Tento text slouží jako podpůrný text do cvičení v předmětu Didaktika matematiky 1. Není samonosný, protože jen doplňuje výuku z přednášky; ale měl by dodat dobrý obraz o tom, co studenti mají znát a umět na závěrečné písemce ve cvičení, a také by měl provést studenty samotným procvičením v průběhu semestru – aktivitami, které studenti budou provádět na cvičení.

Břetislav Fajmon, verze textu srpen 2024.

1 Týden 01: Úvodní informace, korektní mluva učitele, RVP pro první stupeň, problematika číselné osy

1.1 Úvodní informace

Doporučená literatura ke cvičení:

- Blažková: Didaktika matematiky se zřetelem na specifické poruchy učení. MUNI, Brno 2022. Kniha je ke stažení pro studenty na

  `https://munispace.muni.cz/library/catalog/book/2202.`

  Dobrá kniha o didaktice matematiky, ale řada věcí je tam především pro první stupeň. Nicméně i pro výuku druhého stupně lze některé věci čerpat.

- Krupka 2006: Sbírka úloh z matematiky, 1. díl (aritmetika a algebra). Nakladatelství Prometheus. Příklad dobré sbírky s řadou úloh základních i zajímavých.

- Řada učebnic pro druhý stupeň (6. až 9. ročník) ZŠ Odvárko-Kadleček. V každém ze čtyř ročníků existují tři učebnice, sbírka příkladů, metodický průvodce pro vyučujícího. Na učebnice se budu odkazovat následujícím způsobem:

  6) Odvárko-6a) opakování aritmetiky a geometrie; Odvárko-6b) desetinná čísla, dělitelnost; Odvárko-6c) úhel, trojúhelník, osová souměrnost, krychle a kvádr; Odvárko-6sb) sbírka pro všechny tři učebnice; Odvárko-6m) metodika pro všechny tři učebnice.
  7) Odvárko-7a) zlomky, celá čísla, racionální čísla; Odvárko-7b) poměr, přímá a nepřímá úměrnost, procenta; Odvárko-7c) shodnost, středová souměrnost, čtyřúhelníky a hranoly; Odvárko 7sb) sbírka pro všechny tři učebnice; Odvárko 7m) metodická příručka pro všechny tři učebnice.
  8) Odvárko-8a) mocniny a odmocniny, Pythagorova věta, výrazy; Odvárko-8b) lineární rovnice, základy statistiky; Odvárko-8c) kruh, kružnice, válec, konstrukční úlohy; Odvárko-8sb) sbírka pro všechny tři učebnice; Odvárko-8m) metodická příručka pro všechny tři učebnice.
  9) Odvárko-9a) soustavy rovnic, funkce, lomené výrazy; Odvárko-9b) jehlan, kužel, koule, podobnost, goniometrické funkce; Odvárko-9c) finanční matematika; Odvárko-9sb) sbírka pro všechny tři učebnice; Odvárko-9m) metodika pro všechny tři učebnice devátého ročníku.

- Řada pracovních sešitů Kočí, která doprovází (často v praxi) učebnici Odvárko, nebo může i být probírána samostatně, pokud občas se žáky prezentujete nové učivo, které berete z Odvárka nebo z učebnic, které žáci nemají k dispozici: Označení (POZOR, každý ročník má hřbet jiné barvy a v knihovně jsou odděleně vždy tři čísla u jiného žákovského ročníku): Kočí 6a (6. ročník, 1. díl, modrý hřbet), Kočí 6b (6. ročník, 2. díl, modrý hřbet), Kočí 6c (6. ročník, třetí díl, modrý hřbet), Kočí 7a (7. ročník, 1. díl, růžový hřbet), Kočí 7b (7. ročník, 2. díl, růžový hřbet), Kočí 7c (7.ročník, 3. dl, růžový hřbet), Kočí 8a (8.ročník, 1. díl, zelený hřbet), Kočí 8b (8. ročník, 2.díl, zelený hřbet), Kočí 8c (8. ročník, 3. díl, zelený hřbet), Kočí 9a (9. ročník, 1. díl, fialový hřbet), Kočí 9b (9. ročník, 2. díl, fialový hřbet), Kočí 9c (9. ročník, 3.díl, fialový hřbet).

- Řada učebnic pro druhý stupeň Nová škola, od autorů Jedličková-Krupka-Nechvátalová. Jedná se o sérii 16 učebnic a 16 pracovních sešitů, z toho poslední, šestnáctá učebnice a sešit ještě nevyšly (téma Finanční matematika je pokryto učebnicí Odvárko-9c)). Na učebnice se budu odkazovat následujícím způsobem (pozor, rozdělení učebnic pro ročníky není na učebnicích uvedeno, autoři doporučovali jakési pořadí, které ovšem během vydávání řady změnili – uvedeno je poslední doporučované pořadí; při odkazech na pracovní sešit budu namísto obratu „pracovní sešit“ do názvu přidávat slovo cvičebnice):

  6) Jedličková-6a) desetinná čísla; Jedličková-6b) kladná a záporná čísla; Jedličková-6c) dělitelnost; Jedličková-6d) základy geometrie;
  7) Jedličková-7a) souměrnosti; Jedličková-7b) zlomky a poměr; Jedličková-7c) procenta, trojčlenka; Jedličková-7d) rovinné útvary;
  8) Jedličková-8a) mocniny, odmocniny, výrazy a rovnice; Jedličková-8b) hranoly a válce; Jedličková-8c) konstrukční úlohy; Jedličková-8d) výrazy a rovnice II, soustavy rovnic;
  9) Jedličková-9a) úměrnosti a funkce; Jedličková-9b) podobnost, goniometrické funkce; Jedličková-9c) jehlany, kužely, koule; Jedličková-9d) finanční matematika;

- Řada učebnic pro prodloužená gymnázia Herman, Šimša, Jančovičová, Chrápavá; jedná se o 17 sešitů, v osmé třídě je sešitů pět, jinak jsou v dalších ročnících vždy čtyři sešity; učebnice obsahují dosti matematizované úlohy, nejsou v nich slovní úlohy ze života, na druhé straně obsahují řadu řešených i neřešených úloh ze soutěže Matematická olympiáda:

  6) Herman 6a) opakování; Herman 6b) záporná čísla; Herman 6c) dělitelnost; Herman 6d) souměrnosti;
  7) Herman 7a) racionální čísla a zlomky; Herman 7b) trojúhelník a čtyřúhelník; Herman 7c) hranoly; Herman 7d) výrazy – část 1;
  8) Herman 8a) rovnice a nerovnice; Herman 8b) kruhy a válce; Herman 8c) úměrnosti; Herman 8d) geometrické konstrukce; Herman 8e) výrazy – část 2;
  9) Herman 9a) rovnice a soustavy rovnic; Herman 9b) funkce; Herman 9c) podobnost a funkce úhlu; Herman 9d) jehlany a kužely.

- Řada učebnic Hejného: Šest učebnic A,B,C,D,E,F (jedna učebnice na dvě třetiny roku) a metodické příručky pro učitele AB, CD, EF; nezávisle na učebnicích i příručkách byly také vydány Hejného pracovní sešity A,B,C,D,E,F a Hejného klíče k pracovním sešitům kA, kB, kC, kD, kE, kF.

- Důležitá poznámka: Literatura ani slajdy nenahradí účast na přednášce, protože v nich nenajdete řešení jednotlivých příkladů – tj. jádro didaktiky, vlastní řešení příkladů zadávaných na slajdech, bude předáváno pouze na přednášce.

Časové rozdělení výuky: Výuka je rozdělena do přibližně 11 témat, se zřetelem na to, že jedna doba cvičení je obsazena svátkem a výuka se nekoná, a jeden týden je časovou rezervou z jakýchkoli důvodů. Očekávám, že studenti se budou na každé cvičení připravovat cca 2 hodiny – tuto dobu nelze moc zkrátit, spíše prodloužit, protože aby měla výuka didaktiky smysl, budete studovat průběžně a připravovat si úkoly a výstupy průběžně.

Podmínka zápočtu ze cvičení: Aktivní docházka do cvičení (s maximálně dvěma absencemi neomluvenými v IS) a úspěšně zvládnuté závěrečné písemky (na 60 a více procent), pravděpodobně se odehraje v pondělí 16. prosince 2024 v 10 hod, pokud seženeme učebnu, náhradní termíny až po vánocích.

