Vytváření představ a pojmů v matematice

Irena Budínová

Didaktika matematiky 1

Aritmetika

Didaktika matematiky

- Didaktika matematiky je vědní disciplína, která spojuje znalosti z odborné matematiky, obecné didaktiky, pedagogiky, ale také psychologie a sociologie, a implementuje je do reálné výuky matematiky.
- Didaktika matematiky navrhuje různé postupy do výuky a současně sleduje efekty těchto postupů.

Styly výuky

- Výukové styly dělíme dle toho, zda je výuka zaměřena na obsah nebo na žáka, na **transmisivní** a **konstruktivistický**.
- **Úkol:** Vyjmenujte charakteristiky těchto stylů výuky.

Teorie vývoje kognitivních funkcí dle Jeana Piageta

- Piaget ve své teorii o kognitivním vývoji rozděluje vývoj dítěte do čtyř stádií:
  - Senzomotorické stadium
  - Předoperační stadium
  - Stadium konkrétních operací
  - Stadium formálních operací
- Teorie dominovala v 60. a 70. letech 20. století.

Senzomotorické stadium

- Trvá od narození do přibližně dvou let
- Pozornost dítěte je zaměřena pouze k podnětu, který je schopno vnímat svými smysly
- Ke konci období nastupuje tvoření mentálních reprezentací – dítě začíná být schopno přemýšlet i o podnětech, které nemůže v daném okamžiku vnímat

Předoperační stadium

- Trvá přibližně od 2 do 6 let
- Dítě začíná aktivně rozvíjet mentální reprezentace
- V matematice se pojmy propojují s konkrétními objekty, se kterými se dítě setkalo – například trojúhelník je ten útvar, který byl dříve označen jako trojúhelník

Stadium konkrétních operací

- Trvá přibližně od 6 do 12 let dítěte
- Pro toto období je typický vývoj manipulace s vnitřními reprezentacemi. To znamená, že dítě nemá v mysli jen vzpomínky na objekty, ale s těmito vzpomínkami může vytvářet mentální operace (například dítě samo usoudí, zda je daný útvar trojúhelník, ačkoli doposud trojúhelníkem nazván nebyl)

Stadium formálních operací

- Začíná zhruba ve 12 letech
- Rozvíjí se operace s abstraktními pojmy
- Pojmy a symboly již nemusí být v konkrétní podobě

Poznávací proces v matematice podle Milana Hejného

- M. Hejný vychází z předpokladu, že poznávací proces začíná motivací žáka.
- Další činností žák získává konkrétní izolované poznatky, které na základě zkušenosti propojuje a zobecňuje:

Motivace ⇨ izolované modely ⇨ generický model procesuální ⇨ generický model konceptuální ⇨ abstraktní poznatek ⇨ krystalizace

- Ke krystalizaci dochází průběžně, v každé fázi poznávacího procesu
- V průběhu poznávacího procesu dochází ke dvěma **abstrakčním zdvihům**: mezi izolovaným modelem a generickým modelem dochází ke **zobecnění**, mezi generickým modelem a abstraktním poznatkem dochází k **abstrakci**.

Poznávací proces v matematice podle Milana Hejného

- **Izolovaný model** je konkrétní případ příští znalosti.
- V průběhu fáze izolovaných modelů dochází k tomu, že si žáci všímají souvislostí a ty potom odhalí.
- **Generický model** vzniká procesem zobecnění z komunity izolovaných modelů. **Procesuální generický model** je návod, jak proces pokračuje dále. **Konceptuální generický model** je obecná zákonitost.
- **Abstraktní poznatek** je ve školské matematice potřebný např. tehdy, když dochází ke změně obecného čísla na písmeno.

Motivace

- **Úkol:** Zavzpomínejte, které faktory pro vás byly na základní škole motivační a které naopak demotivační

Motivace

- Rozlišujeme motivaci vnější a motivaci vnitřní
- Vnitřní motivace vychází přímo z potřeb člověka. Jeho cílem je vlastní uspokojení.
- Vnější motivace je stav, kdy je člověk pod vlivem vnějších vlivů. Nejčastějšími faktory motivace jsou **odměna** a **trest**.

Motivace

- Některé pohledy jednoznačně upřednostňují vnitřní motivaci: žák se učí tehdy, když chce nebo to potřebuje
- Mnohdy vidíme, jak silným motivátorem jsou pro žáky například známky. U vnější motivace musíme ale počítat s tím, že žákovi nejde o učení samotné, ale právě o známky. Nebude mu tedy záležet na tom, zda poznatky nezapomene.
- Negativní motivace (strach z trestu) může na některé děti taky fungovat, ale obecně člověk pracuje více tehdy, když se může těšit na odměnu
- Některé pohledy zdůrazňují propojení vnitřní a vnější motivace

Motivace

- Zdroje vnitřní motivace v matematice
  - Matematika mi jde
  - Matematika mě baví
  - V hodinách matematiky zažívám pocit úspěchu aj.
- Zdroje vnější motivace v hodinách matematiky
  - V hodinách matematiky je příjemná atmosféra
  - Matematika je srozumitelně vyučována
  - Budu potřebovat matematiku na vyšším stupni vzdělávání aj.

Zavádění nových pojmů

- Žák obvykle vstupuje do každé fáze poznávacího procesu s již utvořenými, často naivními a nepřesnými, představami o pojmech, tzv. **prekoncepty**
- Jestliže jsou žákovy počáteční představy utvořeny chybně, říkáme jim **miskoncepce**
- Učitel zjišťuje žákovské představy o pojmech a dále je zpřesňuje, rozšiřuje a rozvíjí.

