Matematická analýza 2
2024/2025 Z

2024-10-09 17:55:32

Obsah

Předmluva

Obsahem textu jsou poznámky pro přednášky pro kurz Matematická analýza 2 2024/2025 Z. Hlavní probíraná témata jsou okruhy pro závěrečnou zkoušku.

Pořadí kapitol přibližně odpovídá harmonogramu výuky. Číslování všech objektů je pro pohodlnější vyhledávaní průběžné (např. poznámka, následující po větě 3.11, bude mít číslo 3.12).

Řada úvah, vysvětlení i důkazů, jež výklad doplňují a občas jsou nad rámec kurzu, se uvádí zejména pro lepši pochopení látky a jsou vysázeny drobnějším písmem.

Text je koncipován, v rámci možnosti, pro maximální stručnost a zaměřen k výkladu základů učiva bez nutnosti se obracet k jiným zdrojům. Nenajdete proto zde hlubší výklad Riemannova integrálu ani historické vědomosti (což lze nalézt v literatuře). Dle obsahu daného kurzu se konstrukce integrálu vysvětluje velmi zjednodušenou formou. Také integrál neurčitý se rozebírá před integrálem určitým, i když přirozenějším je pořadí opačné.

Toto je pracovní verze textu, předběžná a nekompletní. Soubor je průběžně upravován.

Poznámky a připomínky: `ronto@ped.muni.cz`

2024-10-09 17:55:32

KAPITOLA I

Pomocné vědomosti

§ I.1. Hyperbolické funkce a inverzní hyperbolické funkce

Uveďme základní vlastnosti hyperbolických funkcí v reálném oboru.

§ I.1.1. Hyperbolické funkce

Hyperbolické funkce (kosinus, sinus, tangens a kotangens hyperbolické) reálného argumentu jsou definovány vzorcí

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \tag{I.1}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}. \tag{I.2}$$

Bezprostředně z (I.1) a (I.2) plyne, že platí

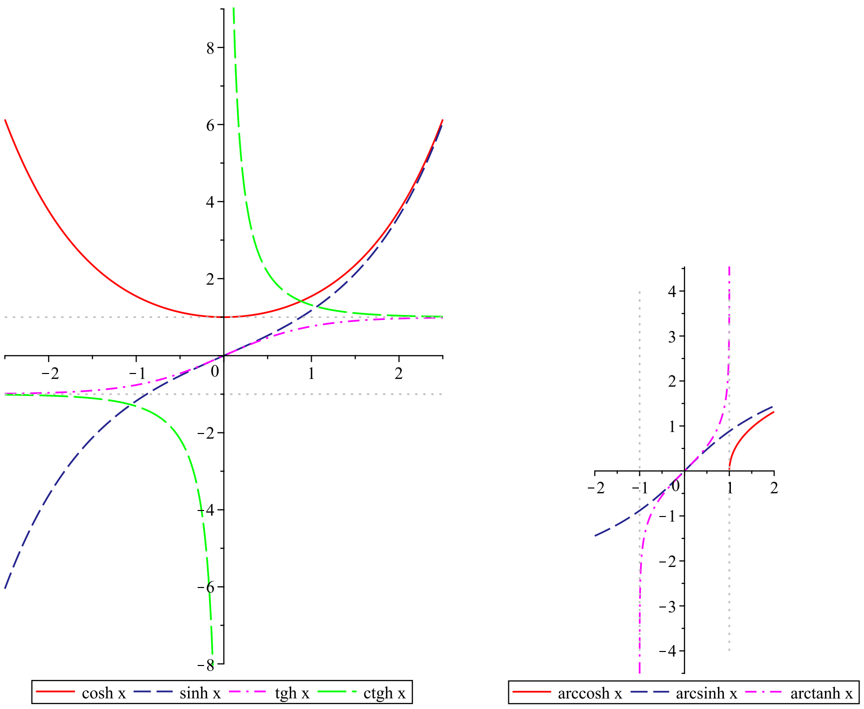
$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad \operatorname{ctgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}. \tag{I.3}$$

Grafy těchto funkcí jsou znázorněny na obr. I.1. Mezi jejich základní vlastnosti patří vztahy

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, & \cosh^2 x + \sinh^2 x &= \cosh 2x, \\ 2 \sinh x \cosh x &= \sinh 2x, & \frac{2 \operatorname{tgh} x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x} &= \operatorname{tgh} 2x, \\ 1 - \operatorname{tgh}^2 x &= \frac{1}{\cosh^2 x}, & 1 - \operatorname{ctgh}^2 x &= -\frac{1}{\sinh^2 x}. \end{aligned} \tag{I.4}$$

Pro derivace těchto funkcí platí následující rovnosti připomínající (až na rozdíl ve znaménku) obdobné vlastnosti goniometrických funkcí:

$$(\sinh x)' = \cosh x, \qquad (\cosh x)' = \sinh x. \tag{I.5}$$



(A) (B)

OBRÁZEK I.1. Hyperbolické funkce a inverzní hyperbolické funkce

§ I.1.2. Inverzní hyperbolické funkce

Pro funkce inverzní k hyperbolickým platí následující vztahy:[1]

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} x &= \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr) \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \operatorname{arcosh} x &= \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr) \quad (x \geq 1), \\ \operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (|x| < 1), \\ \operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad (|x| < 1). \end{aligned} \tag{I.6}$$

[1]Dokažme např. vzorec pro arsinh. Buď $x = \sinh t$. Dle (I.1) $x = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$, tj. $e^{2t} + 2xe^t + 1 = 0$ a pro kladné $s = e^t$ máme kvadratickou rovnici $s^2 - 2xs + 1 = 0$. Pak $s = x + \sqrt{x^2+1}$ (varianta $s = x - \sqrt{x^2+1}$ je nevyhovující, neboť je v rozporu s kladností s: $0 < s = x - \sqrt{x^2+1} \leq x - \sqrt{x^2} = 0$) a proto $t = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Vzhledem k libovolnosti x je tímto dokázaná existence inverzní funkce $\operatorname{arsinh} = \sinh^{-1}$ na $(-\infty, \infty)$ a platnost odpovídajícího vzorce.

KAPITOLA II

Integrál neurčitý

§ II.1. Primitivní funkce a integrál neurčitý

Mějme funkci f definovanou a spojitou na nějakém intervalu (a, b). Pojmy primitivní funkce a integrálu neurčitého slouží pro zodpovězení otázky: *derivací čeho je výraz $f(x)$?*

DEFINICE II.1. *Primitivní funkce* k funkci f na intervalu (a, b) je taková funkce F, že pro každé x z (a, b) platí $F'(x) = f(x)$.

Např. funkce $F(x) = \frac{5}{3}x^3$ je primitivní funkcí k $f(x) = 5x^2$, neboť $F'(x) = \frac{5}{3} \cdot 3x^2 = 5x^2 = f(x)$. Navíc všechny primitivní funkce pro $f(x) = 5x^2$ mají tvar $F(x) = \frac{5}{3}x^3 + C$, kde C je libovolná konstanta (toto platí i obecně; viz větu II.5).

DEFINICE II.2. Výraz

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad x \in (a, b), \tag{II.1}$$

kde F je funkce primitivní k f a C je libovolná konstanta, se nazývá *integrálem neurčitým* funkce f.

Název pojmu zdůrazňuje jeho odlišnost od integrálu určitého (kap. III).

Poznámka II.3. Jinak se dá říci, že integrálem neurčitým dané funkce je jakákoliv její primitivní funkce, anebo souhrn všech primitivních funkcí. Integrál neurčitý se tedy definuje jednoznačné až na „aditivní konstantu“. Pojmy primitivní funkce a integrálu neurčitého jsou vesměs shodné.

Symbol $\int$ je označován jako integrační znak, funkce f se nazývá *integrandem* a formální symbol „$\mathrm{d}x$“ slouží k označení proměnné, podle níž daný výraz integrujeme. Zápis čteme takto: „integrál z $f(x)$ podle x“.

Neurčitý integrál (II.1) zodpovídá otázku: *jak vypadají všecky možné výrazy, které po zderivování vzhledem k proměnné x se promění na $f(x)$?* Platí tedy, že

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x), \quad \left(\int F'(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(x) + C, \tag{II.2}$$

kde C je libovolná konstanta. Operace derivování a nalezení integrálu neurčitého jsou v tomto smyslu navzájem inverzní. Konstanta C se nazývá *integrační konstantou.*

VĚTA II.4 (o existenci primitivní funkce). Ke každé funkci spojité na intervalu (a, b) existuje na tomto intervalu funkce primitivní a tudíž má funkce integrál neurčitý.

Důkaz věty II.4 neuvádíme, jelikož toto tvrzení je přímým důsledkem jedné věty pro integrál určitý z další kapitoly. Poznamenejme, že existenci integrálu lze zaručit i za slabších podmínek (nemusí být funkce nutně spojitá); pro naše potřeby uvedená formulace je postačující.

Věta II.5 (o množině všech primitivních funkcí). Jsou-li F_1 a F_2 dvě funkce, jež jsou na intervalu (a, b) primitivní pro spojitou funkci f, pak existuje konstanta C taková, že

$$F_1(x) = F_2(x) + C \tag{II.3}$$

pro všechna $x \in (a, b)$.

I když se toto tvrzení jeví jako zřejmé, jeho zdůvodnění zcela triviální není.

Důkaz. Položme $u(x) = F_1(x) - F_2(x)$, $x \in (a, b)$. Jelikož F_1 a F_2 jsou primitivní pro f, platí

$$u'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in (a, b). \tag{II.4}$$

Toto však znamená, že je u na (a, b) konstantní. Vskutku, předpokládáme-li opak, lze najít nějaký interval $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tak, že $u(\alpha) \neq u(\beta)$. Funkce u je diferencovatelná jakožto součet dvou diferencovatelných funkcí. Proto dle věty o střední hodnotě existuje bod $\xi \in (\alpha, \beta)$, v němž

$$\frac{u(\beta) - u(\alpha)}{\beta - \alpha} = u'(\xi)$$

a tudíž $u'(\xi) \neq 0$, neboť $u(\alpha) \neq u(\beta)$. Avšak podle (II.4) musí být $u'(\xi) = 0$. Tento spor dokazuje chybnost předpokladu ohledné funkce u, která je tedy konstantní a tudíž platí (II.3). □

Z věty II.5 plyne, že grafy všech možných funkcí, jež jsou primitivní pro funkci danou, se obdrží posunem grafu *jedné* z nich posunem ve směru svislé souřadné osy.

Poznámka II.6 (o užití diferenciálu). Zápisu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ místo logičtějšího $\int f$ se užívá zejména z důvodů historických (jasnější to je v případě integrálu určitého, kde vystupují určité součty přírůstků funkce, vynásobené přírůstkem argumentu; viz dále § III.2).

Toto označení však má svůj smysl a poskytuje určitou výhodu. Nehledě na to, že „$\mathrm{d}x$“ v zápisu integrálu je pouze formální symbol, jenž značí proměnnou, podle níž se integruje, v praxi je pohodlné (a z hlediska výpočtů také vhodné) tlumočit výraz „$f(x)\,\mathrm{d}x$“ jako „$f(x) \cdot \mathrm{d}x$“ („$f(x)$ krát $\mathrm{d}x$“). Píšeme tedy např. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Všude dále v této kapitole platí

Úmluva II.7 (o vynechání integrační konstanty). Nezpůsobí-li to nedorozumění, budeme občas integrační konstantu pro zkrácení zápisu vynechávat, neboť integrační konstanta k výsledkům integrace vždy automaticky patří.[5]

§ II.2. Vlastnosti integrálu neurčitého

Základními vlastnostmi integrálu neurčitého jsou relace (II.2). Vzhledem k § II.1 a vlastnostem derivace platí vlastnost *linearity* integrálu: pro libovolné spojité funkce f_1, f_2 a konstanty λ_1, λ_2 je

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\,\mathrm{d}x = \lambda_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{II.5}$$

Mimo jiné, konstantu lze vždy vytknout před znak integrálu a integrál součtu (rozdílu) dvou výrazů je součtem (rozdílem) příslušných integrálů.

Poznámka II.8 (důležité varování). Neexistují smysluplné vzorce, které by vyjadřovaly $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ nebo $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$ přes $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int g(x)\,\mathrm{d}x$!

[5] Viz však poznámku II.11.

