Vztah $x = \phi(t)$ vyjadřuje zavedení nové proměnné t, což objasňuje název metody.

PŘÍKLAD 2.19. Vypočtěme $\int \cos^3 t \sin t\,\mathrm{d}t$.

Řešení. Jelikož $\sin t$ je derivací výrazu $-\cos t$, lze napsat

$$\cos^3 t \sin t = \cos^3 t\,(-\cos t)' = -\cos^3 t\,(\cos t)',$$

což má tvar $f(\phi(t))\,\phi'(t)$ s $\phi(t) = \cos t$ a $f(s) = -s^3$. Proto dle vzorce (2.20) je

$$\int \cos^3 t \sin t\,\mathrm{d}t = -\int \cos^3 t\,(\cos t)'\,\mathrm{d}t = -\int s^3\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{4}s^4 + C,$$

kde $s = \cos t$ a C je libovolná konstanta. Integrál je tedy vypočítán a zbývá se jen vrátit k původní proměnné t, to jest v získaném výsledku za s dosadit $\cos t$:

$$\int \cos^3 t \sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\cos^4 t + C.$$

Téhož výsledku dosáhneme s využitím vzorce (2.22): položíme-li $\cos t = s$, bude $\mathrm{d}s = \mathrm{d}(\cos t) = -\sin t\,\mathrm{d}t$ a tudíž $\sin t\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}s$ a $\int \cos^3 t \sin t\,\mathrm{d}t = -\int \cos^3 t\,\mathrm{d}(\cos t) = -\int s^3\,\mathrm{d}s$, což vede na již odvozený vzorec. □

[11] Jak již víme z počtu diferenciálního, diferenciálem funkce f v bodě x je výraz

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.21}$$

Z hlediska výpočtů je zde pohodlné tlumočit výraz „$f'(x)\,\mathrm{d}x$“ jako „$f'(x)\cdot\mathrm{d}x$“. Připomíná to také historické označení derivace: $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, z něhož (2.21) obdržíme formálním vynásobením diferenciálem nezávisle proměnné $\mathrm{d}x$. Z diferenciály se pracuje, v podstatě, stejné jako s odpovídajícími derivacemi.

§ 2.3.3.2. Způsoby využití metody substituce

Metody substituce, založené na rovnicích (2.20), (2.22), lze užít dvojím způsobem v závislosti na tom, ctěme-li rovnici zleva doprava nebo opačně.

1. způsob

Máme-li vypočíst integrál, jenž se podařilo upravit na tvar $\int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t$ nebo, což je totéž, $\int f(\phi(t))\,\mathrm{d}\phi(t)$, pak ho s pomocí substituce $\phi(t) = x$ převedeme na integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, v němž pak po výpočtu zpětně dosadíme $x = \phi(t)$. Je-li možné $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ vypočítat, bude úloha integrace vyřešena.

Úspěch tohoto postupu se určuje tím, zda se podaří výraz pod znakem integrálu vyjádřit ve tvaru $f(\phi(t))\,\mathrm{d}\phi(t)$ nalezením vhodné funkce ϕ. Je to obecně nesnadný ukol, vyžadující určité zkušenosti. V některých případech je volba substituce zcela zřejmá (typickým je příklad 2.19), v jiných hledání vhodné substituce vyžaduje úsilí.[12]

2. způsob

Máme-li vypočíst integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, můžeme se pokusit najít vhodnou substituci $x = \phi(t)$ tak, aby výsledný integrál podle nové proměnné $\int f(\phi(t))\,\mathrm{d}\phi(t)$ byl v něčem výhodnější než ten výchozí. Jestliže nový integrál dokážeme vypočíst, ve výsledku bude potřeba vykonat zpětnou substituci (vrátit se k původní proměnné x).

Poslední krok se zpětnou substitucí v sobě ukrývá určitou jemnost: ve výsledném integrálu totiž musíme všude vyjádřit t přes x, což není vždy možné, jelikož vykonaná substituce má tvar $x = \phi(t)$. Pro tento případ věta 3.2 vyžaduje upřesnění formou dodatečné podmínky, která požadovanou vlastnost zaručí.[13]

VĚTA 2.20. Předpokládejme, že ϕ ve větě 3.2 zobrazuje (α, β) na (a, b).[14] Pak lze integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ vypočíst s pomocí vzorců (2.20), (2.22), kde vlevo proměnnou t vyjádříme přes x podle rovnice $\phi(t) = x$.

Poznámka 2.21. Dodatečná podmínka věty 2.20 je jistě splněna, je-li ϕ monotonně rostoucí nebo klesající (pak bude zpětné vyjádření t přes x jednoznačné: $t = \phi^{-1}(x)$; obecně tomu tak být nemusí). Tento případ se v praxi vyskytuje nejčastěji.

Poznámka 2.22 (o provedení substituce v praxi). V praxi substituci v integrálu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

provádíme tak, že po zavedení nové proměnné vztahem typu $x = \phi(t)$ (anebo $t = \psi(x)$) původní proměnnou x v integrandu vyjádříme přes novou proměnnou t. Zároveň vyjádříme diferenciál $\mathrm{d}x$ přes $\mathrm{d}t$: je-li $x = \phi(t)$, bude $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$; pro substituci typu $t = \psi(x)$ zapíšeme $\mathrm{d}t = \psi'(x)\,\mathrm{d}x$, kde v $\psi'(x)$ rovněž vyjádříme x přes t (v tomto kroku v konkretních

[12] My se však vesměs zaměříme na některé typické a často se vyskytující případy, kde vhodnou substituci určíme vždy relativně snadno. Dále probereme i zajímavější příklady, v nichž nalezení substituce vyžaduje jistou invenci.

[13] Podrobnější vysvětlení lze nalézt v [1], kap. III, § 4.

[14] Toto znamená, že (a, b) je *právě* množinou všech hodnot $\phi(t)$ pro $t \in (\alpha, \beta)$, to jest pro každý bod $x \in (a, b)$ platí $x = \phi(t)$ s nějakým $t \in (\alpha, \beta)$. Taková zobrazení se nazývají surjekce.

případech může být výhodnější postupovat trochu jinak; pozorně se podívejte na příklad 2.29). Oboji pak formálně dosadíme do $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Po výpočtu se má provést substituce zpětná.

Samotná volba substituce je otázkou zkušenosti a v nemalé míře rovněž intuice. Pro vhodnost substituce $x = \phi(t)$ může hovořit přítomnost v integrálu výrazu $\phi'(t)\,\mathrm{d}t$ nebo podobných členů.

PŘÍKLAD 2.23. Vypočtěme integrál $\int (5x-2)^{30}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Položíme-li $5x-2=t$, dostaneme $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(5x-2) = 5\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,\mathrm{d}t$ a proto

$$\int (5x-2)^{30}\,\mathrm{d}x = \int t^{30}\frac{1}{5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\int t^{30}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\frac{t^{31}}{31} + C = \frac{1}{155}(5x-2)^{31} + C.$$

Poznamenejme, že užití substituce nám ušetřilo značné úsilí, jež bychom museli vynaložit při výpočtu tohoto integrálu roznásobením závorky a integrací jednotlivých členů příslušného polynomu stupně 30: $\int (5x-2)^{30}\,\mathrm{d}x = \int (5^{30}\cdot x^{30} + \dots)\,\mathrm{d}x$ atd. □

§ 2.3.3.2.1. Případ lineární substituce

V praxi zvláště často potkáme integrály typu

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x,$$

kde $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$ dovedeme vypočíst.[15] Takovýto integrál snadno vypočteme s pomocí lineární substituce $ax+b=t$, $a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}t$:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Důvod pro zvolení této lineární substituce je zřejmý: diferenciály původní a nové proměnných se liší jen konstantním činitelem.

