Repetitorium SŠ matematiky – 3. cvičení

Konzultace k tomuto cvičení proběhne v MS Teams 4. 11. 2020

Do pátku 6. 11. 2020 je třeba nahrát do odevzdávárny:

- alespoň 1 variantu z příkladů 1 a 4
- alespoň 2 varianty z příkladů 2 a 3

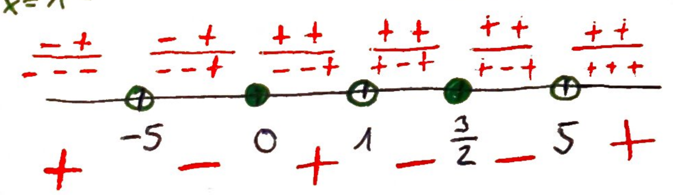
ROVNICE A NEROVNICE V PODÍLOVÉM A SOUČINOVÉM TVARU

Součinový a podílový tvar (ne)rovnice je pro řešení velmi výhodný. Je to tvar, kdy na jedné straně (ne)rovnice je součin nějakých (ideálně dále nerozložitelných) výrazů, zatímco na straně druhé je <u>nula</u>. Tvar je výhodný proto, že umíme snadno určit, kdy je součin výrazů roven nule – je to tehdy, když je alespoň jeden z činitelů roven nule. U nerovnice podobně snadno určíme, kdy je výraz kladný, záporný, a nebo nulový.

- $$\frac{4x^3 - 12x^2 + 9x}{(x-1)x^2 - (x-1)25} \geq 0$$

$$\frac{x \cdot (2x-3)^2}{(x-1)(x-5)(x+5)} \geq 0$$

$x = \frac{3}{2}$, $x = 0$, $x = 1$, $x = -5$, $x = 5$



- rozložíme na součin
- zakreslíme nulové body na číselnou osu
- vyznačíme „zakázané" nulové body ze jmenovatele
- zvolíme v nějakém intervalu číslo, dosazujeme a sledujeme znaménka

$$\underline{K = (-\infty; -5) \cup \langle 0; 1) \cup \left\{\tfrac{3}{2}\right\} \cup (5; \infty)}$$

Př. 1: Řešte nerovnice v podílovém tvaru

a) $\dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{4-x}{1-x} \leq 0$

b) $\dfrac{15}{x-2} > 3$

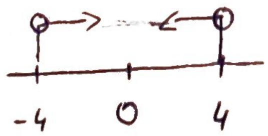
c) $\dfrac{2x^4 - 18x^3 + 54x^2 - 54x}{x^3 - x} > 0$

Pro usnadnění práce můžete využít skutečnosti, že při přechodu přes nulový bod liché násobnosti (umocněno na lichou mocninu) se znaménko celého výrazu mění, naopak při přechodu nulového bodu sudé násobnosti se znaménko nemění.

ROVNICE A NEROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

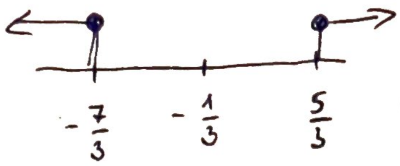
Jednodušší rovnice a nerovnice s abs. hodnotou lze řešit na základě geometrického významu absolutní hodnoty - vzdálenost od nulového bodu závorky

- $|x| = 5$ „vzdálenost od nuly je 5" $K = \{-5; 5\}$
- $|x| < 4$ „vzdálenost od nuly je menší než 4"



$K = (-4; 4)$

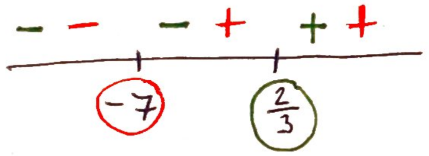
- $|3x+1| \geq 2$ „vzdálenost od $-\frac{1}{3}$ je větší nebo rovna 2"



$K = (-\infty; -\frac{7}{3}\rangle \cup \langle \frac{5}{3}, \infty)$

Složitější úlohy řešíme pomocí rozboru možností, které mohou nastat. Absolutní hodnota kladné hodnoty výraz nemění, u výrazu se zápornou hodnotou ale otáčí jeho znaménko. Celou číselnou osu si proto rozdělíme na intervaly, v nichž určujeme paritu (kladné, záporné) jednotlivých absolutních hodnot. Dělicí body na číselné ose jsou nulové body jednotlivých abs. hodnot.

