Repetitorium SŠ matematiky – 4. cvičení

Konzultace k domácímu cvičení proběhne v MS Teams 11.11.2020

Do pátku 13.11. je třeba nahrát do odevzdávárny:

- alespoň 3 varianty z Př. 1
- alespoň po jedné variantě z Př. 2, 3, 4

KVADRATICKÉ ROVNICE

Rovnice tvaru $ax^2+bx+c=0$; $a,b,c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$

V reálných číslech může mít dva kořeny, jeden dvojnásobný kořen, nebo žádný kořen. Nemá-li kvadratická rovnice kořeny v $\mathbb{R}$, má komplexně sdružené kořeny v komplexních číslech $\mathbb{C}$ $(a \pm bi)$.

Hledání kořenů chybí-li některý člen (lineární, absolutní):

- $x^2-9=0$ $\quad (a-b)(a+b)=a^2-b^2$

  $(x-3)(x+3)=0$

  $K=\{-3;3\}$

- $x^2+3=0$

  $x^2=-3$ nelze pro žádné $x \in \mathbb{R}$

  $K=\emptyset$

  řešíme-li v $\mathbb{C}$, pak $K=\{\pm\sqrt{3}\,i\}$

- $6x^2-3x=0$

  $3x(2x-1)=0$

  $K=\{0;\frac{1}{2}\}$

Obecné hledání kořenů

Kořeny kvadratické rovnice se obecně hledají pomocí diskriminantu.
Při obvyklém značení $ax^2+bx+c=0$ platí:

$$D = b^2 - 4ac \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

diskriminant

Vzorec si odvodíme následovně:

$$ax^2+bx+c=0 \;/:a \qquad a,b,c \in \mathbb{R};\; a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{úprava na čtverec}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

→ DISKRIMINANT musí být nezáporný, protože levá strana rovnosti je také nezáporná

→ vždy kladný výraz

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 = 0 \qquad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Jak je vidět z odvození, diskriminant má kladnou nebo nulovou hodnotu, má-li rovnice řešení v $\mathbb{R}$. Jestliže je diskriminant záporný, má rovnice řešení pouze v $\mathbb{C}$ (komplexní čísla). Platí $i^2=-1$ (i je komplexní jednotka), tedy $\sqrt{-1}=i$. Například pro $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-16}}{2} = \underline{\underline{\frac{3 \pm 4i}{2}}}$

Př. 1: Řešte rovnice v $\mathbb{C}$

($\mathbb{R}$ je podmnožinou $\mathbb{C}$, tedy i každé reálné číslo je z $\mathbb{C}$)

a) $4x^2+4x+1=0$

b) $3x^2-7x+2=0$

c) $5x^2-2x+2=0$

d) $3x^2+2=0$

e) $x^2+(2\sqrt{3}+1)x+3+\sqrt{3}=0$

KVADRATICKÁ FUNKCE

$f: y = ax^2+bx+c \quad ; a,b,c \in \mathbb{R} \; ; a \neq 0$

Grafem kvadratické funkce je parabola. Vždy nás zajímají souřadnice vrcholu a průsečíky alespoň s osou x.

Vrcholový tvar předpisu získáme úpravou na čtverec:

- $y = x^2-4x+5$

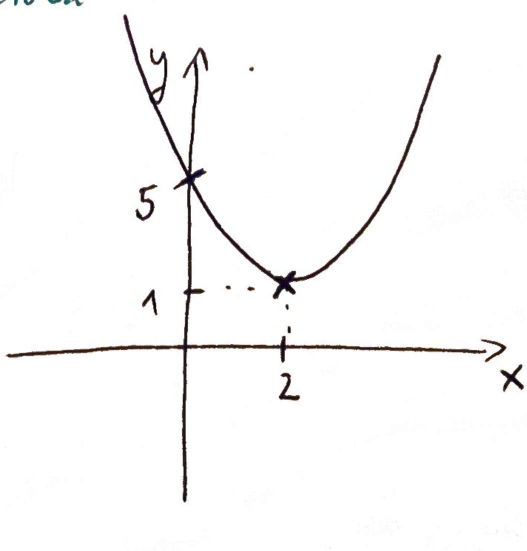
  $y = (x-2)^2-4+5$

  $\boxed{y = (x-2)^2+1}$ VRCHOLOVÝ TVAR

  → y-ová souřadnice vrcholu

  nulový bod je x-ová souřadnice vrcholu

$V[2;1]$



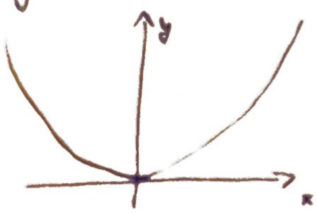
Podle znaménka před „x^2" poznáme, zda bude parabola otevřená nahoru ($\cup$ +), nebo dolů ($\cap$ −)