§ II.3. Výpočet integrálu neurčitého

„Výpočtem“ integrálu neurčitého se rozumí jeho vyjádření s využitím konečně mnoha elementárních funkcí pomocí algebraických operací a operace složení. Např. $\int (x^2+5e^{3x})\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+\frac{5}{3}e^{3x}+C$ (výsledkem je lineární kombinace funkcí mocninné a exponenciální); $\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$ (složení funkcí exponenciální a kvadratické), kde C je libovolná konstanta.[6]

Derivace konkrétních funkcí vždy vypočítáme podle známých pravidel derivování, to jest výsledek je svým způsobem garantován a k jeho dosažení stačí jen znát základní vlastnosti derivace a tabulku derivací elementárních funkcí. V případě integrace je situace odlišná: může se totiž stát, že neurčitý integrál nějaké funkce zásadně „nelze vypočítat“. Toto znamená, že existují elementární funkce, jejichž primitivní funkce již mezi elementární funkce nepatří. Je tomu tak např. pro $f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = \sin(x^2)$ apod.; jsou to funkce, pro něž nelze integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ žádným způsobem vyjádřit přes funkce elementární (to jest mocninné, exponenciální, trigonometrické, polynomiální, racionální lomené).[7]

Poznámka II.9. Na rozdíl od derivací, pro integrál platí, že:

(1) ne každý integrál neurčitý „lze vypočíst“;
(2) i pokud daný integrál neurčitý vypočíst lze, je potřeba nalézt způsob, jak to udělat. *Obecně platná metoda pro výpočet libovolných integrálu neexistuje.*

Pro integrál, jež explicitně vypočíst lze, můžeme očekávat následující případy:

(1) vzorec pro integrál je znám bezprostředně z tabulek;
(2) po vhodné úpravě lze obdržet integrál, shodný s některým z tabulkových nebo jemu podobný;
(3) na integrál lze (bezprostředně nebo po úpravě) aplikovat jednu z integračních metod (integrace s pomocí nové proměnné nebo po částech; §§ II.3.2, II.3.3).

Techniky integrace, jež jsou k dispozici, se vztahují na určité třídy integrálů, jež lze daným způsobem vypočíst. V odborné literatuře lze nalézt rozsáhle integrační tabulky a podrobný rozbor jednotlivých technik a případů jejich použitelnosti.

§ II.3.1. Tabulky základních integrálů

Přečtením tabulky známých derivací elementárních funkcí v opačném směru přirozeně vzniká užitečná tabulka základních integrálů (viz tabulka II.1).[8]

Vskutku, máme $(x^m)' = mx^{m-1}$ a pak pro $m \neq 0$ platí $x^{m-1} = \frac{(x^m)'}{m} = \left(\frac{x^m}{m}\right)'$, to jest $F(x) = \frac{x^m}{m}$ je primitivní funkcí k $f(x) = x^{m-1}$. Dále platí $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ atd. (připomeňme si, že vzorce pro derivace cyklometrických funkcí se odvodí s pomocí věty o derivaci inverzní funkce). Podobným způsobem se odvodí integrály řady dalších známých funkcí.

---

[6] Kontrola zderivováním: $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}e^{3x} + C\right)' = \frac{1}{3}3x^2 + \frac{5}{3}e^{3x}3 = x^2 + 5e^{3x}$; $\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$.

[7] Skutečnost, že se nějaký integrál nevyjadřuje ve funkcích elementárních, nikterak nesvědčí o jeho podřadném významu nebo nepoužitelnosti. Například, funkce $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ je důležitá v teorii pravděpodobnosti (tzv. chybová funkce), funkce $C_q(x) = \int_0^x \cos\left(qx^2\right)\mathrm{d}x$ a $S_q(x) = \int_0^x \sin\left(qx^2\right)\mathrm{d}x$ jsou tzv. integrály Fresnelovy, jichž se užívá ve fyzice apod. (v těchto vzorcích vidíme integrál neurčity, vyjádřený v podobě integrálu určitého jakožto funkce své horní meze; k tomu se dostaneme v další kapitole).

[8] Pro lepší přehlednost v této tabulce vynecháváme libovolnou aditivní konstantu, která tam, samozřejmě, vždycky patří (úmluva II.7). Viz však poznámku II.11.

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| \tag{II.6}$$

$$\int e^x \, dx = e^x \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1) \tag{II.7}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x \tag{II.8}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x \tag{II.9}$$

TABULKA II.1. Integrály některých elementárních funkcí.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} \tag{II.11}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \tag{II.12}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \tag{II.13}$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \tag{II.14}$$

TABULKA II.2. Další často využívané integrály.

Jiné často využívané vzorce pro integrály nalezneme v tabulce II.2; odvození některých z nich je však složitější.

Poznámka II.10 (o oboru platnosti integračních vzorců). Ve všech integračních vzorcích je třeba si hlídat definiční obory jednotlivých výrazů, v nichž je využití vzorců oprávněné (kompletnější tabulky u jednotlivých vzorců obsahují i obor jejich platnosti). Např. vzorce (II.14), (II.15) platí pro $|x| < |a|$; vzorec (II.9) pro integrál $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ platí v intervalech, neobsahujících body $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; vzorec (II.14) lze uplatnit na intervalech, neobsahujících body $\pm a$ (viz poznámku II.11) atd. Pro integrál funkce $x \mapsto 1/x$ viz poznámku II.11.

Poznámka II.11 (o integrálu funkce $x \mapsto 1/x$). Vzorec pro $\int \frac{1}{x} \, dx$ v (II.6), stejně jako další integrační vzorce, bychom měli doplnit přidáním integrační konstanty. Napíšeme-li

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C,$$

dostaneme přehlednou, avšak neúplně přesnou podobu vzorce pro tento integrál. I když v takovémto zkráceném tvaru vzorec pro daný integrál zcela běžně potkáváme, jeho matematicky preciznější podobou je

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(-x) + C_1 & \text{pro } x < 0, \\ \ln x + C_2 & \text{pro } x > 0, \end{cases} \tag{II.10}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Integrační konstanty zde tedy mohou být *různé* na levé a pravé poloose, neboť $\ln|x|$ je zde zkratkou pro předpisy dvou různých funkcí. Důvodem je fakt, že $\ln|x|$ není v bodě $x = 0$ definován a tak se definiční obor této funkce dělí na dvě části $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$, na nichž se $x \mapsto \frac{1}{x}$ integruje zvlášť jakožto funkce spojitá (věta II.4).

Poznámka II.12. Jelikož $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, platí taktéž

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{arccotg} x + C. \tag{II.15}$$

Zdánlivý spor se vzorcem (II.14) lze vysvětlit tím, že se $-\operatorname{arccotg} x$ a $\operatorname{arctg} x$ ve skutečnosti liší jen o aditivní konstantu, neboť graf funkce $x \mapsto -\operatorname{arccotg} x$ vzniká posunem grafu $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ o $\frac{\pi}{2}$ dolu. Vskutku, vzhledem k tomu, že $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t$, $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos t$, je $\operatorname{cotg}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} t$ a tudíž

$$\operatorname{cotg}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x\right) = -x.$$

Vypočteme-li arccotg výrazů na levé a pravé stranách, vzhledem k lichosti[9] funkce arccotg dostaneme

$$\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arccotg}(-x) = -\operatorname{arccotg} x.$$

Podobná poznámka platí pro vztahy $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$.

„Tabulkové“ integrály v uvedené podobě zpravidla nepotkáme a u konkretních integrálů je potřeba vymyslet vhodné úpravy.

PŘÍKLAD II.14. Integrál $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ v tabulkách bezprostředně nenalezneme. Vypočítáme ho však velice snadno pomocí vzorce pro cosinus dvojitého uhlu, jenž nám umožní mocninu snížit:

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1 + \cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}(\sin x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + C.$$

PŘÍKLAD II.15. Vypočtěme integrál neurčitý

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož platí identita $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, vzhledem k linearitě integrálu (vlastnost (II.5)) bude

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Podle tabulky integračních vzorců (tabulka II.1) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x$, $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x$ a tudíž

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C,$$

kde C je libovolná konstanta. □

Všimněme si, že pro funkce $f_1(x) = 1/\cos^2 x$, $f_2(x) = 1/\sin^2 x$ v příkladě II.15 je $\int f_1(x) f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$, což zdůrazňuje platnost poznámky II.8.

---

[9] Lichost funkce $x \mapsto \operatorname{arccotg} x$ je důsledkem následujícího tvrzení.

LEMMA II.13. Má-li lichá funkce inverzní funkci f^{-1}, je f^{-1} rovněž lichá.

Důkaz. Zvolme libovolné y z definičního oboru funkce f^{-1} a položme $x = f^{-1}(y)$; pak je $f(x) = y$. Vypočteme-li $f^{-1}(-y)$, vzhledem k lichosti funkce f dostaneme, že pro všechna y platí

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y),$$

což dokazuje lichost funkce f^{-1}. □

§ II.3.2. Metoda integrace po částech (*per partes*)

Metoda integrace po částech může být vhodná v případech, když je integrand ve tvaru součinu dvou výrazů, z nichž jeden je žádoucí zderivovat a druhý dovedeme integrovat.[10]

§ II.3.2.1. Princip integrace po částech

VĚTA II.16 (o integrací po částech). Pro diferencovatelné funkce u a v platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{II.16}$$

Důkaz. Mějme dvě diferencovatelné funkce u a v. Pak dle pravidla derivovaní součinu je $(uv)' = uv' + u'v$, odkud $uv' = (uv)' - vu'$ a proto

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{II.17}$$

Podle (II.2) platí[11] $\int (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)$ a proto z (II.17) integrací obdržíme (II.16). □

Poznámka II.17. Využijeme-li pojmu diferenciálu, můžeme zapsat vztah (II.16) v podobě

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x), \tag{II.18}$$

která je obvykle pohodlnější k zapamatování.

Způsobu výpočtu integrálů, jenž se zakládá na vzorcích (II.16), (II.17), se říká *integrace po částech* neboli *per partes*. Využití této metody je vhodné, jestliže bude integrál $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ jednodušší než $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ (to jest zderivování u při současném zintegrování v' zpět na v situaci v nějakém smyslu zlepšuje).

§ II.3.2.2. Jednoduché příklady integrace po částech

PŘÍKLAD II.18. Vypočtěme integrál $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ s pomocí integrace *per partes*.

Řešení. Oba dva činitele x a $\cos x$ se dobře derivují a integrují, avšak pro ten první je $x' = 1$. Zvolme tedy ve vzorci (II.16) $u(x) = x$; pak musí být $v'(x) = \cos x$, odkud dostaneme $v(x) = \int v'(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$ (viz tabulku II.1, str. 14) a tudíž dle (II.16)

$$\int \overbrace{x}^{u} \cdot \overbrace{\cos x}^{v'}\,\mathrm{d}x = \overbrace{x}^{u} \cdot \overbrace{\sin x}^{v} - \int \overbrace{1}^{u'} \cdot \overbrace{\sin x}^{v}\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Integrál $\int \sin x\,\mathrm{d}x$ je tabulkový ($\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$ až na aditivní konstantu; viz (II.8)) a proto

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C,$$

kde C je libovolná konstanta. □

[10] Je to, v podstatě, jediná funkční náhražka chybějícího pravidla integrace součinu.

[11] Můžeme zde vzít konstantu integrování rovnou 0, protože se v součtu (II.16) vyskytuje další neurčity integrál, obsahující integrační konstantu.

Poznámka II.19 (o správné volbě členů). Pro úspěšnou integraci po částech je třeba v (II.16) rozumně zvolit u a v'. Položíme-li, např. v $\int x \cos x \,\mathrm{d}x$ z příkladu II.18 $u(x) = \cos x$, $v'(x) = x$, bude $u'(x) = -\sin x$, $v(x) = \int x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2$ a dostaneme

$$\int x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x,$$

což je výsledek nevyhovující, jelikož ukol výpočtu integrálu $\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$ není nikterak snadnější než původní zadání. Nevhodná volba členů tedy způsobí, že při integraci po částech k zjednodušení původního integrálu nedochází (je zřejmé, že by v tomto případě bylo vhodné člen x právě derivovat, nikoliv integrovat).

Metody integrace po částech lze, samozřejmě, využít i opakovaně.

Příklad II.20. Vypočtěme $\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x$.

Řešení. Vzhledem ke zkušenosti s příkladem II.18 budeme derivovat x^2 (zjednoduší se) a integrovat e^x (umíme to provést). Metodu integrace po částech zde použijeme dvakrát:

$$\overset{\boxed{\substack{u=x^2, \quad v'=e^x \\ u'=2x,\ v=\int e^x \,\mathrm{d}x=e^x}}}{\int} x^2 e^x \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - 2\overset{\boxed{\substack{u=x,\ v'=e^x \\ u'=1,\ v=e^x}}}{\int} x e^x \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x \,\mathrm{d}x\right)$$

$$= x^2 e^x - 2\left(x e^x - e^x\right) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

Integrační konstantu stačí přidat až na konci. □

V některých případech integrace po částech nevede přímo na konečný výsledek, avšak po jejím opakovaném využití obdržíme vztah, jenž lze chápat jako rovnici pro určení hodnoty integrálu.

Příklad II.21. Vypočtěme integrály

$$I(x) = \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x, \quad J(x) = \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x. \tag{II.19}$$

Řešení. Jelikož $(e^x)' = e^x$ a derivace sinu a kosinu jsou, až na znaménko, znovu kosinus nebo sinus, očekáváme, že metodou *per partes* jeden z těchto integrálu převedeme na ten druhý a naopak, přičemž v daném případě není důležité, který z těchto členů budeme derivovat. Vykonáme-li toto dvakrát, dostaneme zase integrál původní a tudíž i vztah pro určení jeho hodnoty. Uvažujme např. $J(x)$ a proveďme *per partes* s $u(x) = \sin x$, $\mathrm{d}v(x) = e^x \,\mathrm{d}x$; pak bude $\mathrm{d}u(x) = \cos x \,\mathrm{d}x$, $v(x) = \int e^x \,\mathrm{d}x = e^x$ a tudíž

$$J(x) = \int \overbrace{\sin x}^{u} \overbrace{e^x \,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}v} = \overbrace{\sin x}^{u} \overbrace{e^x}^{v} - \int \overbrace{e^x}^{v} \overbrace{\cos x \,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}u} = e^x \sin x - I(x). \tag{II.20}$$

Vykonáme-li podobné úpravy s $I(x)$, obdržíme

$$I(x) = \int \overbrace{\cos x}^{u} \overbrace{e^x \,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}v} = \overbrace{e^x}^{u} \overbrace{\cos x}^{v} - \int \overbrace{e^x}^{v} \overbrace{(-\sin x) \,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}u} = e^x \cos x + \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x,$$

což znamená, že $I(x) = e^x \cos x + J(x)$. Odvodili jsme tedy, že pro uvažované integrály platí vztahy

$$I(x) = e^x \cos x + J(x), \quad J(x) = e^x \sin x - I(x),$$

odkud dostaneme $I(x) - J(x) = e^x \cos x + J(x)$, $I(x) + J(x) = e^x \sin x$ a tudíž je

$$I(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C, \quad J(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Přidali jsme na konci integrační konstantu, jelikož integrál neurčitý má zahrnovat všecky primitivní funkce.