Aktivní příprava na cvičení: Nedílnou součástí výuky didaktiky je aktivní zapojení do výuky samotné, tj. studenti mohou očekávat, že zhruba polovina času cvičení bude věnována jejich samostatné práci nebo jejich vlastním výukovým výstupům – výstupy budou jak hodnoceny na základě různých kritérií, tak jejich obsah (a následná diskuse) bude součástí závěrečné písemky, tj. studenti by měli sledovat vše, co se na cvičení odehrává, a naučit se znalosti, dovednosti, a v neposlední řadě zpracovat či ohodnotit každý výukový výstup – učit se sebereflexi nebo hodnocení výstupů (co si lze z výstupu vzít pro své didaktické vystupování, ať už se jedná o dobrý rys, kterému se máme učit, nebo nedůslednost, které se máme vyvarovat).

1.2 Korektní mluva učitele; korektní oddělení symbolů a čísel-operací; korektní oddělení textu a symbolického zápisu

Matematika se týká pojmů a metod, které se při řešení úloh z praxe a ze života a z jiných oborů lidské činnosti opakují, a v jejich přesném osvojení leží i zda při používání těchto pojmů v různých algoritmech napříč matematikou – proto čím dříve se žáci naučí důležitosti přesné mluvy, tím lépe pro ně do budoucna.

Pokuste se **soustředit na přesnou mluvu** už nyní ve výuce didaktiky matematiky, na cvičení i na přednášce. Není to hra, ale nácvik přesného vyjadřování nyní z nového důvodu – kvůli vašim žákům. Například můžete dávat pozor na následující věci:

- Důsledně rozlišujte číslo a číslice, neříkejte patnáctka, třicítka (ale: číslo 15, číslo 30); ale ani: dvojka, trojka (spíše: číslo 2, číslo 3). Koncovky u čísel 2, 3, 4, 5 skloňujte spisovně: dělitelnost dvě**ma**, ale tře**mi** čtyřmi, pěti.

- (Ad Blažková, str. 53-54) odbourejte moravské „více jak“ při porovnání čísel, správně je „více než“. V matematice se nevyskytuje „jak“, ale „jako“ ve frázi „stejně jako“, tj. právě při srovnání, kdy říkáme, že je něčeho stejně (obláčků je stejně jako hvězdiček)!!!!

- U desetinných čísel dbejte na pravidla výslovnosti, uvádějte správně desetinné řády a nevypouštějte je: nula celá, tři desetiny ... 0,3; nula celá tři tisíciny ... 0,003.

- Atd., cílem je učit žáky matematickým pojmům a k nim se vracet, používat tytéž pojmy v různých oblastech matematiky. Naučit se přesnému popisu je téměř stejně důležité jako dospět k přesnému výsledku – obojí je úkolem matematiky, přesný popis i přesná řešení úloh.

Podobná **korektnost by měla být i ve vyjadřování písemném a vyjadřování grafickém**. O tom bude více v průběhu celého kursu, budeme se učit psát na tabuli, abychom oddělili obrázky od textu a učinili písemný a grafický zápis pro žáky přehledný a srozumitelný. Nyní jen dvě drobnosti jako ukázka souhry přehledného obrázku a didaktického principu:

- Blažková, str. 54-55: a,b,c: Matematické znázornění (obrázek) nelze spojovat s matematickými symboly $<$, $>$, $=$.

- Str. 70, str. 82: chybné grafické znázornění sčítání a odčítání (u odčítání je kromě spojování obrázků a symbolů matematické operace ještě jedna didaktická chyba – najděte ji).

A v neposlední řadě, korektní zápis by neměl obsahovat slova a znak rovnítka na jednom řádku, a to ani v textu (při zápisu slovní úlohy), ani v obrázku. Znak „=“ je vyhrazen do rovnic nebo do výpočtů. Např. zápis „počet vagonů = 8“je nesprávný; správně zapisujeme pomocí tří teček „počet vagonů . . . 8“ nebo pomocí českých slov, např. „počet vagonů je 8“. Zkuste si na to v následujícím úkolu dát pozor.

Úkol 1-01: Nakreslete didakticky vhodný obrázek v následujících slovních úlohách na přirozená čísla, do kterého znázorníte strukturovaně údaje ze zadání (grafická podpora by měla žákovi pomoci úlohu správně vyřešit nebo provést zkoušku).

- (Jedličková 6a, str. 7) Vlak má osm vagonů, v každém je 104 míst k sezení. V první stanici nastoupily do vlaku tři skupiny žáků, které jedou na lyžařský kurs, celkem 284 osob. Ve druhé stanici nastoupilo dalších 63 cestujících. Všichni cestující sedí – kolik míst k sezení je ještě volných?
- (Jedličková 6a-cvičebnice, str. 6) Na začátku sezony proběhlo měření váhy a výšky pěti mladých atletů. Byly zjištěny tyto údaje: Aleš měří 159 cm a váží o 7 kg méně než Jirka; Tomáš je o 2 cm vyšší než Aleš a váží 55 kg; Martin měří 143 cm a váží o 9 kg méně než Tomáš; Jirka měří o 12 cm více než Tomáš a váží 67 kg; a Hynek měří o 7 cm více než Martin a váží o 15 kg méně než Jirka. Určete, a) kdo z chlapců je nejvyšší a který má nejnižší hmotnost; b) který z chlapců je vyšší než Hynek? c) Kdo váží méně než Hynek?

1.3 Rámcový vzdělávací program pro 1. stupeň

Na začátku šestého ročníku žáci navazují na znalosti z prvního stupně, je vždy důležité se podívat do RVP, co z prvního stupně znají, nebo se podívat např. do učebnice (Odvárko-6a), která opakuje první stupeň. *Zjistěme například, co žáci znají z prvního stupně o přirozených číslech.* V RVP pro první stupeň najdeme:

A) číslo a operace:
3.01: používá přirozené číslo jako model počtu prvků
3.02: čte a zapisuje přirozená čísla do 1000
3.03: porovnává přirozená čísla do 1000
3.04: přirozené číslo znázorní na číselné ose

B) závislosti, vztahy, práce s daty:
3.05: umí pracovat s jednotkami času
3.06: základy práce s tabulkami, schématy, posloupnostmi

C) geometrie v rovině a prostoru:
3.07: rozezná trojúhelník, čtverec, obdélník, kruh
3.08: rozezná krychli, kvádr, kouli, válec
3.09: pracuje s pojmem úsečka, délka úsečky

D) do třetí třídy v RVP nejsou žádné logické-nestandardní dovednosti

AA) číslo a operace:
5.01: provádí operaci sčítání do 1000 zpaměti i písemně
5.02: provádí operaci odčítání do 1000 zpaměti i písemně
5.03: provádí operaci násobení do 1000 zpaměti i písemně
5.04: provádí operaci dělení do 1000 zpaměti i písemně
5.05: využívá komutativitu a asociativitu při sčítání a násobení (**kdy to žáci využijí?**)
5.06: zaokrouhluje přirozená čísla a srovnává přirozená čísla mezi sebou
5.07: pomocí zaokrouhlení kontroluje výsledky některých operací s přirozenými čísly
5.08: řeší a tvoří slovní úlohy s přirozenými čísly užitím operací sčítání, odčítání, násobení, dělení.
5.09: rozumí a píše zlomek jako část celku (čitatel, jmenovatel ... musíme používat!)
5.10: porovná zlomky se stejným jmenovatelem
5.11: sečte a odečte zlomky se stejným jmenovatelem
5.12: přečte i zapíše zápis desetinného čísla (desetiny, setiny, tisíciny)
5.13: desetinné číslo vyznačí na číselné ose
5.14: chápe zápis celého čísla ($z = -5$)
5.15: celé číslo znázorní na číselné ose

BB) závislosti, vztahy, práce s daty:
5.16: pokročilejší práce s tabulkou: vyhledává a třídí data

CC) geometrie v rovině a prostoru:
5.17: Narýsuje trojúhelník, čtverec, obdélník, kružnici, úsečku, přímku
5.18: vyjádří obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran
5.19: sestrojí rovnoběžku či kolmici k dané přímce
5.20: určí obsah obrazce ve čtvercové síti (včetně základních jednotek obsahu)
5.21: znázorní osově souměrný útvar ve čtvercové síti (a určí osu souměrnosti přeložením papíru)

DD) nestandardní či aplikační úlohy:
5.22: řeší jednoduché logicko-nestandardní úlohy motivované praxí, které nezávisí na školských pojmech (používá logiku s cílem zorientovat se, najít cestu k cíli či k vyřešení

problému)

RVP pro druhý stupeň používá velmi strohý popis, sice uvádí výstupy, ale nesděluje, jakou cestou je dosáhnout. Proto je pro každého učitele druhého stupně důležité sestavit podrobnější přehled dílčích kroků (mělo by být v ŠVP každé školy). Určitou předběžnou pomocí v sestavení přehledu konkrétnějších znalostí a dovedností žáka v tom správném pořadí by mohl být text

`https://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/20617/METODICKE-KOMENTARE-K-OBORU-MATEMATIKA-A-JEJI-AP`

(zkuste najít ikonku STÁHNOUT dole pod článkem), kde se dovednosti z RVP ověřují podle tzv. indikátorů (naznačitelů, zda bylo daných dovedností z RVP dosaženo). Podle mne ovšem přehled těchto indikátorů nebo dovedností není vyčerpávající. Toto téma je nepovinné, materiál nebude zkoušen, ale může být dobrou inspirací kromě ŠVP k sestavení vlastního přehledu dílčích dovedností v matematice, které se žáci mají naučit.