§ 2.3.3.2.2. Příklady integrace s pomocí nové proměnné

Princip metody substituční si lépe vysvětlíme, když s jeho využitím vypočteme několik konkretních integrálů.

PŘÍKLAD 2.24. Vypočtěme integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$, kde $a>0$.

Řešení. V běžných tabulkách (viz např. tabulka 2.1) vidíme vzorec pro jiný, avšak podobný integrál:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x. \tag{2.23}$$

Zkusme původní integrál upravit tak, aby se dal použit vzorec (2.23). Máme:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}. \tag{2.24}$$

Zaveďme v (2.24) novou proměnnou

$$t = \frac{x}{a}. \tag{2.25}$$

[15] S tímto se setkáváme téměř v každém běžném integrálu; viz např. příklady 2.23, 2.24, 2.28.

Pak dle (2.21) bude $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\frac{1}{a}x\right) = \left(\frac{1}{a}x\right)' \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x$, to jest $\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x$, odkud dostaneme vyjádření diferenciálu původní proměnné x přes diferenciál nové proměnné t:

$$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t. \tag{2.26}$$

Dosadíme-li (2.25) a (2.26) do (2.24):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{a}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

s využitím vztahů (2.23), (2.25) ihned obdržíme výsledek:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \tag{2.27}$$

Dokázaný vzorec lze chápat jako zobecnění vzorce (2.7) z tabulky 2.1. Jedná se o speciální případ lineární substituce (§ 2.3.3.2.1). □

PŘÍKLAD 2.25. Vypočtěme $\int \frac{x^2}{3x^3+5}\,\mathrm{d}x$.

Řešení 2.25.1. Čitatel x^2 připomíná derivaci výrazu x^3, proto lze zkusit $t = x^3$, $\mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x$, $x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{x^2}{3x^3+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3t+5}\,\mathrm{d}t.$$

V posledním integrálu položíme $3t+5 = s$, $\mathrm{d}s = 2\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}s$, což dává $\int \frac{1}{3t+5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\ln|s|$. Pak po zpětných substitucích dostaneme

$$\int \frac{x^2}{3x^3+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3t+5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\ln|s| + C = \frac{1}{9}\ln|3t+5| + C = \frac{1}{9}\ln|3x^3+5| + C.$$

Řešení 2.25.2. Po zpětném pohledu na řešení 2.25.1 je zřejmé, že se výpočet zjednoduší, zavedeme-li novou proměnnou vzorcem $3x^3+5 = t$. Pak $\mathrm{d}t = 9x^2\,\mathrm{d}x$, $x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{x^2}{3x^3+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\ln|t| + C = \frac{1}{9}\ln|3x^3+5| + C.$$

PŘÍKLAD 2.26. Vypočtěme $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Položíme-li $x-1 = t$, bude $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $x = t+1$,

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Integraci racionální funkce jsme tedy zredukovali na integraci součtu několika mocninných funkcí:

$$\frac{(t+1)^3}{t^2} = \frac{t^3+1+3t+3}{t^2} = t + \frac{1}{t^2} + \frac{3}{t} + 3, \tag{2.28}$$

a tudíž bude

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{t} + 3\ln|t| + 3t = \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1}{x-1} + 3\ln|x-1| + 3(x-1).$$

Poznamenejme, že výpočet (2.28) je poněkud přehlednější, než bezprostřední dělení polynomů x^3 a $(x-1)^2$. □

V následující úloze odvodíme vzorec, jehož se v praxi užívá velmi často, aniž by byl explicitně zmíněn (je však součástí některých tabulek).

ÚLOHA 2.27. V příslušném definičním oboru dokažme vzorec[16]

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C, \tag{2.29}$$

kde C je libovolná konstanta.

Řešení. Je zde zřejmá volba substituce $t = f(x)$; pak bude $dt = f'(x)\,dx$ a tudíž $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|$. □

§ 2.3.3.2.3. Technika zavedení do diferenciálu

Jedná se pouze o poněkud jinou podobu vypočtu dle § 2.3.3.1, když se substituce provádí implicitně (nezapisujeme ji). Touto technikou pro jednodušší substituce (zejména pro substituci lineární) docílíme kratšího zápisu. Praktický postup je zřejmý z příkladů.

PŘÍKLAD 2.28. Pro $\int e^{ax}\,dx$, kde $a \neq 0$, máme

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\int e^{ax}\,d(ax) = \frac{1}{a}e^{ax} + C.$$

Vykonaná úprava znamená, že integrál přepíšeme na tvar $\int f(\psi(x))\,d\psi(x)$ a v duchu vypočteme $\int f(s)\,ds$, v němž ihned dosadíme $s = \psi(x)$. Tímto způsobem např. výpočet integrálu (2.24) z příkladu 2.24 zapíšeme stručněji takto:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\cdot a\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

substituce $at = x$ je totiž dosti jednoduchá a můžeme ji provést implicitně s použitím (2.21), aniž bychom ji explicitně zapisovali. Takto operovat s diferenciály je pohodlné i v mnoha jiných případech.

PŘÍKLAD 2.29. Vypočtěme integrál

$$\int xe^{-3x^2}\,dx.$$

Řešení. Je zřejmé, že $d(x^2) = 2x\,dx$, $d(-3x^2) = -3\cdot 2x\,dx = -6x\,dx$, odkud $x\,dx = -\frac{1}{6}\,d(-3x^2)$. Pak bude[17]

$$\int e^{-3x^2}x\,dx = \int e^{-3x^2}\left(-\frac{1}{6}\right)d(-3x^2) = -\frac{1}{6}\int xe^{-3x^2}\,d(-3x^2) = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C.$$

Poznamenejme, že zde bylo z praktického hlediska vhodné pro vyloučení proměnné x vyjádřit rovnou výraz $x\,dx$, nikoliv zvlášť x a dx. Jinak bychom museli vyjádřit x přes t: $x^2 = -\frac{1}{3}t$, $x = \pm\sqrt{-\frac{t}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-t}$ a použít tento vztah pro výpočet diferenciálu dx:

$$dx = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,d\left(\sqrt{-t}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{-t}\right)'\,dt = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{-t}}(-1)\,dt,$$

[16] Vzorec (2.29) chápeme jako zkrácenou verzi dvou vzorců, vznikajících v závislosti na znaménku výrazu pod znakem logaritmu; viz poznámka pod čarou 7, str. 15.

