Repetitorium SŠ matematiky – 6. cvičení

Konzultace k tomuto cvičení proběhne v MS Teams 25. 11. 2020.

Do pátku 27. 11. 2020 je třeba nahrát do odevzdávárny:

- alespoň jednu variantu z Př. 1
- alespoň jeden z Př. 2, 3, 4

LINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ ROVNICE S PARAMETREM

Rovnice a nerovnice, u nichž je vedle neznámé další parametr. Zastupují nekonečně mnoho rovnic daného tvaru v závislosti na parametr (ten může nabývat nekonečně mnoha hodnot).

Naším úkolem je vyjádřit neznámou v závislosti na parametru, tedy například $x = 2p + 1$. Rovnice řešíme stejně jako bez parametru, ale v každém kroku kontrolujeme, zda se s parametrem neděje něco „problematického".

Pokud by daný krok byl pro některé hodnoty parametru problematický, musíme rovnici rozdělit na dva případy:

a) rovnici pro „neproblematické" hodnoty parametru

b) problematické hodnoty parametru dosadíme a určíme výsledek.

Příkladem může být dělení nulou (viz příklady).

Na konci příkladu musí být vždy uvedena přehledná tabulka výsledků!

- $\dfrac{m}{x} - \dfrac{4}{m \cdot x} = 1 - \dfrac{2}{m}$ parametr $m \in \mathbb{R}$

ze zadání vidíme $x \neq 0$, $m \neq 0$

$$\frac{m}{x} - \frac{4}{m \cdot x} = 1 - \frac{2}{m} \quad / \cdot mx$$

$$m^2 - 4 = mx - 2x$$

$$m^2 - 4 = x \cdot (m-2)$$ chceme vyjádřit neznámou x

$$x\,(m-2) = (m-2) \cdot (m+2) \quad /:(m-2)$$! dělit hodnotou $(m-2)$ můžu pouze pro $m \neq 2$!

$m \neq 2$

$$x = \frac{(m-2)(m+2)}{m-2}$$

$$\underline{\underline{x = m+2}}$$

$m = 2$

nemohu dělit $(m-2)$, proto dosadím

$$x \cdot (2-2) = (2-2) \cdot (2+2)$$

$$x \cdot 0 = 0 \cdot 4$$

$$0 = 0$$

$$\underline{\underline{K = \mathbb{R} - \{0\}}}$$ $\rightarrow$ $x=0$ zakázáno v zadání

Nakonec zkontrolujeme, zda nám nějaká povolená hodnota m nevytvoří zakázané $x=0$:

$$0 \neq m+2$$

$$m \neq -2$$ – tuto hodnotu m musíme zakázat

Výsledek:

$$\boxed{\begin{array}{ll} m=0,\ m=-2 \ \ldots\ldots & K = \emptyset \\ m=2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & K = \mathbb{R} - \{0\} \\ m \neq 0,\ m \neq \pm 2 \ \ldots\ldots & K = \{m+2\} \end{array}}$$

- Pro která $a \in \mathbb{R}$ má soustava za řešení uspořádanou dvojici, jejíž první prvek je kladný a druhý záporný?

$$ax - 2y = 3 \quad \rightarrow y = \frac{ax-3}{2}$$
$$3x + ay = 4$$

$$3x + a \cdot \frac{ax-3}{2} = 4 \quad / \cdot 2$$
$$6x + a^2x - 3a = 8$$
$$x(6+a^2) = 8 + 3a \quad /: 6+a^2 \text{ – kladné pro každé } a \in \mathbb{R}$$
$$x = \frac{8+3a}{6+a^2}$$

Dopočítáme y:
$$2y = a \cdot \frac{8+3a}{6+a^2} - 3$$
$$2y = \frac{8a + 3a^2 - 18 - 3a^2}{6+a^2}$$
$$2y = \frac{8a - 18}{6+a^2} \quad /:2$$
$$y = \frac{4a-9}{6+a^2}$$

Má platit $x > 0, y < 0$:

$$\frac{8+3a}{6+a^2} > 0 \quad \wedge \quad \frac{4a-9}{6+a^2} < 0 \qquad 6+a^2 \text{ vždy } +$$
$$8 + 3a > 0 \quad \wedge \quad 4a - 9 < 0$$
$$3a > -8 \qquad 4a < 9$$
$$a > -\frac{8}{3} \quad \wedge \quad a < \frac{9}{4}$$

$$a \in \left(-\frac{8}{3}; \frac{9}{4}\right)$$

Př. 1:

a) Řešte rovnici s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{2-a}{a} = \frac{2}{x-1}$$

b) Řešte rovnici s parametrem $b \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2+b^2} - b = x$$

c) Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ má rovnice záporný kořen

$$\frac{x}{x-a} = a+1$$

Př. 2: Řešte soustavu rovnic s parametrem $b \in \mathbb{R}$

$$x + (b-1)\cdot y = 1$$
$$(b+1)\cdot x + 3y = -1$$

Př. 3: Řešte v oboru $\mathbb{R}$ rovnici s parametrem $p \in \mathbb{R}$

$$p x^2 + (2p+3)x + p + \frac{3}{4} = 0$$

nápověda: uvažte, kdy je rovnice kvadratická, dále uvažujte nad hodnotou diskriminantu.

Př. 4: Určete všechny hodnoty $p \in \mathbb{R}$, pro něž má rovnice

$$x^2 + 2(p-4)x + p^2 + 6p = 0$$

a) reálné kořeny

b) oba kořeny kladné

c) oba kořeny záporné

d) jeden kořen kladný a jeden záporný

Nápověda: uvažujte nad hodnotou diskriminantu, pak využijte Vietovy vztahy