1.4 Využití číselné osy při výuce

Jedním z klíčových grafických modelů používaných v matematice je model číselné osy, kde každému číslu, se kterým se žáci setkávají, odpovídá jeden konkrétní bod této osy. Bod na geometrickém útvaru přímky je obrazem čísla. Na číselné ose lze ilustrovat řadu matematických pojmů při reprezentaci čísel a práci s čísly, jako například:

- Různé číselné množiny, jako jsou přirozená čísla, celá čísla (záporná celá čísla, nula, kladná celá čísla), desetinná čísla, zlomky a racionální čísla, iracionální čísla;
- Porovnání čísel, tj. např. kdy je jedno číslo větší než druhé;
- Zaokrouhlování čísel na daný řád;
- Sčítání a odčítání čísel;
- Násobení a dělení čísel;

Na druhé straně, jestliže naopak máme přímku, na které zvolíme jednotku délky jako délku úsečky, jejímž počátečním bodem je obraz čísla 0 a koncovým bodem obraz čísla 1, to nám umožňuje číselně popsat geometrické vlastnosti této přímky, jako je například:

- Vzdálenost libovolného bodu přímky od obrazu čísla 0 pomocí pojmu absolutní hodnota;
- Vzdálenost mezi dvěma body přímky jako rozdíl dvou čísel, jejichž obrazy jsou dané dva body.

Úkol 1-02: Splňte následující úkoly nejprve bez číselné osy, a poté navrhněte (prakticky realizujte u tabule) stejné úkoly s využitím číselné osy (s podporou číselné osy):

- Jak porovnáváme přirozená čísla?
  - **i)** vysvětlete bez číselné osy (vzorově, včetně zápisu na tabuli): a) porovnejte čísla 3286 a 3187; b) porovnejte čísla 48876 a 6578.
  - **ii)** vysvětlete úkol (i) na tabuli s podporou číselné osy.

- Jak zaokrouhlujeme přirozené číslo na daný řád?
  - **i)** vysvětlete bez číselné osy (vzorově, včetně zápisu na tabuli): a) zaokrouhlete číslo 43875 na stovky; b) Zaokrouhlete 5999 na desítky.
  - **ii)** vysvětlete úkol (i) na tabuli s podporou číselné osy.
- Jak sečítáme dvě celá čísla?
  - **i)** vysvětlete bez číselné osy (vzorově, včetně zápisu na tabuli): a) sečtěte celá čísla 27 a 318; b) sečtěte celá čísla (-256) a 78.
  - **ii)** vysvětlete úkol (i) na tabuli s podporou číselné osy.

2 Týden 02

2.1 Přímý důkaz implikace v algebře

- V čem spočívá přímý důkaz logické implikace $A \Rightarrow B$?
- Dokažte, že pro každé přirozené n platí: $3|n \quad \Rightarrow \quad 3|n^2$.
- Dokažte, že pro přirozená čísla a, b platí: $(3|a \quad \wedge \quad 3|b) \quad \Rightarrow \quad 3|(a+b)$.

Úkol 2-01: Dělitelnost přirozených čísel lze přesně zjistit tím, že čísla vydělíme. U větších čísel namísto toho používáme kritéria, pomocí nichž se dozvíme o dělitelnosti přirozeného čísla jiným přirozeným číslem rychleji. V následujících kritériích dělitelnosti je jedna důležitá věc, která je nečiní příliš vhodnými jako ilustrace přímého důkazu implikace – lepší ilustrací by byl důkaz Thaletovy věty. Kritéria dělitelnosti totiž nejsou vyslovena jako implikace, ale jako ekvivalence.

- Dělitelnost přirozeného čísla čtyřmi: a) vyslovte kritérium dělitelnosti formou logické implikace; b) zdůvodněte toto kritérium pro číslo 175234.
- Dělitelnost přirozeného čísla osmi: a) vyslovte kritérium dělitelnosti formou logické implikace; b) zdůvodněte toto kritérium pro číslo 967312.

2.2 Nepřímý důkaz implikace v algebře

- Definujte prosté zobrazení. Tato definice souvisí s důkazem nepřímým tak, že ji lze formulovat jiným logicky ekvivalentním způsobem – jakým?
- V čem spočívá NEpřímý důkaz logické implikace $A \Rightarrow B$?
- Dokažte nepřímo: Pro přirozené číslo n platí: $3 \not| \, n^2 \quad \Rightarrow \quad 3 \not| \, n$.

Úkol 2-02: Nějaké „nepřímé“ uvažování se na ZŠ objevuje v matematických soutěžích, např.: Pomozte žákům VYŘEŠIT a ZDŮVODNIT následující úlohy ze soutěže Matematický klokan, kategorie benjamín pro 6.-7.ročník (z nabídnutých pěti odpovědí je právě jedna dobře).

- Úloha a) Adam, Bedřich a Cyril chodí denně na procházku. Jestliže Adam NEMÁ čepici, potom Bedřich MÁ čepici. Jestliže Bedřich NEMÁ čepici, potom Cyril MÁ čepici. Bedřich dnes nemá čepici – kdo dnes má čepici?
  - **(A)** Adam a Cyril

  (B) jen Adam
  (C) jen Cyril
  (D) ani Adam, ani Cyril
  (E) nelze určit

- Úloha b) Robert učinil pět prohlášení, z nichž právě jedno je lež – které?
  (A) Můj syn Petr má 3 sestry.
  (B) Moje dcera Anna má 2 bratry.
  (C) Moje dcera Anna má 2 sestry.
  (D) Můj syn Petr má 2 bratry.
  (E) Mám 5 dětí.
- Úloha c) Maruška, Petr, Ríša a Tina hráli ve třídě fotbal a rozbili okno. Když se paní ředitelka zeptala, kdo to udělal, dostala následující odpovědi:
  (M) Maruška: Byl to Petr.
  (P) Petr: Byl to Ríša.
  (R) Ríša: Já to nebyl.
  (T) Tina: Já to nebyla.

  Právě jedno z dětí mluvilo pravdu. Kdo rozbil okno?

Možný nepovinný úkol: Jedličková 6a-cvičebnice, str. 28, představuje logickou hádanku griddler (barvení políček v gridu neboli mřížce, jehož cílem je po vybarvení zadaného počtu polí v každém sloupci a řádku mřížky nakreslit obrázek). Seznamte se s pravidly této aktivity, popřípadě zkuste na stránce griddlers.net sestavit několik nejjednodušších griddlerů, například zvolte černobílé malé, seřazení podle data a vzestupně, což je

`https://www.griddlers.net/cs_CZ/nonogram/-/g/p0/pp30/ta/sa/va/th0/i30/s0-15/c2-2/p1-1/d`

(zamyslete se nad tím, jak tuto logickou aktivitu představit žákům, a připravte si hodinu řešení griddlerů pro žáky).

Úkol 2-03: Měli byste si na prověrce poradit s následujícími jednoduchými důkazy přímými nebo nepřímými:

- Dokažte důkazem přímým: Jestliže s je přirozené číslo, které vznikne jako součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 (tedy $s = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$), tak s je dělitelné sedmi.
- Dokažte důkazem přímým: Jestliže je přirozené číslo liché, tak jeho druhá mocnina zmenšená o číslo 1 je dělitelná osmi.
- Dokažte důkazem přímým: Jestliže a, b jsou lichá přirozená čísla, pak rozdíl jejich druhých mocnin je dělitelný osmi.
- Dokažte důkazem přímým: Jestliže a, b, c jsou přirozená čísla bezprostředně po sobě jdoucí a a, c jsou lichá, tak součet $(a + b + c)$ je dělitelný šesti.
- Dokažte důkazem nepřímým: Pro každé celé číslo z platí: Jestliže $7z - 8$ je sudé, tak také z je sudé.
- Dokažte důkazem nepřímým: Pro každé celé číslo z platí: Jestliže $(z^2 + 4)$ není dělitelné pěti, tak platí, že ani $(z - 1)$, ani $(z + 1)$ není dělitelné pěti.