Poznamenejme, že, zajímá-li nás pouze jeden z integrálů (II.19), např. $J(x)$, stačí v (II.20) provést integraci po částech ještě jednou, čímž získáme rovnici pro určení $J(x)$. □

§ II.3.2.3. Běžné typy integrálů, jež lze vypočítat integrací po částech

Metodu *per partes* je vhodné použit zejména pro následující často se vyskytující typy integrálů:

§ II.3.2.3$_1$. Integrály $\int p(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)\sin(ax)\,\mathrm{d}x$ a $\int p(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x$

Integrand je ve tvaru součinu polynomu $p(x)$ a funkce, jejíž integrál lze snadno vypočítat. Derivujeme pak ten polynom ($u = p(x)$), v novém integrandu obdržíme polynom nižšího stupně (*per partes* aplikujeme několikrát, až se polynom zderivuje na konstantu). Modelem je příklad II.18.

§ II.3.2.3$_2$. Integrály $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, $\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$

Zde oba dva činitele lze zcela jednoduše integrovat i derivovat. Jelikož $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, vychází, že lze $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ vyjádřit přes $\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$ a naopak. Použijeme-li *per partes* dvakrát (ve stejném směru, abychom se nevrátili na začátek!), obdržíme vztah, jenž lze považovat za rovnici pro určení daného integrálu (příklad II.21).

§ II.3.2.3$_3$. Integrály součinů typů $\int p(x)(\ln x)^m\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)(\operatorname{arctg} x)^m\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)(\operatorname{arcctg} x)^m\,\mathrm{d}x$

Integrály tohoto typu, kde m je přirozené číslo a $p(x)$ je polynom, lze vypočíst integrací po částech (derivujeme člen s $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$). Společným u těchto integrálu je to, že derivace $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ jsou racionální výrazy, kdežto integrálem polynomu je opět polynom. Je-li $m > 1$, integraci po částech provedeme víckrát.

Podobně lze vypočítat $\int p(x)(\arcsin x)^m\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)(\arccos x)^m\,\mathrm{d}x$.

PŘÍKLAD II.22. Vypočtěme $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrací po částech obdržíme

$$\int \overbrace{1}^{v'} \cdot \overbrace{\arcsin x}^{u}\,\mathrm{d}x = \overbrace{x}^{v}\,\overbrace{\arcsin x}^{u} - \int \overbrace{x}^{v}\,\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}^{u'}\,\mathrm{d}x = x\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{t-x^2}}$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1-x^2).$$

Jelikož s $1-x^2 = s$, $-2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$ je

$$\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1-x^2) = \int s^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s = 2s^{\frac{1}{2}} = 2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{II.21}$$

dostaneme

$$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

PŘÍKLAD II.23. Vypočtěme $\int (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Podobně příkladu II.22

$$\int \overbrace{1}^{v'} \cdot \overbrace{(\arcsin x)^2}^{u} \, dx = \overbrace{x}^{v} \, \overbrace{(\arcsin x)^2}^{u} - \int \overbrace{x}^{v} \, \overbrace{\frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}^{u'} \, dx. \tag{II.22}$$

Ve výsledku opět integrujme po částech s $u = \arcsin x$, $v' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$ (to jest tak, aby byl zderivován zase člen s $\arcsin x$); dle (II.21) bude $v = \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, d(1-x^2) = 2\sqrt{1-x^2}$ (s implicitní substitucí $1 - x^2 = s$) a tudíž

$$\begin{aligned} \int \overbrace{\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}^{v'} \, \overbrace{\arcsin x}^{u} \, dx &= \overbrace{2\sqrt{1-x^2}}^{v} \, \overbrace{\arcsin x}^{u} - \int \overbrace{2\sqrt{1-x^2}}^{v} \, \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}^{u'} \, dx \\ &= 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x. \end{aligned}$$

Dosazením do (II.22) dostaneme

$$\int (\arcsin x)^2 \, dx = x \, (\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

§ II.3.3. Metoda integrace s pomocí nové proměnné (substituce)

Metoda integrace s pomocí nové proměnné, jak říká její název, je založena na zavedení nové integrační proměnné, např. t, místo původní proměnné x prostřednictvím určitého vztahu typu $x = \phi(t)$ anebo $t = \psi(x)$ (tzv. substituce). Aplikujeme-li tuto substituci v nějakém integrálu $\int g(x) \, dx$, po vyloučení původní proměnné x z integrandu $g(x)$ a diferenciálu dx dostaneme jiný integrál podle nové proměnné. Substituci lze hodnotit jako úspěšnou, dostaneme-li ve výsledku integrál v nějakém smyslu jednodušší nebo vhodnější pro další úpravy.[12] Po výpočtu pomocného integrálu podle nové proměnné je potřeba se vrátit k proměnné původní.

§ II.3.3.1. Princip integrace s pomocí nové proměnné

Derivujeme-li složený výraz tvaru $F(\phi(t))$, dle řetězového pravidla máme

$$\frac{d}{dt} F(\phi(t)) = F'(\phi(t)) \, \phi'(t).$$

Integrací tohoto vztahu (za předpokladu spojitosti funkcí f, ϕ a ϕ') bezprostředně dostáváme

$$\int f(\phi(t)) \, \phi'(t) \, dt = F(\phi(t)) + C, \tag{II.23}$$

kde $f = F'$. Jelikož F je funkcí primitivní pro f, platí $F(x) = \int f(x) \, dx$ a tudíž lze vztah (II.23) zapsat ve tvaru

$$\int f(\phi(t)) \, \phi'(t) \, dt = \int f(x) \, dx, \tag{II.24}$$

kde v integrálu na pravé straně po jeho výpočtu za x dosadíme $x = \phi(t)$. Připomeneme-li si pojem diferenciálu,[13] můžeme tuto skutečnost vyjádřit názornějším vzorcem

$$\int f(\phi(t)) \, d\phi(t) = \int f(x) \, dx, \tag{II.26}$$

[12] A, samozřejmé, v první řadě, je-li vůbec možné danou substituci korektně provést, to jest jsou-li splněné příslušné podmínky.

[13] Jak již víme z počtu diferenciálního, diferenciálem funkce f v bodě x je výraz

$$d f(x) = f'(x) \, dx. \tag{II.25}$$

jenž je ekvivalentní s (II.24). Shrnutím uvedených úvah obdržíme takovou větu.

VĚTA II.24 (o integrací s pomocí substituce). Buďte f funkce spojitá na intervalu (a,b) a ϕ funkce definovaná na intervalu (α,β) a mající v každém jeho bodě derivaci, přičemž $\phi(t) \in (a,b)$ pro všechna $t \in (\alpha,\beta)$. Potom pro každé $t \in (\alpha,\beta)$ platí uvedené výše rovnice (II.24), (II.26), dosadíme-li na jejich pravých stranách po výpočtu integrálu $x = \phi(t)$.

Toto znamená, že pokud má integrand tvar $f(\phi(t))\,\phi'(t)$ s nějakou diferencovatelnou funkcí ϕ, pak je výsledek jednoduše integrálem z f s dosazeným místo argumentu výrazem $\phi(t)$. Stačí tedy odvodit integrál z f.

Na vzorcích (II.24), (II.26) je založena tzv. *substituční* metoda vypočtu integrálu. Vztah $x = \phi(t)$ vyjadřuje zavedení nové proměnné t s následným výpočtem $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, což objasňuje název metody.

Uveďme jednoduché příklady, kde integrály vypočteme bezprostředně úpravou na vzorec (II.24). Poznamenejme, že ne vždy je potřeba tento vzorec explicitně zapisovat (praktický postup využití metody integrace s pomocí nové proměnné rozebereme v § II.3.3.2).

PŘÍKLAD II.25. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{(\ln t)^2}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Řešení. Jelikož $\frac{1}{t} = (\ln t)'$, je zřejmé, že je integrál ve tvaru $\int f\,(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t$, kde položíme $\phi(t) = \ln t$ a za f vezmeme funkci $s \mapsto s^2$. Dle věty II.24 podle vzorce (II.24) dostaneme

$$\int \frac{(\ln t)^2}{t}\,\mathrm{d}t = \int (\ln t)^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int (\ln t)^2\,(\ln t)'\,\mathrm{d}t = \int s^2\,\mathrm{d}s = \frac{s^3}{3} + C, \tag{II.27}$$

kde C je libovolná konstanta a $s = \ln t$. Konečný výsledek integrace

$$\int \frac{(\ln t)^2}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{(\ln t)^3}{3} + C$$

obdržíme dosazením $s = \ln t$ do (II.27), čímž se vrátíme k původní proměnné t. □

PŘÍKLAD II.26. Vypočtěme $\int \cos^3 t \sin t\,\mathrm{d}t$.

Řešení. Jelikož $\sin t$ je derivací výrazu $-\cos t$, lze napsat

$$\cos^3 t \sin t = \cos^3 t\,(-\cos t)' = -\cos^3 t\,(\cos t)'\,,$$

což má tvar $f(\phi(t))\,\phi'(t)$ s $\phi(t) = \cos t$ a $f(s) = -s^3$. Proto dle věty II.24 je

$$\int \cos^3 t \sin t\,\mathrm{d}t = -\int \cos^3 t\,(\cos t)'\,\mathrm{d}t = -\int s^3\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{4}s^4 + C,$$

kde $s = \cos t$ a C je libovolná konstanta. Integrál je tedy vypočten a zbývá se jen vrátit k původní proměnné t, to jest v získaném výsledku za s dosadit $\cos t$:

$$\int \cos^3 t \sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\cos^4 t + C.$$

Téhož výsledku dosáhneme s využitím vzorce (II.26): položíme-li $\cos t = s$, bude $\mathrm{d}s = \mathrm{d}(\cos t) = -\sin t\,\mathrm{d}t$ a tudíž $\sin t\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}s$ a $\int \cos^3 t \sin t\,\mathrm{d}t = -\int \cos^3 t\,\mathrm{d}(\cos t) = -\int s^3\,\mathrm{d}s$, což vede na již odvozený vzorec. □

Z hlediska výpočtů je zde pohodlné tlumočit výraz „$f'(x)\,\mathrm{d}x$“ jako „$f'(x)\cdot\mathrm{d}x$“. Připomíná to také historické označení derivace: $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, z něhož (II.25) obdržíme formálním vynásobením diferenciálem nezávisle proměnné $\mathrm{d}x$. Z diferenciály se pracuje, v podstatě, stejné jako s odpovídajícími derivacemi.

§ II.3.3.2. Způsoby využití metody substituce

Metody substituce, založené na rovnicích (II.24), (II.26), lze užít dvojím způsobem v závislosti na tom, čtěme-li rovnici zleva doprava nebo opačně.

1. způsob

Máme-li vypočíst integrál, jenž se podařilo upravit na tvar $\int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t$ nebo, což je totéž, $\int f(\phi(t))\,\mathrm{d}\phi(t)$, pak ho s pomocí substituce $\phi(t) = x$ převedeme na integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, v němž pak po výpočtu zpětně dosadíme $x = \phi(t)$. Je-li možné $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ vypočítat, bude úloha integrace vyřešena.

Úspěch tohoto postupu se určuje tím, zda se podaří výraz pod znakem integrálu vyjádřit ve tvaru $f(\phi(t))\,\mathrm{d}\phi(t)$ nalezením vhodné funkce ϕ. Je to obecně nesnadný ukol, vyžadující určité zkušenosti. V některých případech je volba substituce zcela zřejmá (typickým je příklad II.26), v jiných hledání vhodné substituce vyžaduje úsilí.[14]

2. způsob

Máme-li vypočíst integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, můžeme se pokusit najít vhodnou substituci $x = \phi(t)$ tak, aby výsledný integrál podle nové proměnné $\int f(\phi(t))\,\mathrm{d}\phi(t)$ byl v něčem výhodnější než ten výchozí. Jestliže nový integrál dokážeme vypočíst, ve výsledku bude potřeba vykonat zpětnou substituci (vrátit se k původní proměnné x).