[17] Provádíme-li odpovídající substituci explicitně, vychází $t = -3x^2$, $dt = -6x\,dx$, $x\,dx = -\frac{1}{6}\,dt$,

$$\int e^{-3x^2}x\,dx = -\frac{1}{6}\int e^t\,dt = -\frac{1}{6}e^t + C = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C.$$

kde znaménko v $\pm$ bereme stejné jako ve vzorci pro x. Pak bude

$$x\,\mathrm{d}x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-t}\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{-t}}\right)(-1)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\,\mathrm{d}t,$$

což jsme již dříve odvodili mnohem rychleji. Tento výpočet je však zcela zbytečný, neboť jsme potřebovali vyjádření pouze pro výraz $x\,\mathrm{d}x$ (jiné členy v integrálu totiž nejsou). $\square$

§ 2.4. Integrace některých často se vyskytujících typů funkcí

Uveďme několik nejrozšířenějších typů integrálu, pro něž lze formulovat jistý obecný postup vypočtu.

§ 2.4.1. Integrál racionální lomené funkce

Jsou to integrály tvaru

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

kde p je polynom stupně n a q je polynom stupně m (takový integrand se nazývá racionální lomenou funkcí). Není-li funkce ryze lomená (to jest $n \geq m$), integrand dělením polynomů upravíme na součet polynomu a ryze lomené funkce. Polynomy se integrují velice snadno a tudíž stačí rozebrat pouze případ ryze lomené funkce, když platí $n < m$.

§ 2.4.1.1. Integrace ryze lomené funkce

Pro integraci ryze lomené funkce dle věty 1.16 vypočítáme její rozklad na součet parciálních zlomků,[18] jejichž integrály buď jsou tabulkové nebo se dají na tabulkové zredukovat (podrobněji viz § 2.4.1.2). Připomeneme si princip rozkladu na parciální zlomky.

TVRZENÍ 2.30. Vyjádříme-li jmenovatel $q(x)$ ve tvaru součinu výrazů typu $(x-c)^k$ a $(x^2+\alpha x+\beta)^k$ (kde $\alpha^2 < 4\beta$), rozkladem podílu $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parciální zlomky bude součet výrazů typu $\frac{D_1}{x-c}+\frac{D_2}{(x-c)^2}+\dots\frac{D_k}{(x-c)^k}$, odpovídajících každému výskytu v rozkladu členu $(x-c)^k$, a výrazů typu $\frac{A_1x+B_1}{x^2+\alpha x+\beta}+\dots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, jež odpovídají členům $(x^2+\alpha x+\beta)^k$.
Koeficienty se v různých parciálních zlomcích liší a jejich hodnoty je třeba vypočítat z podmínky, že všechny vypsané členy mají v součtu dávat původní funkci (převedeme vše na společného jmenovatele a zajistíme, aby byl čitatel rovný $p(x)$).

Dovedeme-li nalézt kořeny polynomu ve jmenovateli ryze lomeného výrazu, jeho integraci pomocí tvrzení 2.30 můžeme vždy zredukovat na integraci parciálních zlomků.

PŘÍKLAD 2.31. Vypočtěme integrál

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}.$$

Řešení. V příkladě 1.13 jsme odvodili,[19] že pro integrand platí rozklad (1.19) a tudíž

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.\end{aligned}\tag{2.30}$$

[18] *Parciální zlomky* jsou nejjednodušší ryze lomené funkce typů $\frac{A}{(x-c)^k}$ nebo $\frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, kde $k = 1, 2, \dots$ a polynom $x^2+\alpha x+\beta$ má záporný diskriminant (to jest $\alpha^2-4\beta < 0$); viz § 1.3.2.

Poznamenejme, že jmenovatelé $(x-c)^k$ a $(x^2+\alpha x+\beta)^k$ zde popisují všechny možné typy členů v rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů, když ho zapisujeme bez použití komplexních čísel.

[19] Mohli bychom, samozřejmé, i bezprostředně rozložit na parciální zlomky $\frac{1}{x^2-a^2}$.

Vzorec (2.30) platí v intervalech, neobsahujících body 1 a -1. Pak dle (2.30)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} = \frac{1}{a}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{x}{a}+1}\right| = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$$

Vzorec platí v intervalech, neobsahujících a a $-a$. □

PŘÍKLAD 2.32. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}.$$

Řešení. Jedná se o integraci ryze lomené funkce, využijme tedy rozkladu integrandu na parciální zlomky dle tvrzení 2.30. Rozklad polynomu ve jmenovateli na součin reálných kořenových činitelů je $(x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ a proto dle tvrzení 2.30 lze zvolit příslušné konstanty tak, aby platilo

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Po převedení výrazů vpravo na společného jmenovatele obdržíme, že pro všechna x musí být

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1). \tag{2.31}$$

Dosadíme-li[20] do této rovnosti kořeny jmenovatele $x = 1$ a $x = -1$, obdržíme rovnice $1 = 4A$, $1 = -4B$, odkud ihned $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Zbývá tedy určit hodnoty C, D.

Jelikož to, že pro všechna x platí (2.31), znamená rovnost dvou polynomů, musí tyto polynomy mít stejné koeficienty. U polynomu na pravé straně rovnice (2.31) koeficient u x^0 je $A - B + D$ a koeficient u x^1 je $A + B - C$ (je-li členů více, můžeme pro pohodlí tohoto výpočtu závorky roznásobit). Na levé straně (2.31) však je konstanta 1, což je polynom stupně 0. Proto musí být $A - B + D = 0$, $A + B - C = 0$. Dosadíme-li již vypočtené hodnoty A, B, dostaneme $\frac{1}{2} + D = 0$, $-C = 0$ a tudíž $D = -\frac{1}{2}$, $C = 0$. V rozkladu na parciální zlomky (2.31) jsou tedy známy všecky koeficienty, což umožňuje integrál převést na součet jednodušších integrálů

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{x^4-1} &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.\end{aligned}$$

Poznamenejme, že místo shrnutí členů se stejnou mocninou bychom mohli rovnice pro C, D obdržet dosazením do (2.31) nějakých čísel, i když další reálné kořeny jmenovatele k dispozici nemáme (žádné členy s kořenovými činiteli v tomto případě nezmizí). Např. při $x = 2$ bude $1 = 15A + 5B + 3(2C + D)$. Dosazením 0 vždy dostaneme rovnost konstantních členů; zde bude $1 = A - B - D$, pročež $D = A - B - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. Dosadíme-li nalezené A, B, D do předchozí rovnice, dostaneme $1 = \frac{5}{2} + 6C - \frac{3}{2}$, $C = 0$. □

Poznámka 2.33 (o způsobu určení neznámých koeficientů u parciálních zlomků). Koeficienty vždy můžeme vypočíst tak, že přirovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin na obou stranách rovnosti (v případe, kdy polynom ve jmenovateli má komplexní kořeny, se tomu nevyhneme; viz např. příklad 2.36). Dosazení kořenů jmenovatele výpočet urychluje (typickým je příklad 2.32).

[20] Jelikož má daný vztah platit pro *všechna* x, pak zcela jistě i pro kořeny polynomu ve jmenovateli. Dosazení těchto kořenů je výhodné, samozřejmě, proto, že se takto odstraní všechny členy s příslušnými kořenovými činiteli.

§ 2.4.1.2. Integrace parciálních zlomků

Podle hořejšího lze výpočet integrálu ryze lomené funkce převést na integraci příslušných parciálních zlomků, dokážeme-li rozložit jmenovatel na součin kořenových činitelů; pak lze považovat úlohu integrace za vyřešenou. Je tedy potřeba umět integrovat jednotlivé parciální zlomky.