3 Týden 03

3.1 Důkaz sporem

- Dokažte sporem, že odmocnina ze dvou není racionální číslo (odmocnina ze tří není racionální číslo).
- Dokažte sporem implikaci: Jestliže $a \in Q \quad \wedge \quad b \in R \setminus Q$ (tj. a je racionální číslo, b je reálné iracionální číslo), tak $(a + b) \notin Q$.

Nepovinná část: Nejen do problematiky důkazu sporem, ale do řady výroků s logickými spojkami a jejich pravdivostního ohodnocení lze žáky uvést na základě knihy Raymonda Smullyana Jak se jmenuje tahle knížka? (najdete v knihovně). Pro uvedení do pravdivostních hodnot (pravda – nepravda) doporučuji kapitoly 3 (o poctivcích a padouších), 4 (Alenka v lese zapomínání), 5 (záhada Porciiných skříněk), pravdivostí implikace se pak zabývá kapitola 8 (logické hádanky). Předností knihy je to, že řešení všech hádanek je podrobně vysvětleno.

Nepovinná část: Podobně řadu logických hádanek najdete v knihovně v knize Pěnčík, Pěnčíková: Lámejte si hlavu, Prometheus 1995, str. 137-150, na konci knihy je řešení. Ale pozor, v knihovně kniha nebyla uveřejněna v polici s matematikou, ale v nějaké samostatné polici, sledujte vyhledávací kódy, abyste ji našli.

3.2 Důkaz úplnou matematickou indukcí versus induktivní zkoumání

- Popište důkaz úplnou matematickou indukcí: Výroky jakého typu dokazuje? Z jakých dvou částí se skládá?
- Úplnou matematickou indukcí dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí rovnost:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

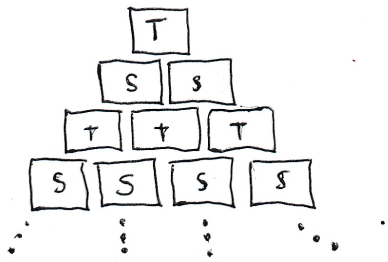
Úkol 3-01: Proveďte žáky následujícími úlohami, tj. i) vyřešte je sami; ii) připravte si otázky, na jejichž základě žáky k řešení dovedete, ne abyste jim sami všechno řekli.

- Úloha a) Čemu se rovná součet prvních sto přirozených čísel, tj. čísel 1 až 100?
- Úloha b) Čemu se rovná součet prvních tisíc přirozených čísel, tj. čísel 1 až 1000?
- Úloha c) Čemu se rovná součet prvních 251 přirozených čísel, tj. čísel 1 až 251?
- Úloha d) Úlohu a,b,c zopakujte pro součet pouze lichých přirozených čísel, například i) čemu se rovná součet prvních sto lichých přirozených čísel, tj. číslo $s = 1 + 3 + 5 + \cdots + 199$? i) čemu se rovná součet prvních tisíc lichých přirozených čísel, tj. číslo $s = 1 + 3 + 5 + \cdots + 1999$? iii) čemu se rovná součet lichých přirozených čísel $s = 1 + 3 + 5 + \cdots + 421$?

Úlohy úkolu 3-01 nejsou totožné důkazu indukcí, ale jsou blízké jeho prvnímu kroku: Prozkoumáváme výrok či řešíme úlohu pro některá konkrétní přirozená čísla, nikoli obecně. Mohli bychom říci, že v předchozích úlohách děláme tzv. induktivní zkoumání pro různé konkrétní hodnoty přirozeného čísla. Podobné induktivní zkoumání dělají žáci v některých logických příkladech na konci pátého ročníku v přijímacích zkouškách na osmiletá gymnázia; pomozte jim s řešením v následující úloze:

Úkol 3-02 Vyřešte následující úlohy nejprve sami, a pak k řešení doveďte i žáky vhodnými otázkami (viz Cermat, didaktický test z roku 2022, poslední příklad):

- Pyramida se skládá ze světlých a tmavých čtverců, barvy v řadách se střídají a každá další řada má o jeden čtverec více než řada nad ní.



  a) Pyramida má 10 řad: o kolik se liší počet tmavých a světlých čtverců v pyramidě?

  b) Pyramida má 73 řad: o kolik se liší počet tmavých a světlých čtverců v pyramidě?

  c) V pyramidě je o 101 světlých čtverců méně než tmavých. Kolik má pyramida řad?

- Podobná úloha viz test z roku 2024, příklad 14 na poslední straně:

  `https://prijimacky.cermat.cz/files/files/MA_2024_5A_TSx.pdf`

4 Týden 04

4.1 Dělitelnost přirozených čísel – příprava hodiny

Dnes se budeme zabývat zásadami při přípravě hodiny, připravíme plán na dvě po sobě jdoucí hodiny na téma „dělitelnost přirozených čísel“. První přípravu budeme dělat všichni společně, druhou přípravu budete dělat ve skupinách. Nejprve plánujeme úvodní hodinu na téma dělitelnost:

- Vezměte si stránku A4 a rozdělte na tři sloupce, první a třetí jsou trochu užší, asi jen čtvrtinu šířky, prostřední je nejširší a zabírá polovinu šířky stránky (lze modelovat na tabuli): první sloupec: POJMY, které mají žáci umět; druhý sloupec: ZÁKONITOSTI-CHYBY-DOPORUČENÍ, tj. zde píšete věty, poučky, vzorce a algoritmy, možné chyby a strategie, jak chybám zabránit, a doporučení, jak mají žáci postupovat; třetí sloupec: DOVEDNOSTI, které chcete žáky naučit (a čísla příkladů, které tyto dovednosti použijí).
- Projděte učebnici Odvárko 6b, str. 50,51, 52, jen oddíl 7.1, a do prvního sloupce přípravy vypište pojmy, které máte v oddílu zopakovat-naučit.
- Projděte opět oddíl 7.1 a vypište potřebné dovednosti – a u těchto dovedností si napište čísla příkladů, které tyto příklady použijí ... u většiny dovedností bude více příkladů (tutéž dovednost nevypisujte dvakrát, vaším cílem je napsat posloupnost dovedností, jak se je žáci mají ideálně učit podle návrhu sestaveného v učebnici; každá dovednost je v této posloupnosti napsaná právě jednou).
- Vyberte si tři až čtyři dovednosti, které na hodině zopakujete-naučíte (VÍCE NEŽ DVĚ dovednosti nelze v jedné hodině stihnout naučit nově, ale můžete kromě nových dvou zakomponovat opakování dovedností starších), a u každé dovednosti vyberte dva příklady, tak abyste z celé učebnice měli vybráno šest až osm příkladů (podle toho, zda jsou dovednosti tři nebo čtyři), tj. ke každé dovednosti zhruba dva příklady – tyto příklady budou jádrem připravované hodiny.
- Zbývá dokončit nejširší, prostřední sloupec:
  - Přemýšlejte o zákonitostech nebo postupech, které chcete žákům prezentovat; napište je do prostředního sloupce.
  - Přemýšlejte o možných chybách, kterých se mohou žáci dopustit. Na základě toho dodejte příklady „chytáky“, které by mohly vyzkoušet, zda žáci pochopili pojmy správně a příklady řeší správně.
  - Už při přípravě, nebo možná někdy i se žáky ve výuce formulujte doporučení, která jim pomohou se chyb vyvarovat. Tato doporučení už nejsou novými algoritmy, ale např. návrhem, jak si žák má zorganizovat zápis, aby se vyvaroval chyb; jak má postupovat v některých algoritmech, aby se vyvaroval chyby, apod.
- Na přípravě byste měli mít odděleno různými barvami či označením, které příklady hodiny jsou základní a musí je stihnout všichni, popřípadě pokud nestihli na hodině, musí si je za domácí úkol doplnit všichni; a které jsou nadstavbové nebo zajímavé a jsou jen pro zpestření nebo nadstavbu pro rychlejší studenty, a v žádném případě je nemusí dělat všichni. Do sloupečku „cíle hodiny“ pro provázejícího vyučujícího opište dovednosti z posledního sloupce své přípravy.

Úkol 4-01 Nyní se ocitáme o rok dále, namísto šesté třídy a tématu dělitelnosti jsme v sedmé třídě u tématu zlomky: Na základě Odvárko 7a, str. 7-8 (vydání 2004) připravte třetí hodinu na zlomky v pořadí, kde první hodina prošla strany 3-4 a druhá hodina prošla strany 5-6. Za danou skupinu vyberte či sestavte jednu variantu přípravy a pošlete vyučujícímu do 24 hodin od jejího zadání.

