Doplňkové studium SŠ matematiky – 8. cvičení

Konzultace k tomuto cvičení proběhne v MS Teams 9.12.2020.

Do pátku 11.12.2020 je třeba nahrát do odevzdávárny:

- alespoň 1 variantu z Př. 1
- alespoň 3 varianty z Př. 2

EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ ROVNICE

Při exponenciálních a logaritmických rovnicích (častěji nerovnicích) se někdy využívá vlastností funkcí, proto připomeňme:

Exponenciální funkce $f: y = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

pro $a > 1$ pro $0 < a < 1$

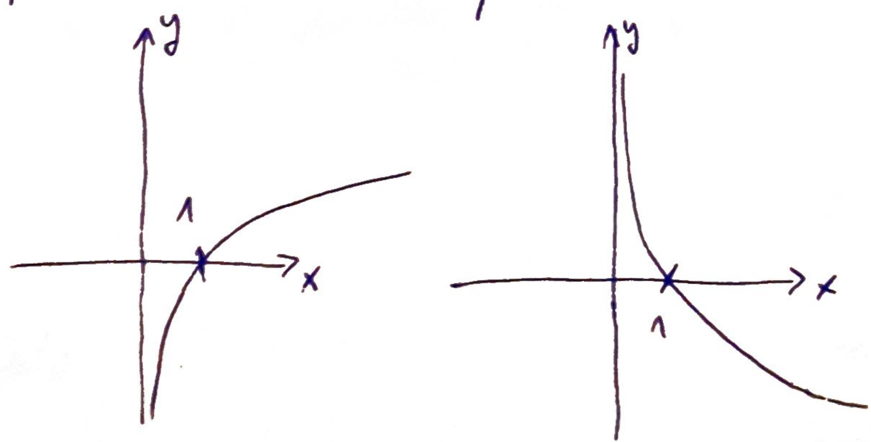
Logaritmická funkce $f: y = \log_a x$
$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$\boxed{a^y = x \iff \log_a x = y}$

$x > 0$

$\boxed{r = a^{\log_a r}}$

pro $a > 1$ pro $0 < a < 1$



[logaritmus o základu a z x se rovná y]

Př 1 Určete s pomocí grafů, které hodnoty jsou větší než 1

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$; $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{7}}$; $2{,}18^{0{,}001}$; $0{,}45^{0{,}4}$; $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{1{,}002}}$; $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-2}$

b) $\log_3 5$; $\log_{0{,}1} 0{,}2$; $\log_{82} 0{,}5$; $\ln\frac{1}{3}$; $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}}$

Při řešení logaritmických a exponenciálních rovnic využíváme známých vztahů pro mocniny:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r\cdot s} \qquad a^0 = 1$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad (a\cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\frac{1}{a^r} = a^{-r} \qquad \sqrt[r]{a^s} = a^{\frac{s}{r}}$$

$$\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$$

Z těchto vlastností plynou vlastnosti logaritmů:

$$\log_a r + \log_a s = \log_a (r\cdot s)$$

$$\log_a r - \log_a s = \log_a \left(\frac{r}{s}\right)$$

$$\log_a r^s = s \cdot \log_a r$$

$$\log_r t = \frac{\log_s t}{\log_s r}$$

Důkazy jsou snadné,

např. $\log_a r + \log_a s = \log_a (r\cdot s)$

platí: $r = a^{\log_a r}$

$s = a^{\log_a s}$

$$r\cdot s = a^{\log_a r} \cdot a^{\log_a s} =$$

$$= a^{\log_a r + \log_a s} =$$

$$= a^{\log_a (r\cdot s)}$$

POZOR! PŘI ŘEŠENÍ ROVNIC SI HLÍDEJTE PODMÍNKY!

např. pro $\log(x+1)$ platí $x+1>0$

- $3\cdot(4^x+9^{x+1}) = 2\cdot\left(3\cdot 4^{x+1} - \frac{9^{x+1}}{4}\right)$

$3\cdot 4^x + 3\cdot 9^x\cdot 9 = 2\cdot 3\cdot 4^x\cdot 4 - 2\cdot\frac{9^x\cdot 9}{4_2}$ $/\cdot 2$

$2\cdot 3\cdot 4^x + 2\cdot 27\cdot 9^x = 2\cdot 24\cdot 4^x - 9\cdot 9^x$

$63\, 9^x = 42\cdot 4^x$ $/: 4^x, : 63$

$\frac{9^x}{4^x} = \frac{42}{63}\frac{2}{3}$

$\left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{2}{3}$

$x = -\frac{1}{2}$

$K = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

- $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 = \log_{\frac{x^2}{9}} 3$ / změníme základy logaritmů na 3

$\frac{\log_3 3}{\log_3 x}\cdot\frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{x}{3}} = \frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{x^2}{9}}$

$\log_3 3 = a$

$3^a = 3 \Rightarrow a = 1$

$\frac{1}{\log_3 x}\cdot\frac{1}{\log_3 x - \log_3 3} = \frac{1}{\log_3 x^2 - \log_3 9}$

substituce $y = \log_3 x$

$\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y-1} = \frac{1}{2y-2}$ $/\cdot(y-1)\cdot y\cdot 2$

$2 = y$

$2 = \log_3 x$

$3^2 = x$

$x = 9$

$K = \{9\}$

Někdy využíváme logaritmus při řešení exponenciální rovnice

- $6 \cdot 6^x + \frac{6}{6^x} = 13 \quad / 6^x$ substituce $6^x = a$

$6 \cdot 6^x \cdot 6^x + 6 = 13 \cdot 6^x$

$6a^2 + 6 = 13a$

$6a^2 - 13a + 6 = 0$

$$a_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2 \cdot 6} = \frac{13 \pm 5}{12} \begin{cases} \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$6^x = \frac{3}{2} \quad /$ logaritmuji celou rovnici (nemůžu si vyjít „hezký“ x)

$\log 6^x = \log \frac{3}{2}$

$x \cdot \log 6 = \log 3 - \log 2$

$x_1 = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 6}$

$6^x = \frac{2}{3}$

$\log 6^x = \log \frac{2}{3}$

$x_2 = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 6}$

$$K = \left\{ \frac{\log 2 - \log 3}{\log 6} ; \frac{\log 3 - \log 2}{\log 6} \right\}$$

Př. 2 Řešte logaritmické a exponenciální rovnice a nerovnice

a) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = \frac{40}{3}$

b) $\sqrt[2x+7]{4^{13-x}} = 1024$

c) $3^{4x} - 3^{2x+2} = -9 + 3^{2x}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}} > 243$

e) $\log(x+1) + \log(x-1) - \log(x-2) = \log 8$

f) $\log x^{2\log\sqrt{x}} + \log\frac{1}{x^2} = 3$

g) $\log|x+1| < 1$