§ 2.4.1.2.1. Parciální zlomky 1. druhu

Integrace parciálních zlomků 1. druhu $\frac{A}{(x-c)^k}$ (definice 1.14) je vždy jednoduchá:

$$\int \frac{A}{(x-c)^k}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} A\ln|x-c| & \text{pro } k=1;\\ A\int (x-c)^{-k}\,\mathrm{d}(x-c) = \frac{A}{1-k}(x-c)^{1-k} & \text{pro } k>1. \end{cases}$$

§ 2.4.1.2.2. Parciální zlomky 2. druhu

U parciálních zlomků 2. druhu $\frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, $k=1,2,\dots$, bývá integrace technicky složitější, ovšem také je vždy možná. V praxi zvláště často potkáváme rozklady na parciální zlomky, skládající se z členů typů $\frac{A}{(x-c)^k}$ a $\frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}$.

Případ $k = 1$

Jedná se o parciální zlomek $\frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}$, kde je diskriminant polynomu $x^2+\alpha x+\beta$ záporný:[21] $\alpha^2 < 4\beta$ a polynom proto lze převést na tvar součtu čtverců. Standardními úpravami dostaneme[22]

$$x^2+\alpha x+\beta = (x+\xi)^2+\eta^2,$$

kde je $\xi = \frac{1}{2}\alpha$, $\eta = \sqrt{\beta - \frac{1}{4}\alpha^2}$, a integrál zapíšeme ve tvaru

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Ax+B}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ve jmenovateli je polynom kvadratický a v čitateli — polynom lineární. Upravme tedy lomený výraz tak, aby v čitateli vznikla derivace jmenovatele $\big((x+\xi)^2+\eta^2\big)' = 2(x+\xi) = 2x+\alpha$:

$$\frac{Ax+B}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \frac{A}{2}\frac{2x+\frac{2B}{A}}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \frac{A}{2}\frac{2x+\alpha+\frac{2B}{A}-\alpha}{(x+\xi)^2+\eta^2}.$$

Při integrací dostaneme součet dvou integrálů

$$\int \frac{Ax+B}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x + \frac{A}{2}\left(\frac{2B}{A}-\alpha\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\xi)^2+\eta^2},$$

přičemž dle příkladů 2.27, 2.24 obojí dovedeme vypočítat:

$$\int \frac{2x+\alpha}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\big((x+\xi)^2+\eta^2\big)'}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x = \ln\big((x+\xi)^2+\eta^2\big)$$

a

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \int \frac{\mathrm{d}(x+\xi)}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \frac{1}{\eta}\operatorname{arctg}\frac{x+\xi}{\eta}.$$

Integrál $\int \frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x$ tedy je lineární kombinací členů s logaritmem jmenovatele a arcus tangens posunutého argumentu.

---

[21] V opačném případě bychom dovedli tento polynom dále rozložit na součin reálných kořenových činitelů a tím úlohu zredukovat na předchozí případ parciálních zlomků 1. druhu.

[22] $x^2+\alpha x+\beta = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\alpha+\beta = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\alpha^2+\beta-\frac{1}{4}\alpha^2 = \left(x-\frac{1}{2}\alpha\right)^2+\beta-\frac{1}{4}\alpha^2$.

Případ $k > 1$

V případě, když $k > 1$, je výpočet integrálu $\int \frac{Ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,\mathrm{d}x$ technicky složitější (pro komplikované výpočty se takovými případy zabývat nebudeme; vzorce však lze dle potřeby nalézt v literatuře).

Výpočet takového integrálu lze provést tak, že podobně předchozímu případu přepíšeme kvadratický polynom ve jmenovateli na součet čtverců

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Ax+B}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\alpha\right)^2+\eta^2\right)^k}\,\mathrm{d}x,$$

kde $\eta = \sqrt{\beta - \frac{1}{4}\alpha^2}$, a vykonáme substituci $x + \frac{1}{2}\alpha = t$, počemž dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\alpha\right)^2+\eta^2\right)^k}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{At+B-\frac{1}{2}\alpha A}{\left(t^2+\eta^2\right)^k}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{A}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2+\eta^2)}{\left(t^2+\eta^2\right)^k} + \left(B-\frac{1}{2}\alpha A\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+\eta^2\right)^k},\end{aligned}$$

kde první z integrálů se vypočte snadno[23] a ten druhý je shodný s $I_k(t)$ z úlohy 2.34.

ÚLOHA 2.34. Dokažme, že pro integrály

$$I_k(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^k}, \tag{2.32}$$

kde k je přirozené číslo, platí rekurentní formule

$$I_{k+1}(x) = \frac{2k-1}{2ka^2} I_k(x) + \frac{x}{2ka^2(x^2+a^2)^k}. \tag{2.33}$$

Řešení. Při $k = 1$ máme integrál z příkladu 2.24. Budiž $k > 1$. Integrací po částech obdržíme

$$\begin{aligned}I_k(x) &= \int \overbrace{(x^2+a^2)^{-k}}^{u} \cdot \overbrace{1}^{v'}\,\mathrm{d}x = \overbrace{\frac{1}{(x^2+a^2)^k}}^{u}\,\overbrace{x}^{v} - \int \overbrace{\left(-2kx\left(x^2+a^2\right)^{-k-1}\right)}^{u'}\,\overbrace{x}^{v}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+a^2)^k xf} + 2k\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}x - 2ka^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

což vzhledem k (2.32) znamená, že platí

$$I_k(x) = \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2kI_k(x) - 2ka^2 I_{k+1}.$$

Z tohoto vztahu úpravou obdržíme rekurentní vzorec (2.33). □

DŮSLEDEK 2.35. Platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)}.$$

Důkaz. Uvažovaným integrálem je $I_2(x)$. Z formule (2.33) při $k = 1$ dostaneme

$$I_2(x) = \frac{1}{2a^2} I_1(x) + \frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)},$$

a zbývá jen využít vzorce (2.27) pro $I_1(x)$. □

[23] Dle vzorce pro integraci mocninné funkce bude $\int \left(t^2+\eta^2\right)^{-k}\,\mathrm{d}(t^2+\eta^2) = \frac{1}{1-k}(t^2+\eta^2)^{1-k}$.

§ 2.4.2. Integrály typu $\int R(\cos x, \sin x)$, kde R je racionální lomená funkce

Integrály, v nichž integrand je lomenou funkcí členů $\cos x$ a $\sin x$, lze s využitím tzv. univerzální trigonometrické substituce vždy převést na integrál racionální lomené funkce.

§ 2.4.2.1. Univerzální trigonometrická substituce

Pro integrály tvaru

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.34}$$

kde R je racionální lomenou funkcí podle každého z argumentů, lze využit *univerzální trigonometrické substituce*

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \tag{2.35}$$

kde t značí novou proměnnou.[24] Jelikož (2.35) je ekvivalentní s rovností $x = 2\operatorname{arctg} t$, pro diferenciály platí vztah[25] $\mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Vzhledem k tomu, že platí

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = 2\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

integrál tak převedeme na integrál racionální lomené funkce, a to pomocí následujících vzorců.

Vzorce pro vykonání univerzální trigonometrické substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}. \tag{2.36}$$

Z (2.36) ihned plyne, že[26] $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$, $\sec x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ a $\csc x = \frac{1+t^2}{2t}$, to jest po zavedení nové proměnné t substitucí (2.35) převedeme všecky výskyty trigonometrických funkcí v integrandu na racionální lomené výrazy proměnné t, přičemž podobný výraz vznikne i po přepočtu diferenciálu. Po vypočtu upraveného integrálu použijeme (2.35) a vrátíme se k původní proměnné x.