Pokud byste měli pro vytvoření hodiny málo nápadů a příkladů, přidejte si ještě sešit Kočí 7a, str. 46-48 (Vydání 2011). Podrobnější zadání: Žáci prošli minulé dvě hodiny následující věci:

zlomky – hodina 01: Odvárko 7a, str. 3-4, Kočí 7a, str. 46-47, cvičení A2, A4, A5, A6, A8. Za domácí úkol je Odvárko, str. 4, příklady 5-7. Byly probrány dovednosti:

- Žák ví, že zlomek vyjadřuje poměrnou část celku (počet vybraných (šrafovaných) stejných částí (vyjádřených čitatelem) při rozdělení celku na stejné části (počet všech částí celku je vyjádřen jmenovatelem)).
- Žák dokáže zlomek zapsat a přečíst a zná význam čitatele a jmenovatele.

zlomky – hodina 02: Odvárko 7A, str. 4-6, učitel zkontroluje domácí úkol, tři rámečky na str. 4-5 si žáci zapíší do sešitu, jeden žák čte zlomky ze str. 4, cvičení 3B, ostatní zapisují na tabulky. Pak udělají E,F na str. 5-6 (zlomky větší než jeden celek), popřípadě zlomky na číselné ose, část A (tj. str. 6 dole, str. 7 nahoře). Do Kočího nepíší dnes nic. Byly probrány dovednosti:

- Žák zná některé speciality zápisu zlomku (jmenovatel zlomku nesmí nikdy být roven nule; jestliže je čitatel roven nule, zlomek je roven nule; jestliže je čitatel roven jmenovateli, zlomek je roven jedné)
- Žák si je vědom, že čitatel zlomku může být větší než jmenovatel, uvažujeme-li větší počet celků (např. více pecnů chleba, které poměrně dělíme; více čtvercových kartiček, kterou každou dělíme na devět poměrných částí, a podobně).

zlomky – hodina 03: Tuto hodinu prosím připravte, společně se seznamem dovedností, které chcete naučit. Zadání provázejícího vyučujícího je toto: Odvárko, str. 7-8, procvičte prosím ze cvičení 2 až 9 ta, která uznáte za vhodné. Můžete přidat i něco z Kočího 7a, str. 48, ale není to nutné. ... PŘIPRAVTE HODINU NA TOTO TÉMA! Uzavřete dovednostmi, které byly probrány (ve cvičeních jsou minimálně dvě další dovednosti): Mezi nové dovednosti nepočítejte převody základních jednotek, to je tématem šesté třídy, ale určitě se v těch cvičeních vyskytují dovednosti, které ještě nebyly naučeny. Byly probrány dovednosti:

-
-

5 Týden 05: Zlomek jako část celku; zlomek jako racionální číslo (krácení a rozšiřování zlomků); sčítání a odčítání zlomků

V této hodině zopakujeme pojetí zlomku z páté třídy, které se opakuje v šesté třídě; ale už také se podíváme na sčítání zlomků o různých jmenovatelích, které se probírá až v sedmé třídě, kdy žáci už umí hledat nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel (tj. učí se pak najít nejmenší společný jmenovatel dvou zlomků).

- Všichni byste určitě dokázali uvést tři příklady, ve kterých byste v šesté třídě zopakovali pojetí zlomku jako části celku z páté třídy:
  - a) připravte si dva příklady na téma (a odučte je): zlomek jako poměrná část koláče nebo zlomek jako poměrná část čokolády (pokud je to možné, lepší je vždy použít model čokolády, protože určovat část koláče pomocí obrázku je mnohem náročnější),
  - b) připravte si a odučte příklad na téma: rozdělení litru minerálky do pěti sklenic,
  - c) připravte si dva příklady na téma (a odučte je): počet minut jako poměrná část hodiny.

  Zkuste pak na těchto příkladech vysvětlit, i) kdy se rovná zlomek nule, ii) že ve zlomku se nesmí jmenovatel rovnat nule, iii) kdy se zlomek rovná jedné, iv) kdy je zlomek větší než jedna, v) že každé přirozené číslo lze napsat zlomkem (tj. množina přirozených čísel je podmnožinou množiny zlomků).

- Vysvětlete graficky (na příkladu ze života), že $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$, ale také $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$, a že tedy i $\frac{8}{14} = \frac{12}{21}$. Grafickou reprezentaci zvolte co možná nejlepší (vysvětlete, proč je nejlepší).

Úkol 5-01 Připravte si jednu hodinu na téma SČÍTÁNÍ ZLOMKŮ a připravte pět příkladů v tom správném pořadí metodické řady, kdy od jednodušších variant přicházíte k těm složitějším (viz přednáška). Při výpočtech pak použijte metodu náhrady jednoho zlomku jiným (viz přednáška).

Zaměřte se přitom na (zadání vyučujícího): vyvrcholením hodiny ať je vysvětlení toho nejnáročnějšího příkladu, a totiž hledání nejmenšího společného jmenovatele při součtu zlomků – pokuste se i o grafickou podporu tohoto vysvětlení.

Chci se při výstupu zaměřit na (zadání studenta, tj. uveďte jednu věc, na kterou byste se chtěli při této hodině, kterou si máte připravit a prezentovat, zaměřit – tuto věc sdělíte předem vyučujícímu): ....

1 ......Michal Vašíček, Veronika Profotová................................

6 Týden 06: Desetinná čísla; jak je názorně zavést; zlomek jako zápis dělení, písemné operace s desetinnými čísly, převody jednotek

- Poznámka: Žákům někdy dělá problémy to, že řád desetin a řád desítek (nebo: řád setin a řád stovek; nebo: řád tisícin a řád tisíců) jsou navzájem symetrické vzhledem nikoli k desetinné čárce desetinného čísla, ale vzhledem k řádu jednotek. Proto je potřeba procvičovat tyto „podobně znějící“ názvy řádů, zda v nich žáci nedělají chybu (vzhledem k desetinné čárce, která není středem souměrnosti). O dalších častých chybách a reedukačních postupech v celku „desetinná čísla“ viz Blažková, str. 113-117.

- Definujte pojem desetinné číslo (viz přednáška).

- Jak poznáme, že daný zlomek v základním tvaru lze převést na desetinný zlomek? (toto nevím, zda jste si na přednášce říkali, ale zkuste na to přijít, když projdete několik příkladů)

- Zkuste najít v učebnici Odvárko 7a dva způsoby, jak daný zlomek v základním tvaru převést na desetinné číslo (pokud to je možné).

Úkol 6-01 Připravte části hodiny pro šestou třídu s následujícími tématy: Předpokládejte, že desetinná čísla jste zopakovali či vysvětlili v minulé hodině, včetně sčítání desetinných čísel. Připravte část hodiny, která navazuje a procvičí grafickou názornost desetinných čísel a operaci sčítání desetinných čísel: Každá dvojice žáků v lavici dostane čtverečkový papír se 20x20 čtverečky, z něj vystřihne čtyři čtverce 10x10, z nichž každý představuje jednu jednotku. Dvě jednotky nechejte vcelku, třetí jednotku rozstříhejte na desetiny, čtvrtou jednotku rozstříhejte na sedm desetin a třicet setin.

A nyní vyučující nadiktuje žákům ve dvojici desetinné číslo, které lze vymodelovat – jeden žák ze dvojice toto číslo jen zapíše na papír, druhý žák ve dvojici číslo vymodeluje pomocí nastřihaných čtverců a jejich částí. Až jsou oba hotovi, žák s napsaným číslem zvedne toto číslo nad hlavou, aby jej učitel přečetl (ideální je použít zalaminovaný bílý papír a fixy, aby žák každé číslo mohl smazat a psát dostatečně velké číslice nanovo). Vyučující diktuje: .... navrhněte čtyři desetinná čísla, která nadiktujete.

Další část aktivity: vyučující nadiktuje žákům dvě desetinná čísla, která oni sečtou a modelují až výsledek součtu, jeden žák píše a zvedá nad hlavu výsledek, druhý modeluje výsledek. Desetinná čísla musí být taková, aby byl výsledek vymodelovatelný pomocí nastříhaných čtverců a jejich částí. ... Navrhněte čtyři dvojice čísel, které sečtete.

Zaměřte se přitom na (zadání vyučujícího): Rozdejte žákům pomůcky a nůžky, a veďte je při přípravě nastříhání čtverců a jejich částí, aby měli všichni nastříháno stejně – jedná se jen o zorganizování třídy a přípravu aktivity, aby všechny dvojice byly nachystány.

