Konstrukční úlohy – základní geometrické konstrukce a symbolika

Irena Budínová

Pedagogická fakulta MU

irena.budinova@seznam.cz

Dovednost narýsovat obrázek nebo jej s porozuměním přečíst potřebuje mnoho techniků, řemeslníků, někdy i umělců. Na základních školách se této dovednosti žáci učí prostřednictvím řešení konstrukčních úloh v geometrii.

Konstrukční úlohy tvoří jednu z důležitých částí učiva geometrie, neboť přispívají k rozvoji mnoha klíčových kompetencí žáků, ale také dovedností potřebných v matematice i běžném životě. Vedou žáky k přesnosti, trpělivosti, pečlivosti, schopnosti vytvořit plán a tento plán zrealizovat, rozvíjí jemnou motoriku aj.

Konstrukční úlohy mohou být pro některé žáky náročným a neoblíbeným učivem. Vyžadují určitý stupeň geometrické představivosti, kterou nemají někteří žáci dostatečně rozvinutou. Geometrickou představivost žáků je třeba postupně utvářet pravidelným zadáváním geometrických úloh, ve kterých se žáci postupně seznamují s geometrickými útvary a jejich vlastnostmi. Při řešení konstrukčních úloh se pak žáci učí vytvářet plán řešení, tento plán realizovat vytvořením příslušného obrázku i se zápisem pomocí symbolického jazyka. To bývá často pro žáky náročné.

Zařazování konstrukčních úloh pravidelně a v určitých metodických řadách je vhodné již od prvního stupně základní školy. I když je v současné době možné využívat interaktivní tabule a různých počítačových programů, není možné rýsování nahradit animacemi, které umožňuje tato technika. Žáci sice mohou pozorovat, jak jednotlivé prvky v konstrukci vznikají a přibývají, avšak žáci tak získávají jen pasivní znalosti, pouze zprostředkovaně. Animacemi je možno doplnit výuku až v případě, kdy žák učivu porozumí, vyřeší několik úloh a pochopí vztahy mezi jednotlivými prvky.

Nejprve je vhodné žáky seznámit se **základními konstrukcemi**. Jedná se o konstrukce, které žáci velice často využívají ve všech dalších konstrukčních úlohách a při popisu konstrukce je již uvádí jako celek. Když např. narýsujeme přímku, která je rovnoběžná s přímkou AB, neuvádíme v popisu konstrukce, jak jsme rovnoběžnou přímku rýsovali.

Řešení konstrukčních úloh má zpravidla ustálená pravidla, mezi která řadíme rozbor, polis konstrukce, vlastní konstrukci a zkoušku (příp. diskusi). Pro žáky je velmi náročný popis konstrukce. V každém bodě postupu je symbolicky sděleno, CO bylo narýsováno a JAK to bylo narýsováno. Např. zápis $k;\ k(A, r = 2\text{ cm})$ znamená, že byla narýsována kružnice k; má střed v bodě A a poloměr 2 cm.

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

V rámci řešení konstrukčních úloh by se žáci také měli seznamovat s matematickým symbolickým způsobem zápisu. Žáci mají mnohdy s touto činností problém. Je proto vhodné seznamovat žáky se symbolikou v postupných krocích. V závěru materiálu uvádíme seznam používaných matematických symbolů.

Základními konstrukcemi jsou obvykle myšleny tyto konstrukce:

1. Narýsovat přímku, která prochází danými dvěma body.
2. Narýsovat úsečku dané velikosti.
3. Narýsovat dvě přímky, které jsou rovnoběžné.
4. Narýsovat dvě přímky, které jsou navzájem kolmé.
5. Přenést úsečku k dané polopřímce.
6. Sestrojit grafický součet úseček.
7. Sestrojit grafický rozdíl úseček.
8. Narýsovat kružnici o daném středu a daném poloměru.
9. Narýsovat úhel dané velikosti.
10. Přenést úhel k dané polopřímce do dané poloroviny.
11. Sestrojit osu úsečky.
12. Sestrojit osu úhlu.
13. Sestrojit grafický součet úhlů.
14. Sestrojit grafický rozdíl úhlů.
15. Rozdělit úsečku na *n* shodných částí.
16. Rozdělit úsečku v daném poměru.