PŘÍKLAD 2.36. Vypočtěme

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Použijeme-li substituci (2.35), podle vzorců (2.36) obdržíme

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} - 1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{2t - (1+t^2)}{1-t^2+2(1+t^2)}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= -2\int \frac{t^2-2t+1}{3+t^2}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -2\int \frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t.$$

V integrandu je ryze lomená funkce, již můžeme dále rozložit na součet příslušných parciálních zlomků (§ 1.3.2):

$$\frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+3} = \frac{(At+B)(t^2+3) + (Ct+D)(t^2+1)}{(t^2+1)(t^2+3)}.$$

---

[24] Samozřejmě, v příslušném oboru: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, přičemž vždy vyloučíme nulové body jmenovatele.

[25] Tentýž vztah lze obdržet i přímo z (2.35): $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)\mathrm{d}x$.

[26] Připomeňme, že funkce sekans a kosekans se definují vzorci $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$.

Potřebujeme tedy, aby pro libovolné t platilo

$$(At + B)(t^2 + 3) + (Ct + D)(t^2 + 1) = t^2 - 2t + 1.$$

Přirovnáním koeficientů u t^0, t^1, t^2 a t^3 obdržíme podmínky[27]

$$3B + D = 1, \qquad 3A + C = -2, \qquad B + D = 1, \qquad A + C = 0,$$

odkud vypočítáme $A = -1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 1$. Pak

$$\begin{aligned} -2\int \frac{t^2 - 2t + 1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t &= -2\int \frac{-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - 2\int \frac{t+1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{2t}{t^2+3}\,\mathrm{d}t - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}. \end{aligned}$$

Máme $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\big(\frac{t}{\sqrt{3}}\big)$, $\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{t^2+1} = \ln(t^2+1)$, $\int \frac{2t}{t^2+3}\,\mathrm{d}t = \ln(t^2+3)$, až na aditivní konstantu, jíž k výsledku přidáme později. Potom

$$\begin{aligned} -2\int \frac{t^2 - 2t + 1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t &= \ln(t^2+1) - \ln(t^2+3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \ln\frac{t^2+1}{t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Teď již zbývá jenom dosadit do (2.37) vyjádření t přes x ze substituce (2.35) a přidat integrační konstantu. Ve výsledku dostaneme:[28]

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + K. \tag{2.39}$$

§ 2.4.2.2. Speciální případy

Poznámka 2.37 (o speciálních případech trigonometrické substituce). Užití univerzální substituce (2.35) je zpravidla spojeno s pracnějším výpočtem a proto je vždy vhodné si rozmyslet, zda není možné integrál vypočítat snadněji. Často je užitečná následující rada.

ÚVAHA 2.38. Je-li integrál ve tvaru (2.34), kde R je racionální lomená funkce dvou argumentů, mající jednu z vlastností:

$$R(-u, v) = -R(u, v), \quad R(u, -v) = -R(u, v), \quad R(-u, -v) = R(u, v)$$

pro všechna (u, v), pak lze pro integraci využit jedné ze substitucí $t = \sin x$, $t = \cos x$ resp. $t = \operatorname{tg} x$.

Substituce, doporučená úvahou 2.38, může být vhodnější než substituce univerzální.

[27] První podmínku, jež odpovídá koeficientům u t^0, lze vždy odvodit také dosazením hodnoty $t = 0$.

[28] Často se stává, že výsledky integrace při použiti poněkud odlišných úprav se zdánlivě liší. Např. všimneme-li si, že dle (2.35) $t^2 + 1 = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$, obdržíme

$$\ln\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 3} = \ln\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} + 2} = \ln\frac{1}{1 + 2\cos^2\frac{x}{2}} = \ln 1 - \ln\left(1 + 2\cos^2\frac{x}{2}\right) = -\ln(\cos x + 2)$$

a proto lze výsledek integrace (2.39) přepsat do tvaru

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos x + 2) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + K. \tag{2.38}$$

PŘÍKLAD 2.39. Vypočteme integrál

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, \mathrm{d}x.$$

Řešení 2.39.1. Využití univerzální substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ dle vzorců (2.36) vede na integrál

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \frac{8t^3}{(1+t^2)^3} \frac{2}{t^2+1} \, \mathrm{d}t = 16 \int \frac{t^3 \left(1-t^2\right)^2}{(1+t^2)^6} \, \mathrm{d}t.$$

Dostáváme tedy integrál neryze lomené funkce, přičemž i po vyčlenění ryze lomené části zůstává úloha výpočetně náročnou jakožto integrace parciálního zlomku s vysokým stupněm jmenovatele bez reálných kořenů. Zkusme proto raději najít jinou cestu.

Řešení 2.39.2. Daný integrál má tvar (2.34) s $R(u, v) = u^2 v^3$. Funkce R je lichá podle v a tudíž dle úvahy 2.38 použijme substituci $t = \cos x$. Dostaneme $\mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x$, $x \sin x = -\, \mathrm{d}t$,

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, \mathrm{d}x = \int \cos^2 x \sin^2 x \, \overbrace{\sin x \, \mathrm{d}x}^{-\,\mathrm{d}t} = -\int t^2 \left(1-t^2\right) \mathrm{d}t = \int t^4 \, \mathrm{d}t - \int t^2 \, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 = \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x,$$

což je výrazné jednodušší než příslušná integrace v řešení 2.39.1. □

Uvedená výše úvaha 2.38 tedy může navrhnout postup vhodnější než využití obecné trigonometrické substituce. Avšak ani toto řešení nemusí být vždy optimální; při integrací bychom měli, pokud možno, uvažovat různé možnosti, z nichž zvolíme tu nejpohodlnější.

PŘÍKLAD 2.40. Vypočtěme integrál

$$\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x.$$

Řešení 2.40.1. Využijeme-li univerzální trigonometrické substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ pro $-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, dle vzorců (2.36) obdržíme

$$\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^4 \frac{2 \, \mathrm{d}t}{t^2+1} = 2 \int \frac{\left(1-t^2\right)^4}{\left(1+t^2\right)^5} \, \mathrm{d}t,$$

čímž zadání zredukujeme na výpočet integrálu racionální lomené funkce. Funkce je navíc ryze lomená a tudíž lze aplikovat postup z § 2.4.1. Jedná se však o technicky složitější případ, vyžadující hodně únavných výpočtů (jmenovatel má jen imaginární kořeny, a to vysoké násobností). Je tedy vhodné zkusit pohledat nějaké jiné řešení.