P_y: $y = 0^2-4\cdot 0+5$

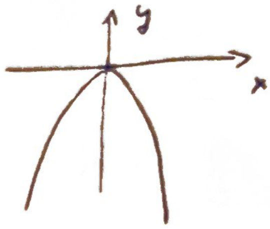
$y = 5$

- $y = x^2$

- $y = \frac{1}{2}x^2$



- $y = -x^2$

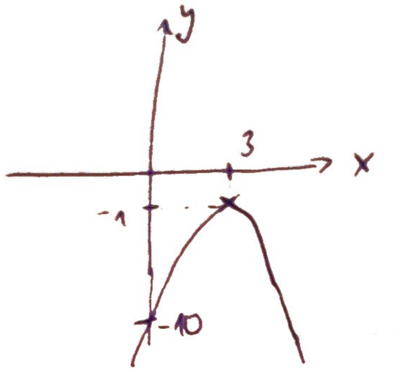


- $y = -x^2 + 6x - 10$

$y = -(x^2 - 6x) - 10$

$y = -(x-3)^2 + 9 - 10$

$y = -(x-3)^2 - 1$



P_y: $y = -0^2 + 6 \cdot 0 - 10$

$y = -10$

Př. 2: Načrtněte funkce

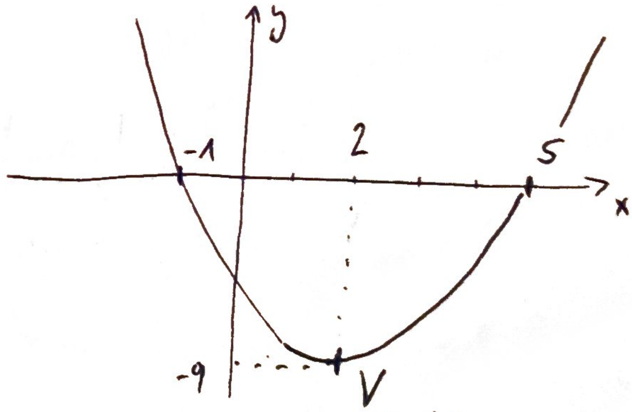
a) $f: y = x^2 + 2x + 3$

b) $g: y = 4x^2 + 4x$

c) $h: y = x^2 - 2x - 3$

Funkce lze také kreslit pomocí součinového tvaru, z nějž získáme průsečíky s osou x. Vrchol leží přímo mezi průsečíky:

- $f: y = (x+1) \cdot (x-5)$



(omlouvám se za neshodné měřítko os x a y)

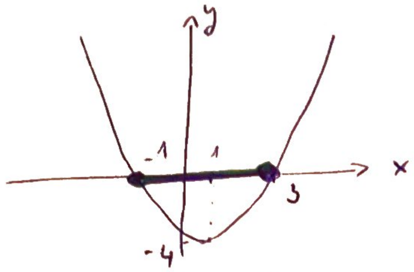
Grafické řešení rovnic a nerovnic

1. způsob: vše na jednu stranu (ne)rovnice, nakreslíme graf a hledáme průsečíky s osou x.
2. způsob: na jedné straně (ne)rovnice necháme kvadratický člen, na druhé lineární a absolutní člen. Hledáme průsečíky paraboly a přímky

- $x^2 - 2x - 3 \le 0$

1. způsob

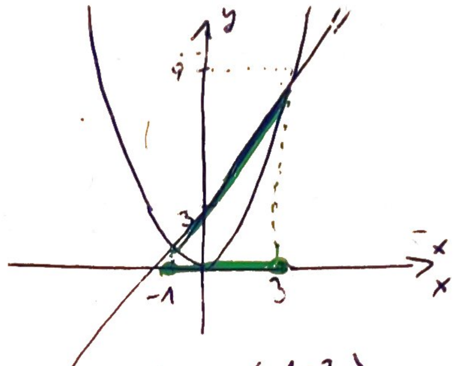
$(x-3)(x+1) \le 0$



$K = \langle -1; 3 \rangle$

2. způsob

$x^2 \le 2x + 3$



$K = \langle -1; 3 \rangle$

Př. 3: Řešte početně i graficky (libovolným způsobem)

a) $2x - x^2 \ge 2 - x$

b) $2x^2 + 3x - 14 > 0$

VIETOVY VZORCE

Pomáhají nalézt kořeny kvadratických (i vyšších) rovnic bez použití diskriminantu, popisují vztahy mezi kořeny.

$ax^2 + bx + c = 0$

$a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}}$$

- $x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x+4)(x-1) = 0$

$x_1 = -4 \qquad x_1 + x_2 = -3$

$x_2 = 1 \qquad x_1 \cdot x_2 = -4$

- Urče kvadratickou rovnici, která má kořeny o 3 větší než rovnice $x^2 - 9x + 15 = 0$

Původní kořeny x_1, x_2
Nové kořeny x_1+3, x_2+3

Platí: $\underline{x_1 + x_2} = 9$
$\underline{x_1 \cdot x_2} = 15$

Hledáme koeficienty nové rovnice pro $a = 1$:

$(x_1+3) + (x_2+3) = \underline{x_1+x_2} + 6 = 9+6 = 15 \rightarrow -b = 15$
$b = -15$

$(x_1+3)\cdot(x_2+3) = \underline{x_1 \cdot x_2} + 3\underline{(x_1+x_2)} + 9 =$
$= 15 + 3\cdot 9 + 9 = 51 \rightarrow c = 51$

Řešení: $\underline{\underline{x^2 - 15x + 51 = 0}}$

Př. 4:

a) Urče kvadratickou rovnici, která má kořeny třikrát větší než rovnice $x^2 - 9x + 15 = 0$

b) V rovnici $2x^2 - 7x + c = 0$ urče c tak, aby byl jeden kořen rovnice roven číslu 3.

c) V rovnici $ax^2 - 42x + 8 = 0$ urče a tak, aby byl jeden kořen dvojnásobkem druhého.