Zavádění nových pojmů

- **Úkol:** Zkuste si vzpomenout, jaké jste měli nesprávné nebo nepřesné představy o matematických pojmech
- **Úkol:** Jakými způsoby se žáci mohou seznamovat s novými pojmy?

Zavádění nových pojmů

- Pomocí izolovaných modelů
- Pomocí izolovaných modelů – obrázkem
- Pomocí izolovaných modelů – příklady a protipříklady
- Pomocí procesu (kružnice, rýsování čtverce)
- Pomocí obecného pravidla (lineární funkce)
- Slovně (definicí)

Zavádění nových pojmů

- **Matematická definice** je ekvivalence, na jejíž jedné straně je nový pojem a na druhé straně jsou pojmy dříve známé (Slovník školské matematiky, 1981). Např.: *Přirozené číslo se nazývá **sudé** právě tehdy, když má na místě jednotek některou z číslic 0, 2, 4, 6, 8*.
- Každá definice má svůj **obsah** (souhrn všech znaků, které jsou pro daný pojem charakteristické) a svůj **rozsah** (množina všech objektů, které mají vlastnosti stanovené obsahem).

Zavádění nových pojmů

- Pojmy vytváříme v určitém systému. Pro přehlednost provádíme **klasifikace (třídění) pojmů**. Klasifikace pojmů musí splňovat všechny atributy rozkladu množiny na třídy:
  - Třídění je nutno provádět vždy podle téhož znaku.
  - Třídění musí být vyčerpávající a úplné – musí zahrnovat všechny prvky příslušné množiny (rozsahu pojmu).
  - Jednotlivé třídy musí být navzájem disjunktní – každý prvek tříděné množiny je zařazen právě do jedné třídy.

Zavádění nových pojmů

- **Úkol:** vylosujte si ve skupině jeden pojem, pro který stanovíte:
  - Možnost zavedení v hodině matematiky
  - Matematickou definici
  - Provedete klasifikaci podle nějakého znaku

Zavádění nových pojmů

- Formální výuka definic je pro žáky málo efektivní. Spíše směřujeme k tomu, aby byl žák schopen definici říci sám, než aby se ji naučil odříkat.
- Žákovské definice bývají přirozeně nepřesné a naivní, obsahují různé chyby, které postupně odbouráváme.

Chybné definice

- **Definice nadbytečná** – obsahuje více znaků definovaného pojmu, než je nutné.
- **Definice široká** – obsahuje méně znaků, než je potřeba k definování pojmu.
- **Definice úzká** – obsahuje více znaků, než je potřeba k definování pojmu.
- **Definice kruhem** – první pojem se definuje pomocí pojmu druhého a vzápětí se druhý pojem definuje pomocí pojmu prvního.
- **Definice tautologií** – pojem se definuje pomocí sebe sama, i když v jiném vyjádření.

Chybné definice

- **Úkol:** Pojmenujte následující chybné definice:
- Čtverec je čtyřúhelník, který má všechny strany shodné, sousední strany navzájem kolmé a jehož úhlopříčky se půlí.
- Kružnice je množina bodů, které mají od daného pevného bodu stejnou vzdálenost.
- Rovnoběžník je čtyřúhelník, jeho protější dvojice stran jsou rovnoběžné a nejsou shodné.
- Číslo je dělitelné dvěma, je-li sudé. Sudé číslo je číslo, které je dělitelné dvěma.
- Dva geometrické útvary jsou podobné, když se podobají.

Matematická věta

- Matematickou větou rozumíme pravdivý výrok s konkrétním matematickým obsahem. Většina vět má tvar implikace, pokud platí implikace v obou směrech, je věta uvedena jako ekvivalence.

Matematická věta

- Pro jednu proměnnou můžeme matematickou větu zapsat symbolicky jako
$$(\forall x \in D)[A(X) \Rightarrow B(X)]$$
kde D je definiční obor výrokových forem, $A(x)$ se nazývá **předpoklad** a $B(x)$ **tvrzení** a říkáme, že věta je v podmínkovém tvaru. Každá věta má mít jasně vyslovený předpoklad.

Matematická věta

- Ve školské matematice se s matematickou větou setkáváme zřídka
- Příkladem jsou **kritéria dělitelnosti**:
  - Přesná věta: *Nechť n je přirozené číslo. Číslo n je dělitelné třemi právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný třemi.*
  - Zjednodušená věta: *Jestliže je ciferný součet čísla dělitelný třemi, pak je i dané číslo dělitelné třemi.*
- Poučky, které popisují nějakou proceduru, nejsou matematické věty.

Matematická věta

- Matematická věta se dokazuje.
- Na úrovni základní školy se důkazy obvykle neprovádějí, každé tvrzení by se však mělo ověřit.

Důkazy matematických vět

- **Důkaz přímý**: Přímý důkaz věty $A(x) \Rightarrow B(x)$ spočívá v tom, že vycházíme z toho, že předpoklad platí a vytvoříme řetězec implikací, které na sebe navazují.
- **Důkaz nepřímý**: místo věty $A(x) \Rightarrow B(x)$ dokážeme větu obměněnou $B'(x) \Rightarrow A'(x)$
- **Důkaz sporem**: Důkaz sporem je založen na skutečnosti, že nemůže platit současně nějaká věta a zároveň její negace. Předpokládáme, že věta $A(x) \Rightarrow B(x)$ neplatí, že platí její negace $(A(x) \Rightarrow B(x))'$
- **Důkaz matematickou indukcí**: Podkladem důkazu matematickou indukcí je jeden z Peanových axiomů aritmetiky přirozených čísel

Literatura

- Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. PdF UK.
- Hejný, M., Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Portál.
- Sternberg, R. J. (2002). *Kognitivní psychologie*. Portál.