Řešení 2.40.2. Funkce $u \mapsto u^4$ je sudá. Dle úvahy 2.38 pro $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, zaveďme novou proměnnou $t = \operatorname{tg} x$. Pak bude $\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$. Ze vzorce $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ plyne, že $\frac{1}{\cos^6 x} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^3$ a tudíž

$$\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x = \int \cos^6 x \, \overbrace{\frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x}^{\mathrm{d}t} = \int \frac{1}{(1+t^2)^3} \, \mathrm{d}t.$$

Výsledný integrál je sice jednodušší než v řešení 2.40.1, nicméně i zde integrace vyžaduje poměrně hodně výpočtů.[29]

Řešení 2.40.3. Přepišme integrál ve tvaru $\int \cos^3 x \cos x \,\mathrm{d}x$ a použijme metodu *per partes* s $u(x) = \cos^3 x$, $v'(x) = \cos x$. Pak bude $u'(x) = -3\cos^2 x \sin x$, $v(x) = \sin x$:

$$\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \int \overbrace{\cos^3 x}^{u}\,\overbrace{\cos x}^{v'} \,\mathrm{d}x = \overbrace{\cos^3 x}^{u}\,\overbrace{\sin x}^{v} - \int \overbrace{\left(-3\cos^2 x \sin x\right)}^{u'}\,\overbrace{\sin x}^{v} \,\mathrm{d}x$$
$$= \sin x \cos^3 x + 3\int \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x,$$

přičemž v posledním integrálu po úpravě opět vzniká původní integrál $\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x$:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x - \int \cos^4 x \,\mathrm{d}x.$$

Jelikož podobně příkladu 2.9 $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\int \cos 2x \,\mathrm{d}(2x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$ (implicitní substituce $2x = t$), dostáváme vztah

$$\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \sin x \cos^3 x + 3\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x - \int \cos^4 x \,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \sin x \cos^3 x + \frac{3x}{2} + \frac{3}{4}\sin 2x - 3\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x,$$

jenž je rovnicí pro $\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x$. Zbývá tedy tuto rovnici vyřešit:

$$\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin x \cos^3 x + \frac{3}{16}\sin 2x = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin x \cos^3 x + \frac{3}{8}\sin x \cos x.$$

K výsledku pak, samozřejmě, přidáme integrační konstantu. □

§ 2.4.3. Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) \mathrm{d}x$, kde R je racionální lomená funkce

Integrály tohoto druhu lze převést na integrál racionální lomené funkce zavedením nové proměnné t s pomocí substituce

$$t^m = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}. \tag{2.40}$$

Pro realizaci substituce potřebujeme sestrojit i substituci zpětnou, to jest vyjádřit x přes t: $t^m(\gamma x+\delta) = \alpha x+\beta$, $(\gamma t^m - \alpha) = \beta - \delta t^m$,

$$x = \frac{\beta - \delta t^m}{\gamma t^m - \alpha}$$

a vypočíst diferenciál: $\mathrm{d}x = \left(\frac{\beta-\delta t^m}{\gamma t^m-\alpha}\right)' \mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}x = \frac{-m\delta t^{m-1}(\gamma t^m - \alpha) - (\beta - \delta t^m)\gamma m t^{m-1}}{(\gamma t^m-\alpha)^2}\,\mathrm{d}t = m\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma t^m-\alpha)^2}t^{m-1}\,\mathrm{d}t.$$

Substituci lze provést, je-li $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ (v opačném případě $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = \frac{\lambda\beta x+\beta}{\lambda\delta x+\delta} = \frac{\beta}{\delta}$, což znamená, že se jedná o integrand, v němž $\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ fakticky není).

[29] Vskutku, rozklad na parciální zlomky v tomto případě má tvar

$$\frac{1}{(1+t^2)^3} = \frac{A_1 t + B_1}{1+t^2} + \frac{A_2 t + B_2}{(1+t^2)^2} + \frac{A_3 t + B_3}{(1+t^2)^3}$$

a vyžaduje určení 6 neznámých koeficientů bez možnosti dosazení reálných kořenů.

PŘÍKLAD 2.41. Vypočtěme $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[5]{x+1}}$.

Řešení. Dle doporučeného vzorce (2.40) položme $x+1=t^5$. Pak bude $\mathrm{d}x = 5t^4\,\mathrm{d}t$, $x=t^5-1$,

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[5]{x+1}} = 5\int \frac{\left(t^5-1\right)t^4}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

Dělením polynomů t^9-t^4 a $t+1$ dostáváme [30]

$$\frac{t^9-t^4}{t+1} = t^8-t^7+t^6-t^5+t^4-2t^3+2t^2-2t+2-\frac{2}{t+1}$$

a tudíž

$$\int \frac{\left(t^5-1\right)t^4}{t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{t^9}{9}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{2}+\frac{2t^3}{3}-t^2+2t-2\ln|t+1|.$$

Pro obdržení výsledku poslední výraz vynásobíme pěti a zpětně dosadíme $t=(x+1)^{\frac{1}{5}}$. □

Podobným způsobem lze integrovat některé obecnější výrazy, obsahující více členů s radikály. Je-li v integrandu několik výrazů typu $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{q_i}$, kde $q_1, q_2, \ldots$ jsou racionální čísla, pro určení vhodné mocniny m v substituci (2.40) použijeme společný jmenovatel zlomků q_i.

PŘÍKLAD 2.42. Vypočteme

$$\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+1}.$$

Řešení. Zaveďme t vztahem $x=t^6$ (aby se „umocnilo“ jak $\sqrt[3]{x}$, tak i $\sqrt{x}$). Pak bude $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, a obdržíme integrál racionální lomené funkce proměnné t:

$$\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+1} = 6\int \frac{t^3}{t^2+1}t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Výraz $\frac{t^8}{t^2+1}$ není ryze lomený, proto z něj dělením vyčleníme polynomiální část:

$$\begin{array}{rl}
t^8 & \quad \big|\ t^2+1 \\
-t^8-t^6 & \quad \big|\ t^6-t^4+t^2-1 \\
\hline
-t^6 & \\
t^6+t^4 & \\
\hline
t^4 & \\
-t^4-t^2 & \\
\hline
-t^2 & \\
t^2+1 & \\
\hline
1 &
\end{array}$$

a obdržíme $\frac{t^8}{t^2+1} = t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}$. Pak bude

$$\int \frac{t^8}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \left(t^6-t^4+t^2-1\right)\mathrm{d}t + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg} t.$$

Po návratu k proměnné x dostaneme $\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+1} = 6\left(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7}-\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}-x^{\frac{1}{6}}+\operatorname{arctg} x^{\frac{1}{6}}\right)$. □

---

[30] Pro děleni zde lze využit Hornerova schématu.

§ 2.4.4. Integrály typu $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})$, kde R je racionální lomená funkce

Případ $\alpha = 0$ odpovídá integrálům z § 2.4.3. Pro $\alpha \neq 0$ je vhodné převést kvadratický polynom na součet nebo rozdíl čtverců: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left((x+\xi)^2 \pm \eta^2\right)$ v závislosti na tom, zda je jeho diskriminant kladný nebo záporný. V případě součtu čtverců a $\alpha > 0$ po lineární substituci místo $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$) obdržíme člen $\sqrt{t^2 + a^2}$ (při $\alpha < 0$ nemá integrand smysl); v případě rozdílu pak dostaneme integrál s $\sqrt{t^2 - a^2}$ anebo $\sqrt{a^2 - t^2}$. Výpočty jsou založeny na sofistikované substitucí a jsou poměrně složité (§ 2.4.4.1).

Dále uvádíme jen několik často se vyskytujících integrálu tohoto typu. Některé z nich se vyskytují v rozsáhlejších tabulkách integrálů (příklady 2.44, 2.45, 2.46); u jejich důkazů lze dobře vyzkoušet různé techniky integrace.