Chci se při výstupu zaměřit na (zadání studenta, tj. uveďte jednu věc, na kterou byste se chtěli při této hodině, kterou si máte připravit a prezentovat, zaměřit – tuto věc sdělíte předem vyučujícímu):

2.......Mikuláš Vašíček, M.B. Illichmanová........**čtvrtek 01**...Eliška Cejpková, Kristýna Skřeková.............

Úkol 6-02 Připravte část hodiny, na které prezentujete dvě pomůcky pro převody jednotek ... násobení a dělení desetinného čísla násobky čísla deset (první pomůcka viz Blažková, str. 166-167, druhá pomůcka viz Jedličková 6a (desetinná čísla), kapitola 9, str. 36-44).

Zaměřte se přitom na (zadání vyučujícího): představte model nějak na tabuli, můžete využít i magnetky a papíry u modelu mřížky, nebo model nakreslit na tabuli před výstupem (vyučující studenty předtím nějak zaměstná).

Chci se přitom zaměřit na (zadání studenta, tj. uveďte jednu věc, na kterou byste se chtěli při této hodině, kterou si máte připravit a prezentovat, zaměřit – tuto věc sdělíte předem vyučujícímu):

3......Dominik Coufal, Matěj Šálek...................**čtvrtek 02** Radek Burian, Šimon Zouhar

7 Týden 07: násobení a dělení zlomků; lineární model a aritmetická metoda

V úlohách násobení a dělení zlomků a úlohách řešených aritmeticky (tj. bez rovnic, jen s pomocí operací sčítání, odčítání, násobení a dělení, dále je povolená grafická podpora lineárního modelu) znázorňujeme už počet a množství lineárně, tj. například ne pomocí čokolády o 4x5 tabulkách – tyto modely čokolád se budou více používat už při dvourozměrných úlohách obsahu plochy. Žáci se musí naučit pracovat s tzv. lineárním modelem, kdy všechna čísla a množství znázorňují graficky „jednorozměrně“, lineárně (pomocí úsečky).

- Dvě pětiny ze šedesáti (zlomek zde hraje roli operátoru) musí žáci umět určit a) přes vyjádření jedné pětiny z celku (to budou vždy potřebovat při kreslení lineárního modelu, kde nebudou znát hodnotu celku a musí vyznačit pětinu celku), b) a nově pomocí násobení zlomků, vynásobením $\frac{2}{5} \cdot 60$.
- Jaká je metodická řada úloh násobení zlomků (viz přednáška)?

Úkol 7-01 Připravte jednu hodinu, ve které na třech příkladech vysvětlíte-zdůvodníte postup při dělení zlomků, přitom náročnost tohoto dělení v těchto příkladech roste na základě metodické řady dělení zlomků (metodická řada viz přednáška, dále např. podle Blažková, str. 131-132, a i další učebnice lze užít).

Zadání vyučujícího: v každém z příkladů použijte grafickou podporu (zdůvodnění) postupu.

Chci se při výstupu zaměřit na (zaměření studenta):

4 ....Petr Sláma, Michael Šebesta.......................**čtvrtek 03**: Bára Bulínová, Sofie Strnadová .... **sobota 01**: Vendula Kostincová;

Úkol 7-02

- Vyřešte úlohu aritmeticky (bez rovnic), pouze s podporou lineárního modelu: Tomáš, Patrik a Kristián sbírají kartičky hokejistů. Patrik už jich má 96. Kolik karet má Tomáš a kolik Kristián, když Patrik má o šest více, než je desetinásobek počtu Kristiánových karet, a Tomáš má o pět karet více, než je šestina počtu Patrikových karet?
- Vyřešte úlohu aritmeticky (bez rovnic), pouze s podporou lineárního modelu: Jirka a Pavel sbírají známky. Kdyby dal Jirka Pavlovi 8 známek, měli by oba stejně. Kdyby dal Pavel Jirkovi 8 známek, měl by Jirka dvakrát více než Pavel. Kolik má každý známek?

Zadání vyučujícího: použijte grafickou podporu (zdůvodnění) postupu.

Chci se při výstupu zaměřit na (zaměření studenta):

5 ....Darina Sokolova...................**čtvrtek 04**... Eliška Uhlířová, Magdalena Hamanová .... **sobota 02**: Vojtěch Tasovský

Úkol 7-03 • Vyřešte úlohu aritmeticky (bez rovnic), pouze s podporou lineárního modelu: Marek, Honza a David taky sbírají kartičky hokejistů. Marek už má 70 kartiček. Kolik karet má Honza a kolik David, jestliže víme, že Honza má sedminu počtu Davidových karet a Marek má desetinásobek počtu Honzových karet?

• Vyřešte úlohu aritmeticky (bez rovnic), pouze s podporou lineárního modelu: Petra, Jana a Viola jsou fanynky hokeje a také sbírají kartičky. Víme, že měly všechny tři dohromady více než 30 karet a méně než 60 karet. Když dala Petra Viole polovinu svých karet, dala zase Jana Petře šestinu svých, aby měly všechny stejně (karty během předání nijak netrhají). Kolik karet měla každá z nich před těmito přesuny?

Zadání vyučujícího: použijte grafickou podporu (zdůvodnění) postupu.

Chci se při výstupu zaměřit na (zaměření studenta):

6 ....Šárka Kolísková, Karolína Ďurigová.................................. **sobota 03**: Jiřina Nováková

8 Týden 08: procenta a finanční matematika

Jedním ze způsobů řešení úloh s procenty je trojčlenka, která bude až následným tématem příště. Téma procenta je ovšem vyučováno zde, jen abychom se seznámili se základním zavedením procent jako operátoru, a podívali se na aplikaci procent ve finanční matematice. Složitější úlohy s procenty, které je potřeba řešit trojčlenkou, budeme dělat až v kapitole 9.

- Zavedení procent jako operátoru, který počítá poměrnou část ze základu ... vysvětlete na úloze, kterou doplňte i o grafický názor: Bunda stála 4200, ale byla zlevněna o dvacet procent. Kolik stojí teď?
- Výpočet procent v předchozí odrážce (úloze) lze provést třemi způsoby (viz též Odvárko), jeden z nich je tedy trojčlenka, ale jednoduchá. Nebo čtyřmi způsoby, viz přednáška 6, slajd 5 (ale způsob (d) „vzorec“ se moc nepočítá, protože to je jen způsob (c) napsaný do vzorce, a sice (c1) výpočet pomocí zlomku nebo (c2) výpočet pomocí desetinného čísla).

Úkol 8-01 Spoříte stavební spoření na tříprocentní roční úrok po dobu šesti let (se složeným úročením), ročně vkládáte 20 400 kč, a každoroční státní podpora 2000 se vloží na účet k 1.1. následujícího roku, jestliže v průběhu roku předchozího byla vložena suma 20 400 kč ... nepoužívejte žádné vzorce, pouze pracujte s procenty a vše rozepište rok po roku (poslední věc, kterou musíte vzít v úvahu je ten, že tříprocentní úrok se v každém roce nepřipíše celý, ale zdaní se ještě patnácti procenty – ta připadnou státu za to, že tak skvělý způsob spoření umožňuje a každoročně připíše klientům dobrou státní podporu). Začali jste spořit 1.1.2024 vložením částky 20 400 kč ... kolik peněz bude na vašem spořicím účtu po dvou letech 1.1.2026 večer, jestliže během dne též zaplatíte i další splátku, a také během dne přijde státní podpora za předchozí rok? Spočtěte vše včetně složeného úročení do jedné částky, která bude ležet na účtu 1.1.2026 večer. Ale samozřejmě udělejte během řešení přehled transakcí během celých dvou let strukturovaně, na tabuli.

Požadavek vyučujícího: Napište celý výpočet na tabuli, v interakci se žáky.

Chci se při výstupu zaměřit (zaměření studenta):

7 ....Petra Staňová, Petra Tichá....................**čtvrtek 05**...Magda Polcarová, Aneta Brázdová...............

Úkol 8-02 Půjčili jste si 100 000 kč během prosince na sedmiprocentní roční úrok, ale úrokování se provádí jednou měsíčně, každý měsíc budete splácet 5000 kč, počínaje lednem následujícího roku. Vypočtěte, jak dlouho (kolik měsíců) budete splácet a kolik zaplatíte navíc vůči sumě 100 000 kč. Konkrétně rozepište:

- a) do konce prosince dluh stoupne vlivem úroku o hodnotu sedmi procent, ale tento sedmiprocentní přírůstek musíme ještě něčím vydělit ... čím? (vysvětlete, proč násobíme číslem 1,07 a dělíme číslem 12)
- b) během ledna dlužník zaplatí 5 000 kč, tj. dluh klesne na ...
- c) do konce ledna opět dluh vlivem úroku naroste na částku ...