- $|3x-2| - 2\cdot|x+7| > 12 - x$



1) $x \in (-\infty; -7)$

$-(3x-2) - 2\cdot(-1)(x+7) > 12-x$

$-3x + 2 + 2x + 14 > 12 - x$

$0x > -4$

$0 > -4$

$K_1 = (-\infty; -7)$

2) $x \in \langle -7; \frac{2}{3} \rangle$

$-(3x-2) - 2\cdot(x+7) > 12-x$

$-3x + 2 - 2x - 14 > 12 - x$

$-4x > 24$

$x < -6$

$K_2 = \langle -7; -6)$

3) $x \in (\frac{2}{3}; \infty)$

$(3x-2) - 2(x+7) > 12 - x$

$3x - 2 - 2x - 14 > 12 - x$

$2x > 28$

$x > 14$

$K_3 = (14; \infty)$

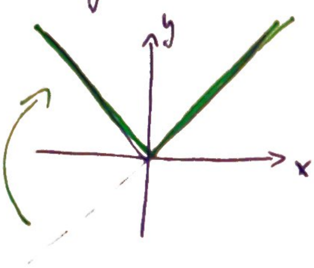
$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$

$\underline{\underline{K = (-\infty; -6) \cup (14; \infty)}}$

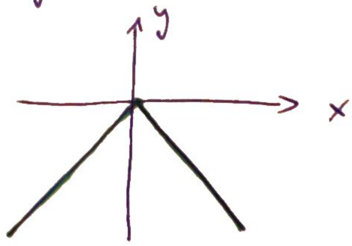
FUNKCE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

Pro pochopení tvaru grafu funkce s absolutní hodnotou stačí znát skutečnost, že absolutní hodnota přiřadí záporné hodnotě vždy opačné znaménko, graficky vše pod přímkou x překlopí nad ni.

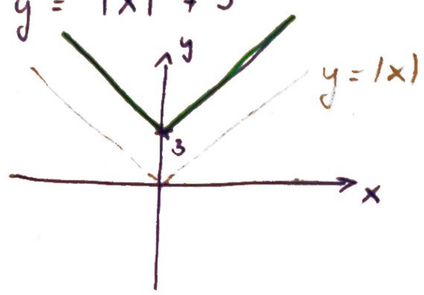
- $y = |x|$



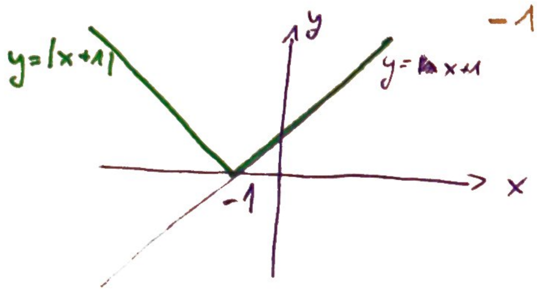
- $y = -|x|$



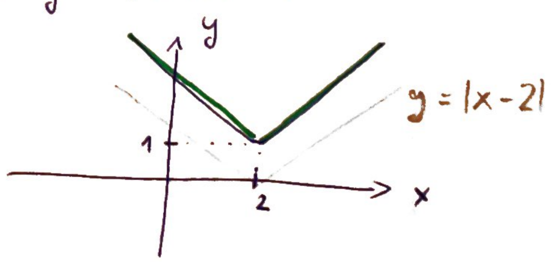
- $y = |x| + 3$



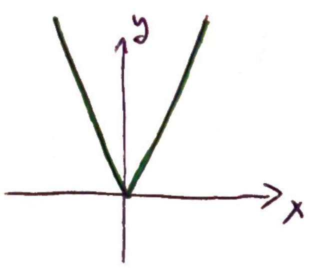
- $y = |x + 1|$



- $y = |x - 2| + 1$

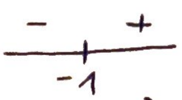


- $y = |2x|$



Jednodušší funkce můžeme řešit úvahou a posunem, složitější pak řešíme podobně jako rovnice a nerovnice.

- $y = |x + 1| - 2x$



1) $x \in (-\infty; -1)$

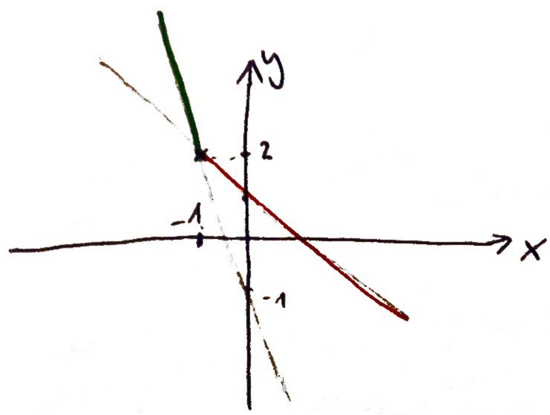
$y = -x - 1 - 2x$

$y = -3x - 1$

2) $x \in \langle -1; \infty)$

$y = x + 1 - 2x$

$y = -x + 1$



Př. 2 Řešte rovnice a nerovnice

a) $|2x-1| - |x+5| = x-7$

b) $|7-x| - 3|2-x| \leq 9$

c) $|3-|2-x|| \leq 2x$

d) $|x^2-2x-3| > x+1$

Př. 3: Načrtněte grafy funkcí

a) $f: y = |x+4|-2$

b) $g: y = 5-|4x|$

c) $h: y = x-|x-3|+2$

d) $i: y = ||x-2|-3|$

Př. 4: Řešte početně i graficky

a) $|2x-5| = 1-3x$

b) $|2x+1| \leq |x-3|$