Celá čísla ve výuce na základní škole

Irena Budínová

PdF MU

Celá čísla - historie

- V 5. století př. n. l. používali Řekové záporná čísla intuitivně jako mezivýsledky. Nezavedli je jako plnohodnotná čísla.
- V 7. století indický učenec Brahmagupta zavedl počítání s nulou a také zápornými čísly. Záporná čísla nazývá jako „dluh“ a kladná jako „zisk“. Zavedl pravidla, např. *Dluh odečtený od nuly je zisk* nebo *Součin nebo podíl dvou dluhů je zisk*. (Dělit nulou neuměl.)
- V 2. polovině 16. století musel Cardano využívat záporná čísla k výpočtům, když při řešení kubické rovnice objevil imaginární čísla. Cardano ale ještě neuměl se zápornými čísly správně počítat (hlavně násobení dvou záporných čísel).

Celá čísla - historie

- Evropští matematikové záporná čísla nepřijali dalších 200 let. Ještě v 18. století někteří významní matematikové, včetně Eulera, bojovali o přijetí záporných čísel do oficiální matematiky.
- Této souvislosti může učitel na ZŠ využít k tomu, aby si uvědomil, že také žáci nebudou mít intuitivní potřebu záporná čísla zavádět. Stejně jako matematici v průřezu staletí, budou žáci chybovat při operacích se zápornými čísly.

Zavedení záporných čísel na ZŠ

- V klasické výuce jsou záporná čísla zavedena v 7. ročníku. V alternativní výuce matematiky (např. Hejného metoda) se s intuitivním zavedením záporných čísel můžeme setkat mnohem dřív.
- Zavedení záporných čísel a operací s nimi může probíhat různými způsoby:
    - Pomocí **krokovacího pásu** (Hejného metoda, od. 1. stupně ZŠ, od odčítání k záporným číslům)
    - Pomocí **časové osy** (s využitím historických událostí)
    - Pomocí **číselné osy** (návaznost na krokovací pás)

Zavedení násobení dvou záporných čísel

- Násobení dvou záporných čísel není pro žáky představitelné, nemá oporu v reálných situacích.
- Proto hledáme oporu ve známých matematických zákonitostech:
  - Využití distributivního zákona
  - využití funkčního myšlení

Mnemotechnické pomůcky pro celá čísla – ano nebo ne?

- Často používaná mnemotechnická pomůcka:

$+ \cdot + = +$
$+ \cdot - = -$
$- \cdot + = -$
$- \cdot - = +$

- Jaká jsou úskalí této pomůcky?

Vyvození operací se zápornými čísly

- U násobení celých čísel je možné vytvořit si představu ve dvou případech:

$$2 \cdot 5 =$$
$$2 \cdot (-5) =$$

- Příklad $(-5) \cdot 2$ lze pomocí komutativnosti násobení převést na předcházející případ.
- Pro případ $(-5) \cdot (-2)$ nelze vytvořit představu založenou na reálných zkušenostech.

Vyvození operací se zápornými čísly

- Násobení dvou záporných čísel vyvoďte
  - Pomocí krokovacího pásu (Hejného metoda):
    - Jeden panáček jde: $5 + 3 - 1$
    - Druhý panáček jde: $5 - (-3 + 1)$
  - Na krokovacím pásu vymodelujte:
    - Jeden panáček: $8 + 2 \cdot (4 - 3)$
    - Druhý panáček: $8 + (-2) \cdot (-4 + 3)$
  - Pomocí distributivního zákona
  - Pomocí funkčního myšlení

Počítání se zápornými čísly

- Použití uvedené mnemotechnické pomůcky („minus a minus dá plus“) má často u žáků důsledky.
- Na následujících úlohách popište, jaké lze u žáků očekávat chyby:

$$-8-4=$$
$$11-28:(-7)=$$

- Další krok: propojení dosavadních číselných oborů do jednoho číselného oboru – racionální čísla