S některými konstrukcemi by se žáci mohli seznámit již na 1. stupni ZŠ. Učitelé druhého stupně základní školy zpravidla předpokládají, že žáci tyto dovednosti zvládli a navazují na ně.

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

Rýsování rovnoběžek

Rovnoběžné přímky rýsujeme použitím dvou pravítek, z nichž alespoň jedno je trojúhelník. Jednu stranu trojúhelníku (přeponu nebo jednu odvěsnu) přiložíme k narýsované přímce. K druhé odvěsně trojúhelníku přiložíme druhé pravítko, podél kterého trojúhelníkem posunujeme. Pak narýsujeme rovnoběžku.

Rýsování kolmice

Nejčastějším způsobem rýsování kolmice je použití trojúhelníku s ryskou. Druhým způsobem je použití dvou pravítek, z nichž alespoň jedno je pravoúhlý trojúhelník:

- K narýsované přímce přiložíme přeponu pravoúhlého trojúhelníku.
- K jedné odvěsně trojúhelníku přiložíme pomocné pravítko.
- Trojúhelník otočíme k pomocnému pravítku druhou odvěsnou o 90° (nesmíme jej při tom překlopit).
- Podél přepony trojúhelníku narýsujeme přímku kolmou k zadané přímce.

Grafický součet úseček

Jestliže máme narýsovat grafický součet úseček AB a CD, můžeme postupovat tak, že buď využijeme další polopřímku PX, nebo z jedné zadaných úseček polopřímku vytvoříme. Popíšeme druhý způsob.

Narýsujeme úsečky AB a CD. Úsečku AB prodloužíme na polopřímku $\longmapsto AB$. Do kružítka vezmeme úsečku CD a sestrojíme oblouk, který má střed v bodě B a poloměr CD. Průsečík oblouku a polopřímky $\longmapsto AB$ označíme písmenem E. Úsečka AE je shodná s úsečkou $AB + CD$, jedná se tedy o hledaný grafický součet.

Velmi častou chybou je, že se nerozlišuje mezi grafickým součtem úseček a součtem délek úseček. Pokud jsou zadány délky jednotlivých úseček, není nutné provádět grafický součet úseček, ale nejdříve se sečtou délky úseček a pak se narýsuje úsečka s výslednou délkou. To je snadné v případě úseček s celočíselnými délkami. Na následujícím příkladu ukážeme, že v případě úseček s iracionálními délkami není možno grafický součet obejít sečtením délek úseček.

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

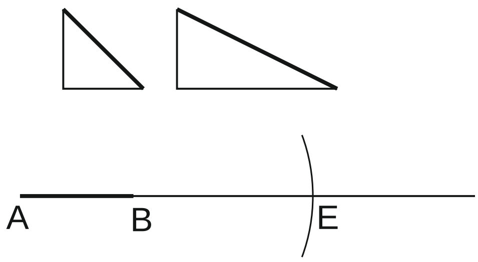
Příklad: Sestrojte grafický součet úseček s délkami $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$.

Rozbor:

Úsečky zadaných délek můžeme sestrojit pomocí Pythagorovy věty. Délku $\sqrt{2}$ má přepona pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami 1 a 1. Délku $\sqrt{3}$ má přepona pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami 1 a 2. Dále postupujeme tak, jak je uvedeno výše.

Popis konstrukce:

1. $AB;\ |AB| = \sqrt{2}$
2. $CD;\ |CD| = \sqrt{3}$
3. $\mapsto$AB
4. $k; k(B, \sqrt{3})$
5. $E; E \in k \cap \leftarrow BA$
6. $AE \cong AB + CD$



Grafický rozdíl úseček

Máme-li narýsovat grafický rozdíl úseček, pracujeme jen s těmito dvěma úsečkami. Narýsujeme úsečky AB a CD ($AB > CD$). Do kružítka vezmeme úsečku CD a sestrojíme oblouk, který má střed v bodě B a poloměr CD. Průsečík oblouku a úsečky AB označíme písmenem E. Úsečka AE je shodná s úsečkou $AB - CD$, jedná se tedy o hledaný grafický rozdíl úseček.