Poslední krok se zpětnou substitucí v sobě ukrývá určitou jemnost: ve výsledném integrálu totiž musíme všude vyjádřit t přes x, což není vždy možné, jelikož vykonaná substituce má tvar $x = \phi(t)$. Pro tento případ věta II.24 vyžaduje upřesnění formou dodatečné podmínky, která požadovanou vlastnost zaručí.[15]

VĚTA II.27. Předpokládejme, že ϕ ve větě II.24 zobrazuje (α, β) na (a, b).[16] Pak lze integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ vypočíst s pomocí vzorců (II.24), (II.26), kde vlevo proměnnou t vyjádříme přes x podle rovnice $\phi(t) = x$.

Poznámka II.28. Dodatečná podmínka věty II.27 je jistě splněna, je-li ϕ monotonně rostoucí nebo klesající (pak bude zpětné vyjádření t přes x jednoznačné: $t = \phi^{-1}(x)$; obecně tomu tak být nemusí). Tento případ se v praxi vyskytuje nejčastěji.

Poznámka II.29 (o provedení substituce v praxi). V praxi substituci v integrálu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

provádíme tak, že po zavedení nové proměnné vztahem typu $x = \phi(t)$ (anebo $t = \psi(x)$) původní proměnnou x v integrandu vyjádříme přes novou proměnnou t. Zároveň vyjádříme diferenciál $\mathrm{d}x$ přes $\mathrm{d}t$: je-li $x = \phi(t)$, bude $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$; pro substituci typu $t = \psi(x)$ zapíšeme $\mathrm{d}t = \psi'(x)\,\mathrm{d}x$, kde v $\psi'(x)$ rovněž vyjádříme x přes t (v tomto kroku v konkretních

[14] My se však vesměs zaměříme na některé typické a často se vyskytující případy, kde vhodnou substituci určíme vždy relativně snadno. Dále probereme i zajímavější příklady, v nichž nalezení substituce vyžaduje jistou invenci.

[15] Podrobnější vysvětlení lze nalézt v [1], kap. III, § 4.

[16] Toto znamená, že (a, b) je *právě* množinou všech hodnot $\phi(t)$ pro $t \in (\alpha, \beta)$, to jest pro každý bod $x \in (a, b)$ platí $x = \phi(t)$ s nějakým $t \in (\alpha, \beta)$. Taková zobrazení se nazývají surjekce.

případech může být výhodnější postupovat trochu jinak; pozorně se podívejte na příklad II.37). Oboji pak formálně dosadíme do $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Po výpočtu se má provést substituce zpětná.

Samotná volba substituce je otázkou zkušenosti a v nemalé míře rovněž intuice. Pro vhodnost substituce $x = \phi(t)$ může hovořit přítomnost v integrálu výrazu $\phi'(t)\,\mathrm{d}t$ nebo podobných členů.

PŘÍKLAD II.30. Vypočtěme integrál $\int (5x-2)^{30}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Položíme-li $5x-2=t$, dostaneme $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(5x-2) = 5\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,\mathrm{d}t$ a proto

$$\int (5x-2)^{30}\,\mathrm{d}x = \int t^{30}\frac{1}{5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\int t^{30}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\frac{t^{31}}{31} + C = \frac{1}{155}(5x-2)^{31} + C.$$

Poznamenejme, že užití substituce nám ušetřilo značné úsilí, jež bychom museli vynaložit při výpočtu tohoto integrálu roznásobením závorky a integrací jednotlivých členů příslušného polynomu stupně 30: $\int (5x-2)^{30}\,\mathrm{d}x = \int (5^{30}\cdot x^{30} + \dots)\,\mathrm{d}x$ atd. □

§ II.3.3.2$_1$. Případ lineární substituce

V praxi zvláště často potkáme integrály typu

$$\int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x,$$

kde $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$ dovedeme vypočíst.[17] Takovýto integrál snadno vypočteme s pomocí lineární substituce $\alpha x + \beta = t$, $\alpha\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}t$:

$$\int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}F(t) + C = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C.$$

Důvod pro zvolení této lineární substituce je zřejmý: diferenciály původní a nové proměnných se liší jen konstantním činitelem.

§ II.3.3.2$_2$. Příklady integrace s pomocí nové proměnné

Princip metody substituční si lépe vysvětlíme, když s jeho využitím vypočteme několik konkretních integrálů.

PŘÍKLAD II.31. Vypočtěme integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$, kde $a > 0$.

Řešení. V běžných tabulkách vidíme vzorec pro jiný, avšak podobný integrál:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x. \qquad \text{(II.28)}$$

Zkusme původní integrál upravit tak, aby se dal použít vzorec (II.28). Máme:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}. \qquad \text{(II.29)}$$

Zaveďme v (II.29) novou proměnnou

$$t = \frac{x}{a}. \qquad \text{(II.30)}$$

[17] S tímto se setkáváme téměř v každém běžném integrálu; viz např. příklady II.30, II.31, II.36.

Pak dle (II.25) bude $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\frac{1}{a}x\right) = \left(\frac{1}{a}x\right)' \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x$, to jest $\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x$, odkud dostaneme vyjádření diferenciálu původní proměnné x přes diferenciál nové proměnné t:

$$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t. \tag{II.31}$$

Dosadíme-li (II.30) a (II.31) do (II.29):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{a}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

s využitím vztahů (II.28), (II.30) ihned obdržíme výsledek:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \tag{II.32}$$

Vykonaný výpočet je typickým příkladem využití lineární substituce (§ II.3.3.2$_1$). □

PŘÍKLAD II.32. Vypočtěme $\int \frac{x^2}{3x^3+5}\,\mathrm{d}x$.

Řešení II.32.1. Čitatel x^2 připomíná derivaci výrazu x^3, proto lze zkusit $t = x^3$, $\mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x$, $x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{x^2}{3x^3+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3t+5}\,\mathrm{d}t.$$

V posledním integrálu položíme $3t+5 = s$, $\mathrm{d}s = 2\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}s$, což dává $\int \frac{1}{3t+5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\ln|s|$. Pak po zpětných substitucích dostaneme

$$\int \frac{x^2}{3x^3+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3t+5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\ln|s| + C = \frac{1}{9}\ln|3t+5| + C = \frac{1}{9}\ln|3x^3+5| + C.$$

Řešení II.32.2. Po zpětném pohledu na řešení II.32.1 je zřejmé, že se výpočet zjednoduší, zavedeme-li novou proměnnou vzorcem $3x^3+5 = t$. Pak $\mathrm{d}t = 9x^2\,\mathrm{d}x$, $x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{x^2}{3x^3+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\ln|t| + C = \frac{1}{9}\ln|3x^3+5| + C.$$

PŘÍKLAD II.33. Vypočtěme $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Položíme-li $x-1 = t$, bude $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $x = t+1$,

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Integraci racionální funkce jsme tedy zredukovali na integraci součtu několika mocninných funkcí:

$$\frac{(t+1)^3}{t^2} = \frac{t^3+1+3t+3}{t^2} = t + \frac{1}{t^2} + \frac{3}{t} + 3, \tag{II.33}$$

a tudíž bude

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{t} + 3\ln|t| + 3t = \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1}{x-1} + 3\ln|x-1| + 3(x-1).$$

Poznamenejme, že výpočet (II.33) je poněkud přehlednější, než bezprostřední dělení polynomů x^3 a $(x-1)^2$. □

V následující úloze odvodíme vzorec, jehož se v praxi užívá velmi často, aniž by byl explicitně zmíněn (je však součástí některých tabulek).

ÚLOHA II.34. Budiž funkce f, nenabývající hodnoty 0 a mající v nějakém intervalu (a, b) spojitou derivaci. Dokažme na (a, b) vzorec

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C, \tag{II.34}$$

kde C je libovolná konstanta.

Řešení. Je zde zřejmá volba substituce $t = f(x)$; pak bude $\mathrm{d}t = f'(x)\,\mathrm{d}x$ a tudíž $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t|$. □

PŘÍKLAD II.35. Vypočtěme integrály

$$I(x) = \int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x, \quad J(x) = \int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x. \tag{II.35}$$

Řešení II.35.1. Vzhledem k definičnímu oboru logaritmu má smysl integrály uvažovat pouze pro $x > 0$, což nadále předpokládáme. Vykonejme substituci $\ln x = t$; pak $x = e^t$ (uvažujeme kladná x) a $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$:

$$\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \int e^t \sin t\,\mathrm{d}t, \quad \int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \int e^t \cos t\,\mathrm{d}t.$$

Využijeme-li teď výsledků příkladu II.21, obdržíme

$$\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C, \tag{II.36}$$

$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C. \tag{II.37}$$

Řešení II.35.2. Lze využit metody *per partes* i bezprostředně v (II.35):

$$I(x) = \int 1 \cdot \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - J(x),$$

$$J(x) = \int 1 \cdot \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + \int x\sin(\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + I(x),$$

což dává

$$J(x) + I(x) = x\sin(\ln x), \quad J(x) - I(x) = x\cos(\ln x). \tag{II.38}$$

Vztah (II.38) můžeme vyřešit jako lineární nehomogenní soustavu vzhledem k $J(x)$ a $I(x)$. Ve výsledku po přidání integrační konstanty obdržíme vzorce (II.36), (II.37). □

§ II.3.3.2$_3$. Technika zavedení do diferenciálu

Jedná se pouze o poněkud jinou podobu vypočtu dle § II.3.3.1, když se substituce provádí implicitně (nezapisujeme ji). Touto technikou pro jednodušší substituce (zejména pro substituci lineární) docílíme kratšího zápisu. Praktický postup je zřejmý z příkladů.

PŘÍKLAD II.36. Pro $\int e^{ax}\,\mathrm{d}x$, kde $a \neq 0$, máme

$$\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int e^{ax}\,\mathrm{d}(ax) = \frac{1}{a}e^{ax} + C.$$

Vykonaná úprava znamená, že integrál přepíšeme na tvar $\int f(\psi(x))\,\mathrm{d}\psi(x)$ a v duchu vypočteme $\int f(s)\,\mathrm{d}s$, v němž ihned dosadíme $s = \psi(x)$. Tímto způsobem např. výpočet integrálu (II.29) z příkladu II.31 zapíšeme stručněji takto:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2} \cdot a \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

substituce $at = x$ je totiž dosti jednoduchá a můžeme ji provést implicitně s použitím (II.25), aniž bychom ji explicitně zapisovali. Takto operovat s diferenciály je pohodlné i v mnoha jiných případech.

PŘÍKLAD II.37. Vypočtěme integrál

$$\int xe^{-3x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Je zřejmé, že $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}(-3x^2) = -3 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = -6x\,\mathrm{d}x$, odkud $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\,\mathrm{d}(-3x^2)$. Pak bude[18]

$$\int e^{-3x^2} x\,\mathrm{d}x = \int e^{-3x^2}\left(-\frac{1}{6}\right)\mathrm{d}(-3x^2) = -\frac{1}{6}\int xe^{-3x^2}\,\mathrm{d}(-3x^2) = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C.$$

Poznamenejme, že zde bylo z praktického hlediska vhodné pro vyloučení proměnné x vyjádřit rovnou výraz $x\,\mathrm{d}x$, nikoliv zvlášť x a $\mathrm{d}x$. Jinak bychom museli vyjádřit x přes t: $x^2 = -\frac{1}{3}t$, $x = \pm\sqrt{-\frac{t}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-t}$ a použít tento vztah pro výpočet diferenciálu $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}\left(\sqrt{-t}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{-t}\right)'\mathrm{d}t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{-t}}(-1)\,\mathrm{d}t,$$

kde znaménko v $\pm$ bereme stejné jako ve vzorci pro x. Pak bude

$$x\,\mathrm{d}x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-t}\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{-t}}\right)(-1)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\,\mathrm{d}t,$$

což jsme již dříve odvodili mnohem rychleji. Tento výpočet je však zcela zbytečný, neboť jsme potřebovali vyjádření pouze pro výraz $x\,\mathrm{d}x$ (jiné členy v integrálu totiž nejsou). □

§ II.4. Integrace některých často se vyskytujících typů funkcí

Uveďme několik nejrozšířenějších typů integrálu, pro něž lze formulovat jistý obecný postup výpočtu. Jedná se zejména o integrál racionální lomené funkce a některé integrály, jež se na něj dají převést.

§ II.4.1. Integrál racionální lomené funkce

Jsou to integrály tvaru

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

kde p je polynom stupně n a q je polynom stupně m (takový integrand se nazývá racionální lomenou funkcí). Není-li funkce ryze lomená (to jest $n \geq m$), integrand dělením polynomů upravíme na součet polynomu a ryze lomené funkce. Polynomy se integrují velice snadno a tudíž stačí rozebrat pouze případ ryze lomené funkce, když platí $n < m$.

---

[18] Provádíme-li odpovídající substituci explicitně, vychází $t = -3x^2$, $\mathrm{d}t = -6x\,\mathrm{d}x$, $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\,\mathrm{d}t$,

$$\int e^{-3x^2} x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int e^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}e^t + C = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C.$$

§ II.4.1.1. Integrace ryze lomené funkce

Pro integraci ryze lomené funkce dle věty I.16 vypočítáme její rozklad na součet parciálních zlomků,[19] jejichž integrály buď jsou tabulkové nebo se dají na tabulkové zredukovat (podrobněji viz § II.4.1.2). Připomeneme si princip rozkladu na parciální zlomky.