§ 2.4.4.1. Eulerovy substituce

V obecném případě lze tyto integrály zredukovat na integrály racionální funkce s pomocí zajímavých Eulerových substitucí.

Integrály, obsahující výraz typu $\sqrt{x^2 + a^2}$

Obsahuje-li integrand $\sqrt{x^2 + a^2}$, zaveďme novou proměnnou s vzorcem

$$\sqrt{x^2 + a^2} = x - s. \tag{2.41}$$

Pak po umocnění bude $x^2 + a^2 = x^2 - 2xs + s^2$, $2xs = s^2 - a^2$ a proto

$$x = \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right), \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\mathrm{d}s. \tag{2.42}$$

Jelikož rovnice v (2.42) obsahují jen racionální výrazy, bude integrál $\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)\mathrm{d}x$ takto zredukován na integrál racionální lomené funkce proměnné s.

Poznámka 2.43. Elegantní myšlenka Eulerovy substituce (2.43) spočívá v tom, že takto vyjádření $x = \psi(s)$ vzniká řešením *lineární* rovnice podle x (a to právě díky sčítanci s x, jenž se v (2.43) po umocnění odečte od x^2 na levé straně).

Integrály, obsahující výraz typů $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$

Je-li v integrandu přítomen výraz tvaru $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(x-a)(x+a)}$, lze novou proměnnou s zavést vzorcem

$$\sqrt{x^2 - a^2} = s\,(x - a)\,, \tag{2.43}$$

a to opět proto, abychom vyjádření $x = \psi(s)$ získali řešením lineární rovnice podle x; po umocnění totiž bude $(x-a)(x+a) = s^2(x-a)^2$, $x + a = s^2(x-a)$, $x(s^2-1) = as^2 + a$ a tudíž

$$x = a\frac{s^2+1}{s^2-1}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2s(s^2-1) - (s^2+1)2s}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s = -4\frac{s}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s.$$

§ 2.4.4.2. Některé speciální případy

PŘÍKLAD 2.44. Vypočtěme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

kde $a > 0$. Definičním oborem integrandu je množina $\{x : |x| > a\}$.

Řešení 2.44.1. Funkce je sudá; uvažujme $x > a$. Vykonejme substituci $x = a\sec t$, kde $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ (připomeňme, že $\sec t = \frac{1}{\cos t}$ a $0 < \cos x < 1$ pro $t \in (0, \frac{\pi}{2})$). Pak

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 t - 1} = a\,\mathrm{tg}\,t$$

(pro $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ je $\operatorname{tg} t > 0$) a $\mathrm{d}x = -\frac{-a \sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{a \operatorname{tg} t}{\cos t}\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{1}{a \operatorname{tg} t} \frac{a \operatorname{tg} t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}.$$

Jelikož $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ a dle substituce $\frac{1}{\cos x} = \frac{x}{a}$, platí $\operatorname{tg} t = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Pro $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ využijme výsledek příkladu 2.51, řešení 2.51.1; pak obdržíme

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln\left(\frac{1}{\cos t} + \operatorname{tg} t\right) + C \\ &= \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) + C = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr) + K, \end{aligned}$$

kde K ($K = C - \ln a$) je libovolná konstanta. Tento vzorec jsme dokázali pro $x > a$.

Jelikož funkce v integrandu je sudá, pro $x < -a$ místo $F(x) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr)$ její primitivní funkce bude[31] $-F(-x) = -\ln\bigl(-x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr)$. Úpravou obdržíme:

$$\begin{aligned} -F(-x) &= -\ln\bigl(-x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr) = \ln 1 - \ln\bigl(-x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr) \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2} - x} = \ln \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{x^2 - 1 - x^2} = \ln(-x - \sqrt{x^2 - a^2}). \end{aligned}$$

Sjednocením dvou posledních rovností obdržíme vzorec platný pro všechna x s $|x| > a$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\bigl|x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr| + K.$$

Řešení 2.44.2. Funkce v integrandu je sudá a tudíž se můžeme omezit případem, kdy x je kladné, to jest $x > a$. Vzhledem k vlastnostem hyperbolických funkcí[32] (viz (2.44)) je zde vhodné provést substituci

$$x = a \cosh t, \tag{2.45}$$

pak $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cosh^2 t - a^2} = a\sqrt{\cosh^2 t - 1} = a\sqrt{\sinh^2 t} = a \sinh t$ a diferenciál bude $\mathrm{d}x = a \sinh t\,\mathrm{d}t$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{1}{a \sinh t} a \sinh t\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t.$$

Zbývá tedy jen vykonat inverzní substituci a vrátit se k původní proměnné x.

Vztah $x = a \cosh t$ znamená (viz pozn. 32), že $x = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t})$, to jest $e^{2t} - \frac{2x}{a} e^t + 1 = 0$, což je kvadratická rovnice $s^2 - \frac{2x}{a} s + 1 = 0$ pro $s = e^t$. Vyřešíme-li tuto rovnici, obdržíme

[31] Zde využijeme takové věty:

VĚTA. Buďte f sudá funkce a F její primitivní funkce na $[0, +\infty)$. Pak je funkce $\tilde{F}(x) = -F(-x)$, $x \le 0$, primitivní funkcí pro f na $(-\infty, 0]$.

Důkaz. Vskutku, pro $x \le 0$ máme $\tilde{F}'(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(-x) = -F'(-x) = -f(-x) = f(x)$. □

[32] Připomeňme, že hyperbolické kosinus a sinus (§ 1.1) se definují jako $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ a platí $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \tag{2.44}$$

.

$s = \frac{x}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, kde vezmeme znaménko „+“, protože $s = e^t$ a tudíž musí být $s > 0$ (navíc uvažujeme $x > a$). Jelikož $t = \ln x$, obdržíme

$$t = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr) - \ln a$$

a proto dostaneme vzorec

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr) + C, \tag{2.46}$$

což je v souladu s výsledkem řešení 2.44.1. □

PŘÍKLAD 2.45. Vypočtěme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$

kde $a > 0$.

Řešení. Připomeňme si vzorec $\mathrm{tg}^2\, x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ a zaveďme substituci $x = a\,\mathrm{tg}\, t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak $\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \mathrm{tg}^2 t + a^2} = a\sqrt{\mathrm{tg}^2 t + 1} = \frac{a}{\cos t}$ a $\mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$, odkud

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{1}{\frac{a}{\cos t}} \frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}.$$

Integrál $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ lze vypočítat různými způsoby (§ 2.4.5, příklad 2.51). Zde je pohodlné využít řešení 2.51.3

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \mathrm{tg}\, t\right| + K = \ln\left|\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 t} + \mathrm{tg}\, t\right| + K$$

a tudíž

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \ln\left|\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}\right| + K = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + a^2}\right| + K \\ &= \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C, \end{aligned} \tag{2.47}$$

kde $C = K - \ln a$. □

Z (2.46) a (2.47) obdržíme tabulkový integrál (2.9):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\bigl(\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\bigr) + C. \tag{2.48}$$

PŘÍKLAD 2.46. Vypočtěme

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde $a > 0$.