Opět je třeba rozlišovat, zda určujeme grafický rozdíl úseček, nebo rozdíl délek úseček.

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

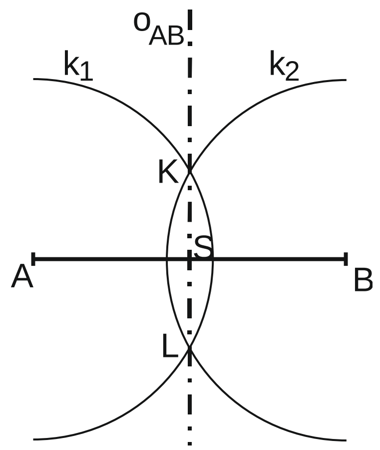
Osa úsečky, střed úsečky

Rozbor:

V krajních bodech úsečky A, B sestrojíme kružnice stejného poloměru, který je větší než polovina úsečky. Přímka, která prochází oběma průsečíky kružnic, je osa úsečky. Bod na úsečce, který protíná osa úsečky, je střed úsečky.

Popis konstrukce:

1. AB
2. $k_1;\ k_1(A, r > \frac{1}{2}|AB|)$
3. $k_2;\ k_2(B, r)$
4. $K, L; K, L \in k_1 \cap k_2$
5. $o_{AB};\ K, L \in o_{AB}$
6. $S; S \in KL \cap AB$



Osa úhlu

Rozbor:

Sestrojíme kružnici libovolného poloměru se středem ve vrcholu úhlu. Na každém rameni úhlu vzniknou průsečíky C, D. Sestrojíme dvě další kružnice se stejným poloměrem, jejich středy leží v bodech C, D. Polopřímka (případně přímka) určená průsečíkem kružnic a vrcholu úhlu je osa úhlu.

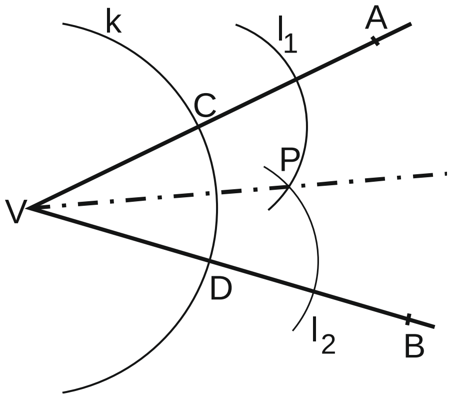
Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

Popis konstrukce:

1. $\sphericalangle AVB$
2. $k; k(V, r)$
3. $C, D; C \in k \cap \longmapsto VA, D \in k \cap \longmapsto VB$
4. $l_1, l_2;\ l_1(C, s), l_2(D, s)$
5. $P; P \in l_1 \cap l_2$
6. $\longmapsto VP$

Konstrukce:



Grafický součet úhlů

Jestliže máme narýsovat grafický součet úhlů $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CYD$, využíváme přenášení úhlů k dané polopřímce do dané poloroviny.

Narýsujeme úhel $\sphericalangle AVB$. Úhel $\sphericalangle CYD$ přeneseme k polopřímce VB do poloroviny opačné k polorovině BVA, označme ji BVU. Sestrojíme oblouk se středem v bodě Y a vhodném poloměru tak, aby protnul obě ramena úhlu. Průsečíky s rameny úhlu CYD označíme K, L. Déle sestrojíme oblouk se středem v bodě V se stejným poloměrem. Průsečík oblouku s ramenem VB označíme M. Do kružítka vezmeme úsečku KL a sestrojíme oblouk se středem v bodě M a poloměrem KL. Průsečík obou oblouků označíme X a narýsujeme polopřímku VX. Úhel AVX je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle AVB + \sphericalangle CYD$.