Tvrzení II.38. Vyjádříme-li jmenovatel $q(x)$ ve tvaru součinu výrazů typu $(x-c)^k$ a $(x^2+\alpha x+\beta)^k$ (kde $\alpha^2 < 4\beta$), rozkladem podílu $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parciální zlomky bude součet výrazů typu $\frac{D_1}{x-c} + \frac{D_2}{(x-c)^2} + \dots \frac{D_k}{(x-c)^k}$, odpovídajících každému výskytu v rozkladu členu $(x-c)^k$, a výrazů typu $\frac{A_1x+B_1}{x^2+\alpha x+\beta} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, jež odpovídají členům $(x^2+\alpha x+\beta)^k$.
Koeficienty se v různých parciálních zlomcích liší a jejich hodnoty je třeba vypočítat z podmínky, že všechny vypsané členy mají v součtu dávat původní funkci (převedeme vše na společného jmenovatele a zajistíme, aby byl čitatel rovný $p(x)$).

Dovedeme-li nalézt kořeny polynomu ve jmenovateli ryze lomeného výrazu, jeho integraci pomocí tvrzení II.38 můžeme vždy zredukovat na integraci parciálních zlomků.

Příklad II.39. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}.$$

Řešení. V příkladě I.13 jsme odvodili,[20] že pro integrand platí rozklad (I.19) a tudíž

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.\end{aligned} \tag{II.39}$$

Vzorec (II.39) platí v intervalech, neobsahujících body 1 a -1. Pak dle (II.39)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} = \frac{1}{a}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{x}{a}+1}\right| = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$$

Poslední rovnost platí v intervalech, neobsahujících a a $-a$. Dokázali jsme tedy vzorec (II.14) z tabulky II.1. □

Příklad II.40. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}.$$

Řešení. Jedná se o integraci ryze lomené funkce, využijme tedy rozkladu integrandu na parciální zlomky dle tvrzení II.38. Rozklad polynomu ve jmenovateli na součin reálných kořenových činitelů je $(x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ a proto dle tvrzení II.38 lze zvolit příslušné konstanty tak, aby platilo

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

---

[19] *Parciální zlomky* jsou nejjednodušší ryze lomené funkce typů $\frac{A}{(x-c)^k}$ nebo $\frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, kde $k = 1, 2, \dots$ a polynom $x^2+\alpha x+\beta$ má záporný diskriminant (to jest $\alpha^2-4\beta < 0$); viz § I.3.2.

Poznamenejme, že jmenovatelé $(x-c)^k$ a $(x^2+\alpha x+\beta)^k$ zde popisují všechny možné typy členů v rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů, když ho zapisujeme bez použití komplexních čísel.

[20] Mohli bychom, samozřejmé, i bezprostředně rozložit na parciální zlomky $\frac{1}{x^2-a^2}$.

Po převedení výrazů vpravo na společného jmenovatele obdržíme, že pro všechna x musí být

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1). \tag{II.40}$$

Dosadíme-li[21] do této rovnosti kořeny jmenovatele $x = 1$ a $x = -1$, obdržíme rovnice $1 = 4A$, $1 = -4B$, odkud ihned $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Zbývá tedy určit hodnoty C, D.

Jelikož to, že pro všechna x platí (II.40), znamená rovnost dvou polynomů, musí tyto polynomy mít stejné koeficienty. U polynomu na pravé straně rovnice (II.40) koeficient u x^0 je $A - B + D$ a koeficient u x^1 je $A + B - C$ (je-li členů více, můžeme pro pohodlí tohoto výpočtu závorky roznásobit). Na levé straně (II.40) však je konstanta 1, což je polynom stupně 0. Proto musí být $A - B + D = 0$, $A + B - C = 0$. Dosadíme-li již vypočtené hodnoty A, B, dostaneme $\frac{1}{2} + D = 0$, $-C = 0$ a tudíž $D = -\frac{1}{2}$, $C = 0$. V rozkladu na parciální zlomky (II.40) jsou tedy známy všecky koeficienty, což umožňuje integrál převést na součet jednodušších integrálů

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{x^4-1} &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.\end{aligned}$$

Poznamenejme, že místo shrnutí členů se stejnou mocninou bychom mohli rovnice pro C, D obdržet dosazením do (II.40) nějakých čísel, i když další reálné kořeny jmenovatele k dispozici nemáme (žádné členy s kořenovými činiteli v tomto případě nezmizí). Např. při $x = 2$ bude $1 = 15A + 5B + 3(2C + D)$. Dosazením 0 vždy dostaneme rovnost konstantních členů; zde bude $1 = A - B - D$, pročež $D = A - B - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. Dosadíme-li nalezené A, B, D do předchozí rovnice, dostaneme $1 = \frac{5}{2} + 6C - \frac{3}{2}$, $C = 0$. $\square$

Poznámka II.41 (o způsobu určení neznámých koeficientů u parciálních zlomků). Koeficienty vždy můžeme vypočíst tak, že přirovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin na obou stranách rovnosti (v případe, kdy polynom ve jmenovateli má komplexní kořeny, se tomu nevyhneme; viz např. příklad II.44). Dosazení kořenů jmenovatele výpočet urychluje (typickým je příklad II.40).

§ II.4.1.2. Integrace parciálních zlomků

Podle hořejšího lze výpočet integrálu ryze lomené funkce převést na integraci příslušných parciálních zlomků, dokážeme-li rozložit jmenovatel na součin kořenových činitelů; pak lze považovat úlohu integrace za vyřešenou. Je tedy potřeba umět integrovat jednotlivé parciální zlomky.

§ II.4.1.2$_1$. Parciální zlomky 1. druhu

Integrace parciálních zlomků 1. druhu $\frac{A}{(x-c)^k}$ (definice I.14) je vždy jednoduchá:

$$\int \frac{A}{(x-c)^k}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} A\ln|x-c| & \text{pro } k = 1; \\ A\int (x-c)^{-k}\,\mathrm{d}(x-c) = \frac{A}{1-k}(x-c)^{1-k} & \text{pro } k > 1. \end{cases}$$

§ II.4.1.2$_2$. Parciální zlomky 2. druhu

U parciálních zlomků 2. druhu $\frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, bývá integrace technicky složitější, ovšem také je vždy možná. V praxi zvláště často potkáváme rozklady na parciální zlomky, skládající se z členů typů $\frac{A}{(x-c)^k}$ a $\frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}$.

[21] Jelikož má daný vztah platit pro *všechna* x, pak zcela jistě i pro kořeny polynomu ve jmenovateli. Dosazení těchto kořenů je výhodné, samozřejmě, proto, že se takto odstraní všechny členy s příslušnými kořenovými činiteli.

Případ $k = 1$

Jedná se o parciální zlomek $\frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}$, kde je diskriminant polynomu $x^2+\alpha x+\beta$ záporný:[22] $\alpha^2 < 4\beta$ a polynom proto lze převést na tvar součtu čtverců. Standardními úpravami dostaneme[23]

$$x^2 + \alpha x + \beta = (x+\xi)^2 + \eta^2,$$

kde je $\xi = \frac{1}{2}\alpha$, $\eta = \sqrt{\beta - \frac{1}{4}\alpha^2}$, a integrál zapíšeme ve tvaru

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Ax+B}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ve jmenovateli je polynom kvadratický a v čitateli — polynom lineární. Upravme tedy lomený výraz tak, aby v čitateli vznikla derivace jmenovatele $\big((x+\xi)^2+\eta^2\big)' = 2(x+\xi) = 2x+\alpha$:

$$\frac{Ax+B}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \frac{A}{2}\frac{2x+\frac{2B}{A}}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \frac{A}{2}\frac{2x+\alpha+\frac{2B}{A}-\alpha}{(x+\xi)^2+\eta^2}.$$

Při integrací dostaneme součet dvou integrálů

$$\int \frac{Ax+B}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x + \frac{A}{2}\left(\frac{2B}{A}-\alpha\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\xi)^2+\eta^2},$$

přičemž dle příkladů II.34, II.31 obojí dovedeme vypočítat:

$$\int \frac{2x+\alpha}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\big((x+\xi)^2+\eta^2\big)'}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x = \ln\big((x+\xi)^2+\eta^2\big)$$

a

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \int \frac{\mathrm{d}(x+\xi)}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \frac{1}{\eta}\operatorname{arctg}\frac{x+\xi}{\eta}.$$

Integrál $\int \frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x$ tedy je lineární kombinací členů s logaritmem jmenovatele a arcus tangens posunutého argumentu.

Případ $k > 1$

V případě, když $k > 1$, je výpočet integrálu $\int \frac{Ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,\mathrm{d}x$ technicky složitější (pro komplikované výpočty se takovými případy zabývat nebudeme; vzorce však lze dle potřeby nalézt v literatuře).

Výpočet takového integrálu lze provést tak, že podobně předchozímu případu přepíšeme kvadratický polynom ve jmenovateli na součet čtverců

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Ax+B}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\alpha\right)^2+\eta^2\right)^k}\,\mathrm{d}x,$$

[22] V opačném případě bychom dovedli tento polynom dále rozložit na součin reálných kořenových činitelů a tím úlohu zredukovat na předchozí případ parciálních zlomků 1. druhu.

[23] $x^2+\alpha x+\beta = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\alpha+\beta = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\alpha^2+\beta-\frac{1}{4}\alpha^2 = \left(x-\frac{1}{2}\alpha\right)^2+\beta-\frac{1}{4}\alpha^2.$

kde $\eta = \sqrt{\beta - \frac{1}{4}\alpha^2}$, a vykonáme substituci $x + \frac{1}{2}\alpha = t$, počemž dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax + B}{\left(\left(x + \frac{1}{2}\alpha\right)^2 + \eta^2\right)^k}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{At + B - \frac{1}{2}\alpha A}{\left(t^2 + \eta^2\right)^k}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{A}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2 + \eta^2)}{\left(t^2 + \eta^2\right)^k} + \left(B - \frac{1}{2}\alpha A\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2 + \eta^2\right)^k},\end{aligned}$$

kde první z integrálů se vypočte snadno[24] a ten druhý je shodný s $I_k(t)$ z úlohy II.42.

Úloha II.42. Dokažme, že pro integrály

$$I_k(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^k}, \tag{II.41}$$

kde k je přirozené číslo, platí rekurentní formule

$$I_{k+1}(x) = \frac{2k - 1}{2ka^2} I_k(x) + \frac{x}{2ka^2(x^2 + a^2)^k}. \tag{II.42}$$

Řešení. Při $k = 1$ máme integrál z příkladu II.31. Budiž $k > 1$. Integrací po částech obdržíme

$$\begin{aligned}I_k(x) &= \int \overbrace{(x^2 + a^2)^{-k}}^{u} \cdot \overbrace{1}^{v'}\,\mathrm{d}x = \overbrace{\frac{1}{(x^2 + a^2)^k}}^{u}\,\overbrace{x}^{v} - \int \overbrace{\left(-2kx\left(x^2 + a^2\right)^{-k-1}\right)}^{u'}\,\overbrace{x}^{v}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2k\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2 + a^2)^k xf} + 2k\int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2k\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^k}\,\mathrm{d}x - 2ka^2\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

což vzhledem k (II.41) znamená, že platí

$$I_k(x) = \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2kI_k(x) - 2ka^2 I_{k+1}.$$

Z tohoto vztahu úpravou obdržíme rekurentní vzorec (II.42). □

Důsledek II.43. Platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2\left(x^2 + a^2\right)}.$$

Důkaz. Uvažovaným integrálem je $I_2(x)$. Z formule (II.42) při $k = 1$ dostaneme

$$I_2(x) = \frac{1}{2a^2} I_1(x) + \frac{x}{2a^2\left(x^2 + a^2\right)},$$

a zbývá jen využít vzorce (II.32) pro $I_1(x)$. □

§ II.4.2. Integrály typu $\int R(\cos x, \sin x)$, kde R je racionální lomená funkce

Integrály, v nichž integrand je lomenou funkcí členů $\cos x$ a $\sin x$:

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x, \tag{II.43}$$

lze vždy převést na integrál racionální lomené funkce nebo v určitých případech i vypočíst s pomocí elementárních úprav integrandu.

---

[24]Dle vzorce pro integraci mocninné funkce bude $\int \left(t^2 + \eta^2\right)^{-k} \mathrm{d}(t^2 + \eta^2) = \frac{1}{1-k}(t^2 + \eta^2)^{1-k}$.

§ II.4.2.1. Univerzální trigonometrická substituce

Pro integrály tvaru (II.43), kde R je racionální lomenou funkcí podle každého z argumentů, lze využit *univerzální trigonometrické substituce*

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \tag{II.44}$$

kde t značí novou proměnnou.[25]

Pro vykonání v integrálu (II.43) substituce (II.44) musíme získat vyjádření $\sin x$, $\cos x$ přes t a $\mathrm{d}x$ přes $\mathrm{d}t$. Jelikož (II.44) je ekvivalentní s rovností $x = 2\operatorname{arctg} t$, pro diferenciály platí vztah[26] $\mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Vzhledem k tomu, že platí

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = 2\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

integrál tak převedeme na integrál racionální lomené funkce, a to pomocí následujících vzorců.

Vzorce pro vykonání univerzální trigonometrické substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}. \tag{II.45}$$

Z (II.45) ihned plyne, že[27] $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$, $\sec x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ a $\csc x = \frac{1+t^2}{2t}$, to jest po zavedení nové proměnné t substitucí (II.44) převedeme všecky výskyty trigonometrických funkcí v integrandu na racionální lomené výrazy proměnné t, přičemž podobný výraz vznikne i po přepočtu diferenciálu. Po vypočtu upraveného integrálu použijeme (II.44) a vrátíme se k původní proměnné x.