- d) během února dlužník zaplatí 5 000 kč, dluh klesne na ...
- e) kroky c,d opakujeme tak dlouho, až se jednoho měsíce zaplacením splátky 5 000 kč nebo menší dluh naprosto splatí. V té chvíli odpovězte na otázky ze zadání úlohy.

Požadavek vyučujícího: První tři nebo čtyři měsíce výpočtu napište do schématu na tabuli, v interakci se žáky. Zbytek se Vám bude hodit zpracovat do Excelovské tabulky.

Chci se při výstupu zaměřit (zaměření studenta):

8 ....Tereza Kuňáková, Martin Kos ....**čtvrtek 06**.....Lucie Šikutová, Anna Procházková............

9 Týden 09: poměr, úměra (rovnost dvou poměrů), trojčlenka

Úkol 9-01 Sestavte první hodinu se třemi až čtyřmi příklady na poměr, ve které žáky seznámíte se základními příklady ze života i základními úlohami na poměr. Můžete použít učebnici Odvárko 7b.

- Začněte příkladem o počtu žáků ve dvou různých skupinách (např. pánové – dámy).
- Jeden příklad lze využít i na více otázek-úkolů-dovedností, pokud je to možné.
- U každého příkladu vypište dovednosti, které se žák učí.
- Více než čtyři příklady ne! Chystáte jen první hodinu. Čtyři příklady, ale každý rozpracujte více.

Požadavek vyučujícího: Zdůvodněte (až po výstupu) pořadí svých čtyř příkladů – proč v tomto pořadí a ne jinak. Pokuste se vymyslet vhodné otázky, abyste klíčové věci vyzvěděli od žáků, nikoli dělali veškerou práci sami vyučující.

Chci se při výstupu zaměřit (zaměření studenta):

9 ....Michaela Horutová, Tereza Šimčíková...................**čtvrtek 07**... Lucie Frommelová, Jakub Dvořák........................... **sobota 04**: Sabina Michalíková

Úkol 9-02 Sestavte část hodiny na prezentaci-zavedení přímé úměrnosti. Použijte například učebnici Jedličková 7c, str. 11-12 (příklad s černým bezem) a str. 13 (příklady 3 a 4) a zkuste vymyslet i dobrý příklad dvou veličin, mezi kterými není vztah přímé úměrnosti (nápověda: například vztah $y = 500 + 200x$ ... vymyslíte k němu nějakou legendu?).

Požadavek vyučujícího: V příkladu 3 (str. 13) vymyslete i nějaké konkrétní hodnoty, abyste zdůvodnili dobře, že přímá úměrnost mezi veličinami je nebo není. Pokuste se vymyslet vhodné otázky, abyste celou prezentaci nedělali sami, ale vyzvěděli klíčové věci od žáků.

Chci se při výstupu zaměřit (zaměření studenta):

10 ....Jan Kubena, Jan Mannl............................... **sobota 05**: Lucie Vilímková

Úkol 9-03 Sestavte část hodiny na prezentaci-zavedení NEpřímé úměrnosti. Použijte například učebnici Jedličková 7c, str. 15-16 (příklad s černým bezem) a str. 17 (příklady 1 a 2).

Požadavek vyučujícího: V příkladu 1 (str. 17) vymyslete i nějaké konkrétní hodnoty, abyste zdůvodnili dobře, že NEpřímá úměrnost mezi veličinami je nebo není. Pokuste se vymyslet vhodné otázky, abyste celou prezentaci nedělali sami, ale vyzvěděli klíčové věci od žáků.

Chci se při výstupu zaměřit (zaměření studenta):

11 ....Martina Chalupová, Tereza Šustková ....

Úkol 9-04 Sestavte část hodiny na prezentaci-zavedení trojčlenky. Použijte například učebnici Jedličková 7c, str. 20-21, str. 22-23 (příklady 2 a 3), str. 24-25 (příklad s černým bezem), str. 26 (příklady 6 a 7).

Požadavek vyučujícího: Snažte se zapojit žáky, ale nezapomeňte, že je učíte na tabuli trojčlenkový zápis – trvejte na tomto zápisu. Osobní postoj vyučujícího: Když je tedy jedno, kam obě šipky směřují, jen aby vyjadřovaly úměrnost přímou nebo nepřímou správně, navrhuji, aby směřovaly od větší hodnoty k menší! To je přece normální funkce šipky, aby směřovala od nižší hodnoty k vyšší hodnotě! Tak dojde k další kontrole, zda je úměrnost přímá nebo nepřímá volena správně. Upravte prosím tento způsob zápisu oproti učebnici.

Chci se při výstupu zaměřit (zaměření studenta):

12 ....David Prokop, Kateřina Svobodová ....

- Při práci s poměry jste určitě použili grafické znázornění (jako podporu rozboru úlohy). Přidejte nyní v závěru učivu o poměrech i příklad na postupný poměr $a : b : c$ a vyřešte jej s grafickou podporou. Například: Tři sběrači ovoce nebyli stejně výkonní. Nasbíral-li Aleš 5 kg ovoce, Radek za stejnou dobu nasbíral 8 kg ovoce. Nasbíral-li Radek 14 kg ovoce, měl Tadeáš 10 kg ovoce. Dohromady sběrači nasbírali 1 310 kg ovoce. Kolik kg ovoce nasbíral každý?
- Závěrem na trojčlenky řešte i úlohu na složenou trojčlenku, například přednáška P7, slajd 13.

10 Týden 10: celá čísla, sčítání a odčítání celých čísel, racionální čísla včetně záporných

- Jaký je trojí význam znaménka minus?

Úkol 10-01 Nejprve vysvětlete pomocí Hejného metody (viz přednáška o krokovacím pásu, nebo viz Hejného učebnice A, krokování I, str. 33-34, krokování II. str. 61-63) všechny čtyři situace, které mohou nastat při sčítání a odčítání celých čísel: a) přičtení kladného čísla; b) přičtení záporného čísla; c) odečtení kladného čísla, d) odečtení záporného čísla.

Potom procvičte pět příkladů (v té správné posloupnosti) na sčítání a odčítání celých čísel, abyste žákům vštípili ty správné dovednosti. Dva příklady ($-2716+978 = \ldots$, $56+(-87) = \ldots$) do této řady pěti příkladů zakomponujte.

Požadavek vyučujícího: Napište celý výpočet na tabuli, v interakci se žáky.

Chci se při výstupu zaměřit (zaměření studenta):

13.....Jakub Halamásek, Antonín Janků...............................

Úkol 10-02 Vysvětlete pomocí kladných a záporných částic (model sklenice neboli „jar model“) všechny čtyři situace, které mohou nastat při sčítání a odčítání celých čísel: a) přičtení kladného čísla; b) přičtení záporného čísla; c) odečtení kladného čísla, d) odečtení záporného čísla.

Potom procvičte pět příkladů (v té správné posloupnosti) na sčítání a odčítání celých čísel, abyste žákům vštípili ty správné dovednosti. Dva příklady ($-2716+978 = \ldots$, $56+(-87) = \ldots$) do této řady pěti příkladů zakomponujte.

Požadavek vyučujícího: Napište celý výpočet na tabuli, v interakci se žáky.

Chci se při výstupu zaměřit (zaměření studenta):

....

Úkol 10-03 Vysvětlete pomocí modelu jednorozměrných vektorů (model afinní: nechte si ho od vyučujícího vysvětlit) všechny čtyři situace, které mohou nastat při sčítání a odčítání celých čísel: a) přičtení kladného čísla; b) přičtení záporného čísla; c) odečtení kladného čísla, d) odečtení záporného čísla.

Potom procvičte pět příkladů (v té správné posloupnosti) na sčítání a odčítání celých čísel, abyste žákům vštípili ty správné dovednosti. Dva příklady ($-2716+978 = \ldots$, $56+(-87) = \ldots$) do této řady pěti příkladů zakomponujte.

Požadavek vyučujícího: Napište celý výpočet na tabuli, v interakci se žáky.

Chci se při výstupu zaměřit (zaměření studenta):

....