Řešení. Zde lze využít výsledku (2.48) z příkladu 2.45. Vskutku, aplikujme metodu *per partes* s $u(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$, $v'(x) = 1$ a vzorec (2.48):

$$\begin{aligned} I(x) := \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int x \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x - a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - I(x) - a^2 \ln\bigl(|x+\sqrt{x^2-a^2}|\bigr),$$

odkud nalezneme $I(x)$ a obdržíme

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\bigl(|x+\sqrt{x^2-a^2}|\bigr) + C. \tag{2.49}$$

PŘÍKLAD 2.47. Mějme

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde $a > 0$. Vypočítejme tento integrál různými způsoby.

Řešení 2.47.1. Daný integrál lze vypočítat metodou *per partes* podobně příkladu 2.46 s volbou $u(x) = \sqrt{x^2+a^2}$, $v'(x) = 1$ a využitím vzorce (2.48):

$$\begin{aligned}
I(x) := \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{x^2+a^2} - I(x) + a^2\ln\bigl(|x+\sqrt{x^2-a^2}|\bigr).
\end{aligned}$$

Poslední vztah je rovnicí pro nalezení $I(x)$, odkud dostáváme

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\bigl(|x+\sqrt{x^2-a^2}|\bigr) + C. \tag{2.50}$$

Řešení 2.47.2. Vzhledem k vlastnostem hyperbolických kosinu a sinu (§ 1.1.1) lze zavést substituci

$$x = a\sinh t, \tag{2.51}$$

pak $\mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t$. Jelikož dle (1.4) $\cosh^2 t = \sinh^2 t + 1$, $\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t$, $\cosh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh(2t)+1)$ a $\int \sinh t\,\mathrm{d}t = \cosh t$, máme

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x &= \int a\sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2}\cosh t\,\mathrm{d}t = a^2\int a\sqrt{\sinh^2 t + 1}\cosh t\,\mathrm{d}t \\
&= a^2\int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int(\cosh(2t)+1)\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{4}\sinh(2t) + \frac{a^2}{2}t,
\end{aligned}$$

kde integrační konstantu přidáme až na konci výpočtů. S využitím vzorce (1.6) pro inverzní funkci $\operatorname{arsinh} = \sinh^{-1}$ z (2.51) obdržíme

$$t = \operatorname{arsinh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right) = \ln\bigl(x+\sqrt{x^2+a^2}\bigr) - \ln a$$

a proto dle vzorce pro sinh dvojitého uhlu (1.4) a vztahu $a^2\cosh^2 t = a^2\sinh^2 t + a^2$

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{4}\sinh(2t) + \frac{a^2}{2}t &= \frac{a^2}{4}2\sinh t\cosh t + \frac{a^2}{2}t = \frac{1}{2}a\sinh t\cdot a\cosh t + \frac{a^2}{2}t \\
&= \frac{1}{2}a\sinh t\cdot\sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2} + \frac{a^2}{2}t \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\bigl(x+\sqrt{x^2+a^2}\bigr) - \frac{a^2}{2}\ln a.
\end{aligned}$$

Obdrželi jsme tedy vzorec

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C, \tag{2.52}$$

Sjednocením rovností (2.49) a (2.50) obdržíme vzorec

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln\left(\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\right) + C. \tag{2.53}$$

Vzorců, odvozené v předchozích příkladech, lze využít po převedení kvadratického polynomu s libovolnými koeficienty na součet nebo rozdíl čtverců.

PŘÍKLAD 2.48. Vypočtěme integrál $\int \sqrt{4x^2-4x-7}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Jelikož $4x^2-4x-7=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 1+1-8=(2x-1)^2-8$, platí

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4x^2-4x-7}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{(2x-1)^2-8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{(2x-1)^2-8}\,\mathrm{d}\,(2x-1)\\ &= \int \sqrt{(2x-1)^2-(\sqrt{8})^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

odkud substitucí $2x-1=t$ obdržíme integrál tvaru $\int\sqrt{t^2-a^2}\,\mathrm{d}t$ (viz příklad 2.46). □

PŘÍKLAD 2.49. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}}. \tag{2.54}$$

Řešení. Jelikož pro polynom ve jmenovateli platí vyjádření

$$\begin{aligned}3+2x-x^2 &= -(x^2-2x-3) = -(x^2-2\cdot 1\cdot x+1-1-3)\\ &= -((x-1)^2-4) = 4-(x-1)^2\end{aligned} \tag{2.55}$$

obdržíme

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}}\\ &= \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x-1}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+C.\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 2.50. Pro integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x-3}},$$

jenž se liší od (2.54) pouze znaménkem polynomu, dle (2.55) obdržíme integrál typu (2.48):

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x-3}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)^2-4}} = \int \frac{\mathrm{d}\,(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-4}}\\ &= \ln\left(\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-4}\right|\right)+C\\ &= \ln\left(\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right|\right)+C.\end{aligned}$$

§ 2.4.5. Různé příklady

Volba způsobu zavedení nové proměnné, samozřejmě, není jednoznačná.

PŘÍKLAD 2.51. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}.$$

Uveďme tři způsoby řešení (všimněme si různých tvarů výsledků!).

Řešení 2.51.1. Integrand je racionální funkcí výrazu $\cos x$ a tudíž lze využit obecnou trigonometrickou substituci $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (§ 2.4.2.1). Dle vzorců (2.36) obdržíme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

Integrál $\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$ byl vypočítán v příkladu 2.32, použijme proto již odvozený vzorec (2.30):

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} &= 2\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x\right| + C.\end{aligned}$$

Řešení 2.51.2. Po vynásobení čitatele a jmenovatele členem $\cos x$ lze zavést substituci $s = \sin x$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}s}{1-s^2}.$$

Pro poslední integrál použijme (2.30):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln|\sin x - 1| - \frac{1}{2}\ln|\sin x + 1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C.$$

Řešení 2.51.3. Jiný způsob je založen na vzorcích $\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ a $(\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} &= \int \frac{1}{\cos x}\frac{\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x}{\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x\right)}{\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x} = \ln\left|\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x\right| + C = \ln|\sec x + \operatorname{tg}x| + C.\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 2.52. Vypočtěme integrály

$$I(x) = \int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x, \quad J(x) = \int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.56}$$

Řešení 2.52.1. Vzhledem k definičnímu oboru logaritmu má smysl integrály uvažovat pouze pro $x > 0$, což nadále předpokládáme.

Vykonejme substituci $\ln x = t$; pak $x = e^t$ (uvažujeme kladná x) a $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$:

$$\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \int e^t \sin t\,\mathrm{d}t, \quad \int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \int e^t \cos t\,\mathrm{d}t.$$

Použijeme-li teď výsledky příkladu 2.15, obdržíme

$$\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C, \tag{2.57}$$

$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C. \tag{2.58}$$

Řešení 2.52.2. Lze využit metody *per partes* i bezprostředně v (3.5):

$$I(x) = \int 1 \cdot \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - J(x),$$

$$J(x) = \int 1 \cdot \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + \int x\sin(\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + I(x),$$

což dává

$$J(x) + I(x) = x\sin(\ln x)\,, \quad J(x) - I(x) = x\cos(\ln x)\,. \tag{2.59}$$

Vztah (3.6) můžeme vyřešit jako lineární nehomogenní soustavu vzhledem k $J(x)$ a $I(x)$. Ve výsledku po přidání integrační konstanty obdržíme vzorce (2.57), (2.58). □

Literatura

[1] V. Jarník. *Integrální počet. I*. Academia, Praha, 6 edition, 1984.