PŘÍKLAD II.44. Vypočtěme

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Použijeme-li substituci (II.44), podle vzorců (II.45) obdržíme

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} - 1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{2t-(1+t^2)}{1-t^2+2(1+t^2)}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= -2\int \frac{t^2-2t+1}{3+t^2}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -2\int \frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t.$$

V integrandu je ryze lomená funkce, již můžeme dále rozložit na součet příslušných parciálních zlomků (§ I.3.2):

$$\frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+3} = \frac{(At+B)(t^2+3)+(Ct+D)(t^2+1)}{(t^2+1)(t^2+3)}.$$

Potřebujeme tedy, aby pro libovolné t platilo

$$(At+B)(t^2+3)+(Ct+D)(t^2+1) = t^2-2t+1.$$

[25] Samozřejmě, v příslušném oboru: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, přičemž vždy vyloučíme nulové body jmenovatele.

[26] Tentýž vztah lze obdržet i přímo z (II.44): $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)\mathrm{d}x$.

[27] Připomeňme, že funkce sekans a kosekans se definují vzorci $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$.

Přirovnáním koeficientů u t^0, t^1, t^2 a t^3 obdržíme podmínky[28]

$$3B + D = 1, \qquad 3A + C = -2, \qquad B + D = 1, \qquad A + C = 0,$$

odkud vypočítáme $A = -1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 1$. Pak

$$\begin{aligned}-2\int \frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t &= -2\int \frac{-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - 2\int \frac{t+1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{2t}{t^2+3}\,\mathrm{d}t - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}.\end{aligned}$$

Máme $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$, $\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{t^2+1} = \ln(t^2+1)$, $\int \frac{2t}{t^2+3}\,\mathrm{d}t = \ln(t^2+3)$, až na aditivní konstantu, jíž k výsledku přidáme později. Potom

$$\begin{aligned}-2\int \frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t &= \ln(t^2+1) - \ln(t^2+3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\\ &= \ln\frac{t^2+1}{t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned} \tag{II.46}$$

Teď již zbývá jenom dosadit do (II.46) vyjádření t přes x ze substituce (II.44) a přidat integrační konstantu. Ve výsledku dostaneme:[29]

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + K, \tag{II.48}$$

kde K je integrační konstanta. □

Využijeme-li metody integrace s pomocí nové proměnné, volba způsobu jejího zavedení, samozřejmě, není jednoznačná. Pro nalezení hodnoty integrálu tedy mohou existovat různé cesty, přičemž i konečný výsledek lze často zapsat různými způsoby a může se stát, že pro určitý účel některé z těchto způsobů mohou být pohodlnější. Ukažme to na příkladě integrálu typu (II.43).

PŘÍKLAD II.45. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}.$$

Uveďme tři způsoby řešení (všimněme si různých tvarů výsledků!).

Řešení II.45.1. Integrand je racionální funkcí výrazu $\cos x$ a tudíž lze využit obecnou trigonometrickou substituci $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (§ II.4.2.1). Dle vzorců (II.45) obdržíme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

---

[28]První podmínku, jež odpovídá koeficientům u t^0, lze vždy odvodit také dosazením hodnoty $t = 0$.

[29]Často se stává, že výsledky integrace při použiti poněkud odlišných úprav se zdánlivě liší. Např. všimneme-li si, že dle (II.44) $t^2 + 1 = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$, obdržíme

$$\ln\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3} = \ln\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+2} = \ln\frac{1}{1+2\cos^2\frac{x}{2}} = \ln 1 - \ln\left(1+2\cos^2\frac{x}{2}\right) = -\ln(\cos x + 2)$$

a proto lze výsledek integrace (II.48) přepsat do tvaru

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos x + 2) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + K. \tag{II.47}$$

Integrál $\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$ byl vypočten v příkladě II.39, použijme proto již odvozený vzorec (II.39):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = 2\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}\right| + C$$
$$= \ln\left|\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}\right| + C$$
$$= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x\right| + C.$$

Řešení II.45.2. Po vynásobení čitatele a jmenovatele členem $\cos x$ vzniká nápad zavést novou proměnnou vztahem $s = \sin x$ (jelikož $R(u, v) = 1/u$ je lichou funkcí podle u, tuto substituci doporučuje i úvaha II.46, § II.4.2.2$_1$):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}s}{1-s^2}.$$

Pro poslední integrál použijme (II.39):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln|\sin x - 1| - \frac{1}{2}\ln|\sin x + 1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C.$$

Řešení II.45.3. Jiný způsob je založen na vzorcích $\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ a $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{1}{\cos x}\,\frac{\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x\right)}{\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x} = \ln\left|\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x\right| + C = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

§ II.4.2.2. Speciální případy

§ II.4.2.2$_1$. Speciální trigonometrické substituce

Užití univerzální substituce (II.44) je zpravidla spojeno s pracnějším výpočtem a proto je vhodné se napřed zamyslet, zda není možné integrál vypočíst snadněji. Často je užitečná následující rada.

ÚVAHA II.46. Je-li integrál ve tvaru (II.43), kde R je racionální lomená funkce dvou argumentů, mající jednu z vlastností:

$$R(-u, v) = -R(u, v), \quad R(u, -v) = -R(u, v), \quad R(-u, -v) = R(u, v) \tag{II.49}$$

pro všechna (u, v), pak lze pro integraci využít jedné ze substitucí $t = \sin x$, $t = \cos x$ resp. $t = \operatorname{tg} x$.

Vysvětlení. V prvních dvou případech se jedná o úpravu integrálu na tvary

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{R(\cos x, \sin x)}{\cos x}\,\overbrace{\cos x\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}(\sin x)}, \tag{II.50}$$

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{R(\cos x, \sin x)}{\sin x}\,\overbrace{(-\sin x)\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}(\cos x)}. \tag{II.51}$$

Vskutku, je-li $R(u,v)$ lichá podle u, můžeme napsat $R(u,v) = \frac{R(u,v)}{u} u$, kde je funkce $u \mapsto \frac{R(u,v)}{u}$ sudá (vzhledem k lichosti druhého činitele). Toto znamená, že racionální lomený výraz $\frac{R(u,v)}{u}$ smí obsahovat pouze sudé mocniny u. Výraz $\frac{R(\cos x, \sin x)}{\cos x}$ tedy obsahuje $\cos x$ jen v sudých mocninách a tudíž lze v něm $\cos x$ racionálně vyjádřit přes $\sin x$ s pomocí vzorce $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. V (II.50) pak uděláme substituci $\sin x = t$.

Je-li $R(u,v)$ lichá podle v, lze postupovat podobným způsobem: využijeme úpravy (II.51) a položíme $\cos x = t$; dostaneme pak integrál racionální lomené funkce proměnné t.

Budiž nyní R taková, že

$$R(-u,-v) = R(u,v) \tag{II.52}$$

pro všechna u, v, což znamená, že se hodnota $R(u,v)$ nemění, změníme-li zároveň u u a u v znaménka na opačná. V tomto případě zvolme jednu z těchto proměnných, např. v, a vytknutím podílu $\frac{v}{u}$ vyjádřeme všecky její mocniny $m_1, m_2, \ldots$, jež se v $R(u,v)$ vyskytují, takto: $v^{m_1} = \left(\frac{v}{u} u\right)^{m_1} = \left(\frac{v}{u}\right)^{m_1} u^{m_1}$ atd. Obdržíme tak racionální výraz, obsahující pouze mocniny podílu $\frac{v}{u}$ a proměnné u, to jest

$$R(u,v) = R_0\left(u, \frac{v}{u}\right),$$

kde R_0 značí jistý racionální lomený výraz dvou proměnných. Jelikož vzhledem k vlastnosti (II.52) platí

$$R_0\left(-u, \frac{v}{u}\right) = R_0\left(-u, \frac{-v}{-u}\right) = R(-u,-v) = R(u,v) = R_0\left(u, \frac{v}{u}\right),$$

je R_0 sudá podle druhého argumentu a tudíž všecky mocniny proměnné u v $R_0\left(u, \frac{v}{u}\right)$ jsou sudé. Toto znamená, že všecky členy v $R(\cos x, \sin x)$ lze racionálně vyjádřit přes mocniny výrazu $\frac{\sin x}{\cos x}$ a sudé mocniny $\cos x$. Zavedeme-li substituci $t = \operatorname{tg} x$, bude $\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$, přičemž $\cos^2 x$ a další sudé mocniny kosinu lze vyjádřit přes t s pomocí vzorce $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Podobně lze využít substituce $t = \operatorname{cotg} x$. □

Poznámka II.47. Je zajímavé, že vlastnosti, uvedené v (II.49), ve skutečnosti pokrývají všecky možné případy, neboť libovolnou racionální lomenou funkci R lze rozložit na součet lomených funkcí, splňujících jednotlivé podmínky z (II.49):

$$R(u,v) = \frac{R(u,v) - R(-u,v)}{2} + \frac{R(-u,v) - R(-u,-v)}{2} + \frac{R(-u,-v) + R(u,v)}{2}. \tag{II.53}$$

Pro výpočet integrálu (II.43) tedy vystačí tři speciální substituce z úvahy II.46. Univerzální trigonometrická substituce (II.44) je využitelná v každém z případů.

Substituce, doporučená úvahou II.46, může být vhodnější než univerzální trigonometrická substituce (II.44).

PŘÍKLAD II.48. Vypočtěme integrál

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x.$$

Řešení II.48.1. Využití univerzální substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ dle vzorců (II.45) vede na integrál

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \frac{8t^3}{(1+t^2)^3} \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 16 \int \frac{t^3\left(1-t^2\right)^2}{(1+t^2)^6}\,\mathrm{d}t.$$

Dostáváme tedy integrál neryze lomené funkce, přičemž i po vyčlenění ryze lomené části zůstává úloha výpočetně náročnou jakožto integrace parciálního zlomku s vysokým stupněm jmenovatele bez reálných kořenů. Zkusme proto raději najít jinou cestu.

Řešení II.48.2. Daný integrál má tvar (II.43) s $R(u,v) = u^2v^3$. Funkce R je lichá podle v a tudíž dle úvahy II.46 použijme substituci $t = \cos x$. Dostaneme $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$, $+\sin x = -\mathrm{d}t$,

$$\int \cos^2 x \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x \sin^2 x \overbrace{\sin x\,\mathrm{d}x}^{-\mathrm{d}t} = -\int t^2\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t = \int t^4\,\mathrm{d}t - \int t^2\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x,$$

což je výrazné jednodušší než příslušná integrace v řešení II.48.1. □

Uvedená výše úvaha II.46 tedy může navrhnout postup vhodnější než využití obecné trigonometrické substituce. Avšak ani toto řešení nemusí být vždy optimální; při integrací bychom měli, pokud možno, zvažovat různé možnosti, z nichž zvolíme tu nejpohodlnější.

PŘÍKLAD II.49. Vypočtěme integrál

$$\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení II.49.1. Využijeme-li univerzální trigonometrické substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ pro $-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, dle vzorců (II.45) obdržíme

$$\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^4 \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\int \frac{\left(1-t^2\right)^4}{\left(1+t^2\right)^5}\,\mathrm{d}t,$$

čímž zadání zredukujeme na výpočet integrálu racionální lomené funkce. Funkce je navíc ryze lomená a tudíž lze aplikovat postup z § II.4.1. Jedná se však o technicky složitější případ, vyžadující hodně únavných výpočtů (jmenovatel má jen imaginární kořeny, a to vysoké násobností). Je tedy vhodné zkusit pohledat nějaké jiné řešení.