- Jak vysvětlit žákům pojem absolutní hodnoty, když vysvětlení pomocí vzorců s písmeny je nedostatečné, vysvětlení pomocí vzdálenosti od nuly je nedostatečné? (viz přednáška)

11 Týden 11: mocniny a odmocniny

Téma tohoto týdne budeme muset na cvičení přeskočit, protože se musíme začít věnovat slovním úlohám. Otázku mocnin a odmocnin se naučte podle přednášky, včetně důležitých dovedností, které musíme žáky naučit, včetně možných chyb a návrhů, jak chyby řešit. Přemýšlejte také nad konkrétní učebnicí a blokem mocnin a odmocnin, například učebnice Odvárko 8a, a dovednostmi, které se v tomto bloku žáci učí (a jakým způsobem se je učí) .... sestavte řetězec úloh, který dobře procvičuje metodickou řadu základních dovedností.

Zejména pojetí odmocniny je spojeno s existencí iracionálních čísel, blíže viz přednáška, nebo také ještě ve čtvrtém semestru budete mít přednášku o pojetí iracionality a nekonečna, jak se objevuje na základní škole.

Je zde přece jen možný jeden úkol, a sice: Připravte část výuky, ve které žáky vedete k odvození určitých zákonitostí při práci s mocninami (v tom vhodném pořadí). Přednostně by toto mohl cvičící rozpracovat do několika úkolů a projít na cvičení, studenti si připravují realizaci úkolu, prezentují u tabule. Vrátíme se k tématu mocnin a odmocnin, pokud na cvičení vyjde čas po projití témat 12 a 13.

12 Týden 12: slovní úlohy I: řešení úvahou, aritmeticky (s grafickou podporou), nebo experimentem (řízeným či neřízeným)

Vysvětlete tyto pojmy: řízený experiment, neřízený experiment, aritmetické řešení (metoda), algebraické řešení (metoda), řešení úvahou.

1. Následující úlohu řešte úvahou: Chlapec chová holuby a králíky. Všechna zvířata mají dohromady 33 hlav a 100 nohou. Kolik je holubů a kolik králíků? b) Řešte tutéž úlohu experimentem; c) řešte tutéž úlohu řízeným experimentem.

2. Řešte aritmeticky : V závodě pracuje 735 zaměstnanců. Mužů je o 339 více než žen. Kolik pracuje v závodě mužů a kolik žen? b) Řešte tutéž úlohu experimentem, c) řešte tutéž úlohu řízeným experimentem.

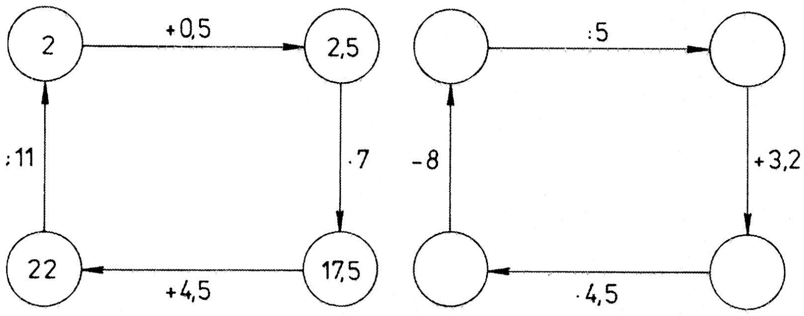
3. Aritmetické řešení je také důležité (či používané) při řešení úloh na procenta. Musíte aritmetické řešení úloh na procenta umět použít. Vyřešte aritmeticky (s podporou lineárního modelu) tuto úlohu[1]: Původní cena bot byla 2000 kč. Boty byly slevněny o 17,5%. Jaká je cena bot po slevě? b) vyřešte tuto úlohu pomocí pojetí procent jako operátoru.

4. Vyřešte úlohu na procenta aritmeticky, pomocí lineárního modelu:[2] Máslo bylo zdraženo ze 40 kč na 50 kč. O kolik procent bylo zdraženo oproti původní ceně? b) Vyřešte tuto úlohu pouze pomocí základního pojetí procenta jako části celku.

5. Vyřešte úlohu na procenta aritmeticky: Čerstvé houby obsahují 90 % vody, sušené houby obsahují 12 % vody. Vypočítejte, kolik kilogramů čerstvých hub musíme nasbírat, abychom dostali 2 kg sušených hub.

6. Věnujme se nyní více metodě experimentu (řízeného i neřízeného). Následující úlohu vyřešte experimentem, a pak řízeným experimentem:[3] Řešte úlohu z Matematické olympiády, katerogie Z5 (pro 5. ročník ZŠ, ročník 35):

Úloha 1 (35. r., Z5–I–5)
V kroužcích na obrázku vlevo jsou čísla, která odpovídají vyznačeným početním výkonům (např. $2+0{,}5=2{,}5$ a $2{,}5\cdot 7=17{,}5$). Také do kroužků na obrázku vpravo vepište taková čísla, aby odpovídala uvedeným početním výkonům.



[1]Viz Budínová, I.: Matematika na čtverečkovaném papíře, Edika 2024, str. 79.
[2]Viz Budínová, I.: Matematika na čtverečkovaném papíře, Edika 2024, str. 76.
[3]Herman a kol.: Matematika – kladná a záporná čísla, Prometheus 1998, str. 114.

7. Následující úlohu řešte experimentem, řízeným i neřízeným:[4] Haně a Daně je dohromady 52 let. Haně je třikrát tolik let, jako bylo Daně, když bylo Haně dvakrát tolik, jako je Daně dnes. Kolik let je Haně a kolik Daně?

8. Řešte experimentem, řízeným i neřízeným: Karlovi je dvakrát tolik let, jako bylo Janovi, když Karlovi bylo tolik let, kolik je nyní Janovi. Až bude Janovi tolik let, kolik je nyní Karlovi, bude jim dohromady 63 let. Jak je každý z nich starý?

13 Týden 13: slovní úlohy II: slovní úlohy o směsi, o pohybu, o společné práci

1. Úloha o směsi: Řešte aritmeticky: Kolik litrů vody je třeba přilít k 8 litrům 70%-ního lihu, aby vznikl 50%-ní líh? (řešení: prosím aritmeticky)

2. Řešte experimentem neřízeným, a pak řízeným: Ve dvou lahvích je roztok peroxidu vodíku – v jedné tříprocentní, ve druhé třicetiprocentní. V jakém poměru musíme oba roztoky smíchat, abychom dostali roztok dvanáctiprocentní?

3. A ještě jedna úloha o směsi: Kolik gramů 40% roztoku kyseliny sírové máme přidat ke 350 gramům 25% roztoku kyseliny sírové, aby vznikl 37% roztok této kyseliny? Řešte a) aritmeticky, b) experimentem pokud možno řízeným.

4. Úlohy o pohybu: Vzdálenost přístavu Dubrovník a ostrova Korčula je 130 km. Ve stejnou chvíli vypluly proti sobě člun a parník. Člun plul rychlostí 4 km za hodinu, parník 16 km za hodinu. Kolik kilometrů urazí člun a kolik parník do chvíle, kdy bude mezi nimi vzdálenost 10km?

5. Ještě jedna úloha o pohybu: b) Ze dvou přístavů vypluly současně stejným směrem dva parníky. První jel rychlostí 20 kilometrů za hodinu, druhý rychlostí 26 kilometrů za hodinu. Za 4 hodiny dohonil druhý parník první. Jaká je vzdálenost mezi přístavy?

6. Úlohy o pohybu s posunutým časem: Antilopa vyběhne z daného místa rychlostí 4 metry za sekundu a utíká pryč. Za 5 minut za ní vyběhne gepard rychlostí 6 metrů za sekundu. Za jak dlouho od svého vyběhnutí ji gepard doběhne?

7. Úlohy o společné práci: těchto úloh jsme se dotkli už u trojčlenky, ale lze je řešit i dalšími metodami než trojčlenkou. Zkuste vyřešit tuto typickou úlohu: Dělník A pracuje rovnoměrně a vykoná práci určitého objemu za 6 hodin, dělník B práci téhož objemu za 8 hodin. Jak dlouho jim bude práce trvat, když pracují společně?

8. Nebo: Dělník A vykoná samostatně práci za 8 hod, dělník B samostatně za 6 hod. Na dané práci začnou pracovat oba společně, ale za nějaký čas je dělník B odvolán a dělník A práci dokončí za 1 hod. Kolik hodin pracovali společně a jako část práce každý z nich vykonal celkem na daném díle?

9. Nebo: Přítokem se bazén napustí za 5 hodin, čerpadlem se vyčerpá za 8 hodin. Za jak dlouho se bazén naplní, jestliže je puštěn přítok i čerpadlo současně?

[4] Viz Pěnčík, Pěnčíková: Lámejte si hlavu, Prometheus 1995, str. 153, tato a následující úloha.