Mocniny a odmocniny Reálná čísla na ZŠ

Irena Budínová

PdF MU

Zavedení pojmu druhá mocnina

- Pomocí izolovaných modelů:

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$6^2 = 6 \cdot 6 = 36$

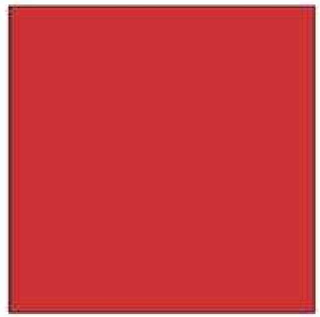
$4^2 =$

$1^2 =$

- Z pozorování: mocnina je jiný (zkrácený) způsob násobení.

Zavedení pojmu druhá mocnina

- Souběžně s aritmetickým vnímáním je vhodné zavést i geometrickou představu: mocnina je chápána jako obsah čtverce



Zobecnění pojmu

- Postupně se žáci setkávají s dalšími izolovanými modely a rovněž s vyšší mocninou:

  $(-2)^2$, $(-5)^2$, $(-7)^2$, 0^2

  $2{,}3^2$, $0{,}5^2$

  6^3, $(-3)^3$, 2^5

- Na některé jevy je třeba klást zvýšenou pozornost, zejména pravidla pro umocňování záporných čísel

  $(-2)^2$, -2^2

Mocnina – co se naučit zpaměti

- Druhé mocniny přirozených čísel od 1 do 20
- Třetí mocniny přirozených čísel od 1 do 10
- Mocniny čísel 10, 100, 1000, …
- Mocniny čísel 0,1, 0,01, 0,001, …

Pravidla pro počítání s mocninami

- Umocněte s využitím nějakého pravidla:

  85^2

  $12\,000^2$

  $0{,}016^2$

  119^2

  $(8 + 20)^2$

  $\left(\frac{5}{7}\right)^2$

  $(13 \cdot 6)^2$

Číselné výrazy

- Žáci upravují číselné výrazy, obsahující mocniny. Učí se, co sečíst (či odečíst) lze a co nelze. To pro ně bude podstatné v pozdějším učivu o algebraických výrazech.
- Vhodné je vytvářet propojení aritmetiky s geometrickým významem čísla a mocniny.
- Upravte výraz

$$3^2 + 2 + 2 \cdot 3 + 3^2$$

Určování druhé mocniny

- **Jak zjistíme mocninu:**
    - vypočítáme
    - pomocí kalkulačky
    - pomocí tabulek
    - pomocí některého z algoritmů (vzorcem $(a+b)^2$, geometricky)

Mocnina - definice

- Druhá mocnina reálného čísla a je nezáporné reálné číslo b, pro které platí $b = a \cdot a$.
- n-tá mocnina reálného čísla a, kde n je přirozené číslo, je takové reálné číslo b, pro které platí $b = a \cdot \cdots \cdot a$ (počet činitelů a je roven n). Číslo b je nezáporné pro sudá n.
- **Pojmy:** mocnina, základ, exponent (mocnitel)

Druhá odmocnina

- Jaké jsou příčiny velké abstraktnosti pojmu odmocnina?
- **Definice:** Druhá odmocnina z nezáporného čísla a je nezáporné číslo b, pro které platí $b^2 = a$.
- Je důležité uvědomit si dvě věci:
    1. Druhou odmocninu vždy určujeme z **nezáporného čísla**.
    2. Druhá odmocnina je vždy **nezáporné číslo**.
- **Pojmy:** odmocnina, základ odmocniny, odmocnítko

Některá pravidla pro druhou odmocninu

- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; neplatí $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$, resp. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $b \neq 0$; neplatí $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$
- Uvedené vlastnosti na ZŠ nedokazujeme, ale zavádíme pomocí množství konkrétních příkladů.
- Uvedených vlastností používáme k určování některých odmocnin, např. $\sqrt{1600}$ nebo $\sqrt{0{,}25}$.

Počítání s odmocninami

- Odmocněte bez použití kalkulačky nebo tabulek:

$\sqrt{441}$

$\sqrt{1024}$

$\sqrt{225\,000\,000}$

$\sqrt{0{,}0121}$

$\sqrt{0{,}064}$

$\sqrt{42{,}25}$

Určování druhé odmocniny

- zpaměti
- pomocí kalkulačky
- pomocí tabulek
- pomocí některého z pravidel (viz výše)
- Pomocí geometrického modelu

- Kde se ve výuce setkáme s druhou a třetí odmocninou?

Reálná čísla

- **Objev nesouměřitelnosti úseček** a tedy iracionality čísla $\sqrt{2}$**:** Pythagorejská škola, 6.–5. st. př. n. l.
- **Příklad:** Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ není racionální.
- **Číslo $\boldsymbol{\pi}$:** 3. st. př. n. l. Archimedes ze Syrakus, 1761 Lambert dokázal, že π je iracionální, 1882 Lindenmann ukázal, že je navíc transcendentní číslo.
- **Eulerovo číslo $\boldsymbol{e}$:** Objevilo se v 17. století v souvislosti s logaritmem a také v souvislosti s problematikou složeného úrokování.

Reálná čísla na ZŠ

- Na ZŠ se žáci setkají pouze s několika iracionálními čísly – $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$. Tato čísla jsou ale často zaokrouhlována, tj. $\sqrt{2}$ bývá nahrazována číslem 1,41 a číslo pí číslem 3,14.
- Absence poznatků o iracionálních číslech se projeví v učivu na SŠ a VŠ.
- **S čím se žáci mohou setkat na ZŠ:**
    - odvození hodnoty pí
    - interpolace hodnoty $\sqrt{2}$
    - zakreslování některých iracionálních čísel na číselnou osu

Nekonečno

- 2. pol. 19. st. – Georg Cantor: problematika množin se stejnou mohutností
- **Nekonečná spočetná množina:** množina všech přirozených čísel, lichých čísel, sudých čísel. Jak je to s množinami $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$?
- Množina reálných čísel – **kontinuum**.

Nekonečno

- **Kde se setkáme s nekonečnem ve školské matematice?**
  - Přirozených čísel je nekonečně mnoho (ve smyslu vždy můžu 1 přičíst).
  - Polopřímka je nekonečně dlouhá (ve smyslu polopřímku můžu dál a dál prodlužovat, potenciální nekonečno).
  - Na SŠ paradox s Achilleem a želvou (nekonečná číselná řada, aktuální nekonečno).
  - Na SŠ v souvislosti s funkčním myšlením.

Literatura

- Barrow, J. D.: Kniha o nekonečnu. Praha: Paseka, 2007
- Bečvář, J., Bečvářová, M.: Vývoj matematiky jako popularizační stimul. Praha: P3K, 2012
- Crilly, T.: Matematika – 50 myšlenek, které musíte znát. Praha: Slovart, 2010
- Rendl, M., Vondrová, N.: Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů. Praha: UK, 2013