Řešení II.49.2. Funkce $u \mapsto u^4$ je sudá. Dle úvahy II.46 pro $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, zaveďme novou proměnnou $t = \operatorname{tg} x$. Pak bude $\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$. Ze vzorce $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ plyne, že $\frac{1}{\cos^6 x} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^3$ a tudíž

$$\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^6 x \overbrace{\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}t} = \int \frac{1}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Výsledný integrál je sice jednodušší než v řešení II.49.1, nicméně i zde integrace vyžaduje poměrně hodně výpočtů.[30]

Řešení II.49.3. Přepišme integrál ve tvaru $\int \cos^3 x \cos x\,\mathrm{d}x$ a použijme metodu *per partes* s $u(x) = \cos^3 x$, $v'(x) = \cos x$. Pak bude $u'(x) = -3\cos^2 x \sin x$, $v(x) = \sin x$:

$$\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \int \overbrace{\cos^3 x}^{u}\,\overbrace{\cos x}^{v'}\,\mathrm{d}x = \overbrace{\cos^3 x}^{u}\,\overbrace{\sin x}^{v} - \int \overbrace{\left(-3\cos^2 x \sin x\right)}^{u'}\,\overbrace{\sin x}^{v}\,\mathrm{d}x$$
$$= \sin x \cos^3 x + 3\int \sin^2 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x,$$

[30] Vskutku, rozklad na parciální zlomky v tomto případě má tvar

$$\frac{1}{(1+t^2)^3} = \frac{A_1 t + B_1}{1+t^2} + \frac{A_2 t + B_2}{(1+t^2)^2} + \frac{A_3 t + B_3}{(1+t^2)^3}$$

a vyžaduje určení 6 neznámých koeficientů bez možnosti dosazení reálných kořenů.

přičemž v posledním integrálu po úpravě opět vzniká původní integrál $\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x$:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x - \int \cos^4 x \, \mathrm{d}x.$$

Jelikož podobně příkladu II.14 $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2x \, \mathrm{d}(2x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$ (implicitní substituce $2x = t$), dostáváme vztah

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, \mathrm{d}x &= \sin x \cos^3 x + 3 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x - \int \cos^4 x \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \sin x \cos^3 x + \frac{3x}{2} + \frac{3}{4} \sin 2x - 3 \int \cos^4 x \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

jenž je rovnicí pro $\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x$. Zbývá tedy tuto rovnici vyřešit:

$$\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{16} \sin 2x = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{8} \sin x \cos x.$$

K výsledku pak, samozřejmě, přidáme integrační konstantu. □

Řešení II.49.4. Jelikož integrand obsahuje jen sudou mocninu kosinu, lze využít vzorce pro kosinus dvojného úhlu $\cos 2x = \cos x^2 - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$, díky němuž $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ a $\cos^2(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \int \cos 2x \, \mathrm{d}(2x) + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \int \cos 4x \, \mathrm{d}(4x) \\ &= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x. \end{aligned}$$

Tento vzorec se zdánlivě liší od výsledku řešení II.49.3, po úpravě však, samozřejmě, obdržíme totéž. □

U příkladu II.49 můžeme konstatovat, že vhodnějšími jsou řešení II.49.3, II.49.4, navržené, tak říkajíc, „na míru“ pro daný integrál, kdežto obecné trigonometrické substituce vedou na složitější výpočty.

§ II.4.2.2$_2$. Integrály $\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x$, kde n, m jsou celá čísla

Integrál $\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x$, kde n, m jsou celá čísla, je speciálním případem integrálu (II.43) a tudíž lze ho vždy vypočíst s pomocí univerzální trigonometrické substituce (§ II.4.2.1) nebo — v odpovídajících případech — speciální trigonometrické substituce dle úvahy II.46.

Lze rovněž integrovat po částech (viz řešení II.49.3 příkladu II.49).

V různých případech lze doporučit některé specifické postupy v závislosti na hodnotách n a m.

Případ, když jedno z čísel n, m je liché

Je-li $n = 2k+1$, lze napsat $\sin^n x = \sin^{2k} x \sin x = \left(1 - \cos^2 x\right)^k \sin x$ a zavést substituci $t = \cos x$. Dostaneme $\mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x$, $\sin x \, \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$,

$$\int \sin^{2k+1} x \, \cos^m x \, \mathrm{d}x = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cos^m x \, \overbrace{\sin x \, \mathrm{d}x}^{-\mathrm{d}t} = \int \left(1 - t^2\right)^k t^m \, \mathrm{d}t,$$

kde integrandem je racionální lomená funkce (při kladných k, m polynom). Podobně tomu v případě lichého m využijeme substituce $t = \sin x$. Tento postup je speciálním případem úvahy II.46.

Případ, když obě čísla n, m jsou sudá nebo lichá

V tomto případě dle úvahy II.46 lze aplikovat substituci $t = \operatorname{tg} x$ (anebo také $t = \operatorname{cotg} x$). Jsou-li n, m sudá, integrand obsahuje jen sudé mocniny kosinu a sinu, přičemž každá z nich — a rovněž i diferenciál $\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)\mathrm{d}x$ — se racionálně vyjadřují přes $\operatorname{tg} x$ s pomocí vzorců

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}. \tag{II.54}$$

V případě, když jsou obě čísla n, m lichá kladná, má integrand tvar

$$\sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x = \sin^{2k} x \cos^{2l} x \sin x \cos x = \sin^{2k} x \cos^{2l} x \operatorname{tg} x \cos^2 x,$$

kde lze opět využít vzorců (II.54).[31] Je-li jedno z čísel n, m záporné, lze v integrandu vyčlenit výraz $\frac{\sin x}{\cos x}$ anebo $\frac{\cos x}{\sin x}$, což rovněž vede na hořejší substituci.

Případ, když n, m jsou sudá a nezáporná

Pro nezáporná $n = 2k$, $m = 2l$ je $\sin^n x = (\sin^2 x)^k$, $\cos^m x = (\cos^2 x)^l$, to jest integrand je mocninným výrazem podle členů $\sin^2 x$, $\cos^2 x$. Proto s pomocí vzorců[32]

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x \tag{II.55}$$

lze mocniny n, m snížit o polovinu. Využití vzorců (II.55) v tomto případě snižuje početní náročnost integrace dle předchozího odstavce.

Případ, když $n \le 0$, $m \le 0$

Je-li $n = -k$, $m = -l$, kde $k > 0$, $l > 0$, lze mocniny členů ve jmenovateli snížit úpravou

$$\int \frac{1}{\sin^k x \cos^l x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^k x \cos^l x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^{k-2} x \cos^l x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^k x \cos^{l-2} x}\,\mathrm{d}x.$$

§ II.4.3. Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)\mathrm{d}x$, kde R je racionální lomená funkce

Integrály tohoto druhu lze převést na integrál racionální lomené funkce zavedením nové proměnné t s pomocí substituce

$$t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}. \tag{II.56}$$

Pro realizaci substituce potřebujeme sestrojit i substituci zpětnou, to jest vyjádřit x přes t: $t^m(\gamma x + \delta) = \alpha x + \beta$, $(\gamma t^m - \alpha) = \beta - \delta t^m$,

$$x = \frac{\beta - \delta t^m}{\gamma t^m - \alpha}$$

a vypočíst diferenciál: $\mathrm{d}x = \left(\frac{\beta - \delta t^m}{\gamma t^m - \alpha}\right)'\mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}x = \frac{-m\delta t^{m-1}(\gamma t^m - \alpha) - (\beta - \delta t^m)\gamma m t^{m-1}}{(\gamma t^m - \alpha)^2}\,\mathrm{d}t = m\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma t^m - \alpha)^2} t^{m-1}\,\mathrm{d}t.$$

[31] anebo provést substituci $s = \sin^2 x$, $\mathrm{d}s = 2 \sin x \cos x\,\mathrm{d}x$

[32] Rovnosti (II.55) jsou jednoduchými důsledky vzorce pro cosinus dvojného úhlu $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Substituci lze provést, je-li $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ (v opačném případě $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = \frac{\lambda\beta x+\beta}{\lambda\delta x+\delta} = \frac{\beta}{\delta}$, což znamená, že se jedná o integrand, v němž $\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ fakticky není).

PŘÍKLAD II.50. Vypočtěme $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[5]{x+1}}$.

Řešení. Dle doporučeného vzorce (II.56) položme $x+1=t^5$. Pak bude $\mathrm{d}x = 5t^4\,\mathrm{d}t$, $x = t^5 - 1$,

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[5]{x+1}} = 5\int \frac{\left(t^5-1\right)t^4}{t+1}\,\mathrm{d}t,$$

což je integrál neryze lomené funkce. Dělením polynomů $t^9 - t^4$ a $t+1$ dostáváme [33]

$$\frac{t^9-t^4}{t+1} = t^8 - t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 2 - \frac{2}{t+1}$$

a tudíž

$$\int \frac{\left(t^5-1\right)t^4}{t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{t^9}{9} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{2t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\ln|t+1|.$$

Pro obdržení výsledku poslední výraz vynásobíme pěti a zpětně dosadíme $t = (x+1)^{\frac{1}{5}}$. □

Podobným způsobem lze integrovat některé obecnější výrazy, obsahující více členů s radikály. Je-li v integrandu několik výrazů typu $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{q_1}$, $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{q_2}$, ..., kde $q_1, q_2, \ldots$ jsou racionální čísla, lze rovněž využít substituce (II.56), v níž zvolíme za m společný jmenovatel zlomků q_1, $q_2, \ldots$.

PŘÍKLAD II.51. Vypočteme

$$\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+1}.$$

Řešení. Zaveďme t vztahem $x = t^6$ (aby se „umocnilo“ jak $\sqrt[3]{x}$, tak i $\sqrt{x}$). Pak bude $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, a obdržíme integrál racionální lomené funkce proměnné t:

$$\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+1} = 6\int \frac{t^3}{t^2+1}t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Výraz $\frac{t^8}{t^2+1}$ není ryze lomený, proto z něj dělením vyčleníme polynomiální část:

$$\begin{array}{rl}
t^8 & \quad \big| \; t^2+1 \\
-t^8 - t^6 & \quad \big| \; t^6 - t^4 + t^2 - 1 \\ \hline
-t^6 & \\
t^6 + t^4 & \\ \hline
t^4 & \\
-t^4 - t^2 & \\ \hline
-t^2 & \\
t^2 + 1 & \\ \hline
1 &
\end{array}$$

a obdržíme $\frac{t^8}{t^2+1} = t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}$. Pak bude

$$\int \frac{t^8}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1\right)\mathrm{d}t + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t.$$

[33] Pro děleni zde lze využit Hornerova schématu.

Po návratu k proměnné x dostaneme $\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+1} = 6\left(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} - x^{\frac{1}{6}} + \operatorname{arctg} x^{\frac{1}{6}}\right)$. □

§ II.4.4. Integrály typu $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})$, kde R je racionální lomená funkce

Případ $\alpha = 0$ odpovídá integrálům z § II.4.3. Pro $\alpha \neq 0$ je vhodné převést kvadratický polynom na součet nebo rozdíl čtverců: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left((x+\xi)^2 \pm a^2\right)$ v závislosti na tom, zda je jeho diskriminant kladný nebo záporný. V případě záporného diskriminantu se jedná o součet čtverců a při $\alpha > 0$ po lineární substitucí $x + \xi = t$ místo $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})$ obdržíme člen $\sqrt{t^2 + a^2}$ (při $\alpha < 0$ a nemá integrand smysl); v případě rozdílu čtverců pak dostaneme integrál s $\sqrt{t^2 - a^2}$ anebo $\sqrt{a^2 - t^2}$. Výpočty jsou založeny na sofistikované substitucí a jsou poměrně složité (§ II.4.4.1).

Dále uvádíme jen několik často se vyskytujících integrálů tohoto typu. Některé z nich nalezneme v rozsáhlejších tabulkách integrálů (příklady II.53, II.54, II.55); u jejich důkazů lze dobře vyzkoušet různé techniky integrace.

§ II.4.4.1. Eulerovy substituce

V obecném případě lze tyto integrály zredukovat na integrály racionální funkce s pomocí zajímavých Eulerových substitucí. Podle hořejšího se lze zaměřit zejména na integrály $\int R(x, \Phi(x))\,\mathrm{d}x$, kde $\Phi(x)$ značí výraz jednoho z typů $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ anebo $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) \mathrm{d}x$

Obsahuje-li integrand $\sqrt{x^2 + a^2}$, zaveďme novou proměnnou s vzorcem

$$\sqrt{x^2 + a^2} = s - x. \tag{II.57}$$

Pak po umocnění bude $x^2 + a^2 = x^2 - 2xs + s^2$, $2xs = s^2 - a^2$ a proto

$$x = \frac{1}{2}\left(s - \frac{a^2}{s}\right), \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right)\mathrm{d}s. \tag{II.58}$$

Jelikož rovnice v (II.58) obsahují jen racionální výrazy, přičemž vzhledem k (II.57), (II.58) platí

$$\sqrt{x^2 + a^2} = s - \frac{1}{2}\left(s - \frac{a^2}{s}\right) = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a^2}{s}\right),$$

takto integrál $\int R\big(x, \sqrt{x^2 + a^2}\big)\,\mathrm{d}x$ převedeme na integrál racionální lomené funkce proměnné s.[34]

Poznámka II.52. Elegantní myšlenka Eulerovy substituce (II.57) spočívá v tom, že vyjádření $x = \psi(s)$ v tomto případě obdržíme řešením *lineární* rovnice podle x (a to právě díky sčítanci s x, jenž se v (II.57) po umocnění odečte od x^2 na levé straně).

Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x$

V integrálu tvaru $\int R\big(x, \sqrt{x^2 - a^2}\big)\,\mathrm{d}x$ vzhledem k identitě $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(x-a)(x+a)}$ lze novou proměnnou s zavést vzorcem

$$\sqrt{x^2 - a^2} = s\,(x - a), \tag{II.59}$$

[34] Vskutku, po dosazení obdržíme

$$\int R\big(x, \sqrt{x^2 + a^2}\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) R\left(\frac{1}{2}\left(s - \frac{a^2}{s}\right), \frac{1}{2}\left(s + \frac{a^2}{s}\right)\right)\mathrm{d}s.$$

a to opět proto, abychom vyjádření $x = \psi(s)$ získali řešením lineární rovnice podle x; po umocnění totiž bude $(x-a)(x+a) = s^2(x-a)^2$, $x+a = s^2(x-a)$, $x(s^2-1) = as^2+a$ a tudíž

$$x = a\frac{s^2+1}{s^2-1}, \quad \mathrm{d}x = a\frac{2s(s^2-1)-(s^2+1)2s}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s = -4a\frac{s}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s.$$

Pro $\sqrt{a^2-x^2}$ bude

$$\sqrt{a^2-x^2} = s\,(x-a) = as\left(1-\frac{s^2+1}{s^2-1}\right) = \frac{2as}{s^2-1},$$

zpětnou substituci odvodíme z (II.59): $s = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$.

Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) \mathrm{d}x$

Máme-li v integrandu výraz $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{(a-x)(a+x)}$, lze podobným způsobem zavést novou proměnnou vztahem

$$\sqrt{a^2-x^2} = s\,(a-x)\,. \tag{II.60}$$

Umocníme-li, dostaneme $(a-x)\,(a+x) = s^2\,(a-x)^2$, $a+x = s^2\,(a-x)$ a tudíž

$$x = a\frac{s^2-1}{s^2+1}, \quad \mathrm{d}x = a\frac{2s(s^2+1)-2s(s^2-1)}{(s^2+1)^2} = \frac{4as}{(s^2+1)^2}. \tag{II.61}$$

Pro $\sqrt{a^2-x^2}$ dle (II.60), (II.61) dostaneme

$$\sqrt{a^2-x^2} = s\,(a-x) = as\left(1-\frac{s^2-1}{s^2+1}\right) = \frac{2as}{s^2+1}. \tag{II.62}$$

Zpětnou substituci pak provedeme dle vzorce $s = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

§ II.4.4.2. Některé speciální případy

Zde vypočteme některé integrály typu, popsaného v § II.4.4, jež nalezneme i v řadě tabulek. Při vypočtu vyzkoušíme různé způsoby (využití Eulerových substitucí se vesměs vyhneme).

PŘÍKLAD II.53. Vypočtěme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

kde $a > 0$. Definičním oborem integrandu je množina $\{x : |x| > a\}$.

Řešení II.53.1. Funkce je sudá; uvažujme $x > a$. Vykonejme substituci $x = a\sec t$, kde $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ (připomeňme, že $\sec t = \frac{1}{\cos t}$ a $0 < \cos x < 1$ pro $t \in (0, \frac{\pi}{2})$). Pak

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t - 1} = a\operatorname{tg} t$$

(pro $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ je $\operatorname{tg} t > 0$) a $\mathrm{d}x = -\frac{-a\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{a\operatorname{tg} t}{\cos t}\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{1}{a\operatorname{tg} t}\frac{a\operatorname{tg} t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}.$$

Jelikož $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ a dle substituce $\frac{1}{\cos x} = \frac{x}{a}$, platí $\operatorname{tg} t = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Pro $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ využijme výsledek příkladu II.45, řešení II.45.1; pak obdržíme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln\left(\frac{1}{\cos t} + \operatorname{tg} t\right) + C$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) + C = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr) + K,$$

kde K ($K = C - \ln a$) je libovolná konstanta. Tento vzorec jsme dokázali pro $x > a$.

Jelikož funkce v integrandu je sudá, pro $x < -a$ místo $F(x) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr)$ její primitivní funkce bude[35] $-F(-x) = -\ln\bigl(-x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr)$. Úpravou obdržíme:

$$\begin{aligned} -F(-x) &= -\ln\bigl(-x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr) = \ln 1 - \ln\bigl(-x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr) \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2} - x} = \ln \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{x^2 - 1 - x^2} = \ln(-x - \sqrt{x^2 - a^2}). \end{aligned}$$

Sjednocením dvou posledních rovností obdržíme vzorec, platný pro všechna x s $|x| > a$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\bigl|x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr| + K.$$

Řešení II.53.2. Funkce v integrandu je sudá a tudíž se můžeme omezit případem, kdy x je kladné, to jest $x > a$. Vzhledem k vlastnostem hyperbolických funkcí[36] (viz (II.63)) je zde vhodné provést substituci

$$x = a \cosh t, \tag{II.64}$$

pak $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cosh^2 t - a^2} = a\sqrt{\cosh^2 t - 1} = a\sqrt{\sinh^2 t} = a \sinh t$ a diferenciál bude $\mathrm{d}x = a \sinh t \, \mathrm{d}t$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{1}{a \sinh t} a \sinh t \, \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t.$$

Zbývá tedy jen vykonat inverzní substituci a vrátit se k původní proměnné x.

Vztah $x = a \cosh t$ znamená (viz pozn. 36), že $x = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t})$, to jest $e^{2t} - \frac{2x}{a} e^t + 1 = 0$, což je kvadratická rovnice $s^2 - \frac{2x}{a} s + 1 = 0$ pro $s = e^t$. Vyřešíme-li tuto rovnici, obdržíme $s = \frac{x}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, kde vezmeme znaménko „+“, protože $s = e^t$ a tudíž musí být $s > 0$ (navíc uvažujeme $x > a$). Jelikož $t = \ln x$, obdržíme

$$t = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr) - \ln a$$

a proto dostaneme vzorec

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 - a^2}\bigr) + C, \tag{II.65}$$

což je v souladu s výsledkem řešení II.53.1. □

---

[35] Zde využijeme takové věty:

Věta. Buďte f sudá funkce a F její primitivní funkce na $[0, +\infty)$. Pak je funkce $\tilde{F}(x) = -F(-x)$, $x \leq 0$, primitivní funkcí pro f na $(-\infty, 0]$.

Důkaz. Vskutku, pro $x \leq 0$ máme $\tilde{F}'(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(-x) = -F'(-x) = -f(-x) = f(x)$. □

[36] Připomeňme, že hyperbolické kosinus a sinus (§ I.1) se definují jako $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ a platí $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \tag{II.63}$$

.

PŘÍKLAD II.54. Vypočtěme
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}},$$
kde $a>0$.

Řešení II.54.1 (Eulerova substituce). Využijeme-li substituce (II.57) (§ II.4.4.1) a odpovídajících vzorců (II.58), dostaneme $\sqrt{x^2+a^2} = s - x = s - \frac{1}{2}\left(s - \frac{a^2}{s}\right) = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a^2}{s}\right)$,
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{1}{2}\left(s+\frac{a^2}{s}\right)}\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)\mathrm{d}s = \int \frac{s}{s^2+a^2}\,\frac{s^2+a^2}{s^2}\,\mathrm{d}s = \int \frac{\mathrm{d}s}{s} = \ln|s|.$$
Po zpětném dosazení $s = x + \sqrt{x^2+a^2}$ obdržíme $\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$. □

Řešení II.54.2. Připomeňme si vzorec $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ a zaveďme substituci $x = a\operatorname{tg} t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak $\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\operatorname{tg}^2 t + a^2} = a\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} = \frac{a}{\cos t}$ a $\mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$, odkud
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{1}{\frac{a}{\cos t}}\,\frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}.$$
Integrál $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ lze vypočíst různými způsoby (viz příklad II.45, str. 31). Zde je pohodlné využít řešení II.45.3:
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \operatorname{tg} t\right| + K = \ln\left|\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} + \operatorname{tg} t\right| + K$$
a tudíž
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \ln\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}\right| + K = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}\right| + K \\ &= \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C,\end{aligned} \tag{II.66}$$
kde $C = K - \ln a$. □

Z (II.65) a (II.66) obdržíme tabulkový integrál (II.12):
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\right) + C. \tag{II.67}$$

PŘÍKLAD II.55. Vypočtěme
$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x,$$
kde $a>0$.

Řešení. Zde lze využít výsledku (II.67) z příkladu II.54. Vskutku, aplikujme metodu *per partes* s $u(x) = \sqrt{x^2-a^2}$, $v'(x) = 1$ a vzorec (II.67):
$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{x^2-a^2} - \int x\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x - a^2\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x - a^2\ln\left(\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right),\end{aligned}$$

odkud algebraickou úpravou nalezneme $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x$ a obdržíme

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\big(|x + \sqrt{x^2 - a^2}|\big) + C. \tag{II.68}$$

PŘÍKLAD II.56. Mějme

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde $a > 0$. Vypočítejme tento integrál různými způsoby.

Řešení II.56.1. Daný integrál lze vypočíst metodou *per partes* podobně příkladu II.55 s volbou $u(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$, $v'(x) = 1$ a využitím vzorce (II.67):

$$\begin{aligned}
\int \overbrace{\sqrt{x^2 + a^2}}^{u}\,\mathrm{d}x &= \overbrace{x}^{v}\,\overbrace{\sqrt{x^2 + a^2}}^{u} - \int \overbrace{x}^{v}\,\overbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}^{u'}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x + a^2 \ln\big(|x + \sqrt{x^2 - a^2}|\big).
\end{aligned}$$

Poslední vztah je rovnicí pro nalezení $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x$, odkud dostáváme

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\big(|x + \sqrt{x^2 + a^2}|\big) + C. \tag{II.69}$$

Řešení II.56.2. Vzhledem k vlastnostem hyperbolických kosinu a sinu (§ I.1.1) lze zavést substituci

$$x = a\sinh t, \tag{II.70}$$

pak $\mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t$. Jelikož dle (I.4) $\cosh^2 t = \sinh^2 t + 1$, $\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t$, $\cosh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh(2t) + 1)$ a $\int \sinh t\,\mathrm{d}t = \cosh t$, máme

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x &= \int a\sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2}\cosh t\,\mathrm{d}t = a^2 \int a\sqrt{\sinh^2 t + 1}\cosh t\,\mathrm{d}t \\
&= a^2 \int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int (\cosh(2t) + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{4}\sinh(2t) + \frac{a^2}{2}t,
\end{aligned}$$

kde integrační konstantu přidáme až na konci výpočtů. S využitím vzorce (I.6) pro inverzní funkci $\operatorname{arsinh} = \sinh^{-1}$ z (II.70) obdržíme

$$t = \operatorname{arsinh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right) = \ln\big(x + \sqrt{x^2 + a^2}\big) - \ln a$$

a proto dle vzorce pro sinh dvojitého uhlu (I.4) a vztahu $a^2\cosh^2 t = a^2\sinh^2 t + a^2$

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{4}\sinh(2t) + \frac{a^2}{2}t &= \frac{a^2}{4}2\sinh t\cosh t + \frac{a^2}{2}t = \frac{1}{2}a\sinh t \cdot a\cosh t + \frac{a^2}{2}t \\
&= \frac{1}{2}a\sinh t \cdot \sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2} + \frac{a^2}{2}t \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\big(x + \sqrt{x^2 + a^2}\big) - \frac{a^2}{2}\ln a.
\end{aligned}$$

Obdrželi jsme tedy vzorec

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C, \tag{II.71}$$

Sjednocením rovností (II.68) a (II.69) obdržíme vzorec

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln\left(\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\right) + C. \tag{II.72}$$

PŘÍKLAD II.57. Pro $a > 0$ vypočtěme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{II.73}$$

Řešení II.57.1. Integrál lze snadno vypočíst elementární úpravou a lineární substitucí:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Řešení II.57.2 (Eulerova substituce). Porovnejme využitý elementární postup s postupem, založeným na Eulerově substitucí. Danému případu odpovídá substituce (II.60): $\sqrt{a^2-x^2} = s\,(a-x)$. Využijeme-li tedy vzorců (II.61), (II.62), po vykonání zpětné substituce $s = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ dostaneme

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{2as}{s^2+1}}\frac{4as}{(s^2+1)^2} = 2\int \frac{1}{s^2+1}\,\mathrm{d}s = 2\operatorname{arctg} s = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Poznamenejme, že po srovnaní s řešením II.57.1 zde opět pozorujeme různé tvary téhož výsledku; ve skutečnosti se tyto dvě funkce liší o konstantní sčítanec, jenž bude součástí integrační konstanty. □

Poznámka II.58. Vzorců, odvozených v předchozích příkladech, lze využít po převedení kvadratického polynomu s libovolnými koeficienty na součet nebo rozdíl čtverců.

PŘÍKLAD II.59. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}}. \tag{II.74}$$

Řešení. Jelikož pro polynom ve jmenovateli platí vyjádření

$$\begin{aligned} 3+2x-x^2 &= -(x^2-2x-3) = -(x^2-2\cdot 1\cdot x+1-1-3) \\ &= -((x-1)^2-4) = 4-(x-1)^2 \end{aligned} \tag{II.75}$$

obdržíme

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x-1}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right). \end{aligned}$$

PŘÍKLAD II.60. Vypočtěme integrál $\int \sqrt{4x^2-4x-7}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Jelikož $4x^2-4x-7=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 1+1-8=(2x-1)^2-8$, platí

$$\begin{aligned}\int\sqrt{4x^2-4x-7}\,\mathrm{d}x&=\int\sqrt{(2x-1)^2-8}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sqrt{(2x-1)^2-8}\,\mathrm{d}(2x-1)\\&=\int\sqrt{(2x-1)^2-(\sqrt{8})^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

odkud substitucí $2x-1=t$ obdržíme integrál tvaru $\int\sqrt{t^2-a^2}\,\mathrm{d}t$ (viz příklad II.55). □

PŘÍKLAD II.61. Vypočtěme integrál

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x-3}}.$$

Řešení. Tento integrál se liší od (II.74) pouze znaménkem polynomu, výsledek integrace však je zcela odlišný. Podle (II.75) obdržíme integrál typu (II.67):

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x-3}}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)^2-4}}=\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-4}}\\&=\ln\left(\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-4}\right|\right)=\ln\left(\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right|\right)\end{aligned}$$

Bibliografie

[1] V. Jarník. *Integrální počet. I*. 6. vyd. Praha: Academia, 1984. URL: http://hdl.handle.net/10338.dmlcz/500550.