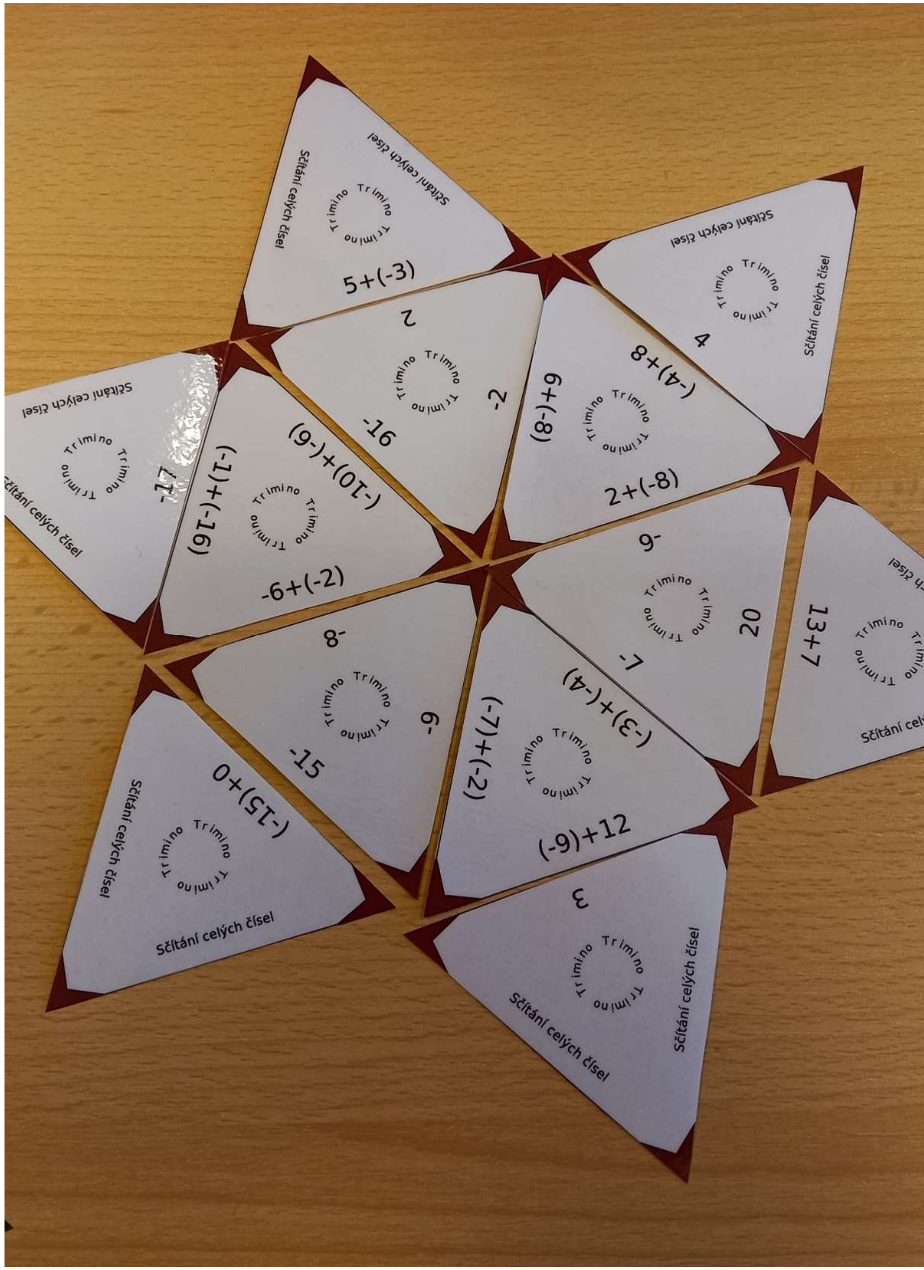
$$(3{,}5-0{,}2)\cdot 9{,}3+6{,}7\cdot(2{,}3-7{,}6)$$

- Problémové úlohy: Místo hvězdiček napište znaménka $+$ a $-$, aby platilo

$$21{,}6 * (-13{,}8) * 6{,}4 * [3{,}1 * (-2{,}7)] = 1$$

Operace se zápornými čísly - procvičení

- Vhodné je časté zařazování rychlých kartičkových her (domina, puzzle apod.)
- Na obrázku – trimino
- Své vlastní trimino si můžete vygenerovat na stránce https://schule.paul-matthies.de/Trimino.php



Absolutní hodnota celého čísla

- Zavedení na ZŠ pomocí geometrického významu absolutní hodnoty.
- **Definice:** Absolutní hodnota celého (reálného) čísla je celé (reálné) číslo, pro které platí:

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$
$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$
$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

- Uvedená definice není vhodná pro žáky na ZŠ.
- **Úkol:** promyslete, jak byste absolutní hodnotu žákům zavedli, aby pochopili její význam a uměli s ní správně počítat.

Počítání s absolutní hodnotou

- Žáci by se v závěru učiva měli setkávat s úlohami různé náročnosti, např.

$$-72 + |31 - (-62)|$$
$$|-3 \cdot (-2 + 15)| - (-21) + 2 \cdot |8 + (-3)|$$

- Promyslete pro tyto úlohy kritická místa, kde můžeme čekávat nejvíce chyb.

Absolutní hodnota – důkazové úlohy

- **Příklad:** Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla a, b platí:
  - a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
  - b) $|a + b| \leq |a| + |b|$
  - c) $|a| - |b| \leq |a - b|$
  - d) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Literatura

- Crilly, T. (2010). *Matematika – 50 myšlenek, které musíte znát*. Slovart.
- Hejný, M. (2014): *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. PdF UK.
- Krupka, P. (2002). *Sbírka úloh z matematiky.* Prometheus.
- Mareš, M. (2011). *Příběhy matematiky.* Pistorius a Olšanská.
- Rendl, M., Vondrová, N. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. UK.