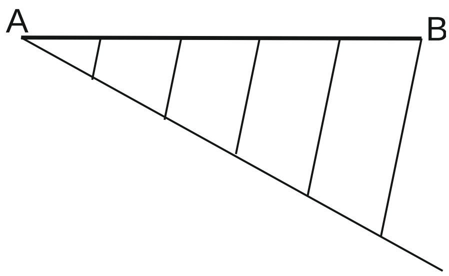
Opět je třeba rozlišovat mezi grafickým součtem (rozdílem) úhlů a součtem (rozdílem velikostí úhlů.

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

Dělení úsečky na shodné části

Úsečku AB máme rozdělit na n shodných částí. Jedním krajním bodem úsečky vedeme pomocnou polopřímku, např. polopřímku AX. Zvolíme jednotkovou úsečku a kružítkem naneseme na polopřímku AX n shodných úseček. Poslední bod na pomocné polopřímce spojíme s druhým krajním bodem úsečky. Rovnoběžky s danou spojnicí vedené každým bodem na polopřímce rozdělí úsečku na n shodných částí.



Dělení úsečky v daném poměru

Úsečku AB máme rozdělit v poměru $m{:}\,n$. Sestrojíme pomocnou polopřímku AX, na kterou od bodu A kružítkem naneseme $m+n$ shodných dílů. Poslední bod (označíme N) na polopřímce AX spojíme úsečkou s bodem B. Vedeme rovnoběžku s úsečkou BN, která prochází m-tým bodem. Průsečík této přímky s úsečkou AB dělí úsečku AB v poměru $m{:}\,n$.

Thaletova kružnice

Množina všech vrcholů všech pravých úhlů roviny, jejichž ramena procházejí body A, B je kružnice o průměru AB (neboli: Množina všech bodů, ze kterých vidíme úsečku AB pod úhlem 90°, je kružnice nad průměrem AB kromě bodů A, B). Tuto kružnici nazýváme **Thaletova kružnice** nad průměrem AB.

Nalezneme střed S úsečky AB a sestrojíme kružnici se středem S a poloměrem $\frac{1}{2}|AB|$, $\tau_{AB}\left(S,\ \frac{1}{2}|AB|\right)$.

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

Seznam symbolů

$A, B, \dots$	Bod $A, B, \dots$
$a, b, \dots$	Přímka $a, b, \dots$
$\leftrightarrow AB$	Přímka určená body A, B
$\longmapsto AB$	Polopřímka AB (polopřímka s počátkem A a vnitřním bodem B)
$\longmapsfrom AB$	Polopřímka opačná k polopřímce AB (polopřímka s počátkem A)
AB	Úsečka AB (úsečka s krajními body A, B)
$\longmapsto ABC$	Polorovina s hraniční přímkou AB a vnitřním bodem C
$\longmapsto pC$	Polorovina s hraniční přímkou p a vnitřním bodem C
$\sphericalangle AVB$	Konvexní úhel AVB (konvexní úhel s vrcholem V a rameny v polopřímkách VA, VB)
$k(S, r)$	Kružnice se středem S a poloměrem r
d	Průměr kružnice
$K(S, r)$	Kruh se středem S a poloměrem r
τ_{AB}	Thaletova kružnice s průměrem AB
$\widehat{AB}$	Kružnicový oblouk AB (kružnicový oblouk s krajními body A, B)
$A \in p$ ($A \notin p$)	Bod A leží (neleží) na přímce p
$AB \subset p$ ($AB \not\subset p$)	Úsečka AB je (není) částí přímky p
$A = B$ ($A \neq B$)	Bod A je totožný s bodem B (různý od bodu B)
$a = b$ ($a \neq b$)	Přímka a je totožná s přímkou b (různá od přímky b)
$a \parallel b$ ($a \nparallel b$)	Přímka a je (není) rovnoběžná s přímkou b
$a \perp b$	Přímka a je kolmá k přímce b
$P \in a \cap b$	Průsečík P přímek a, b
$a \cap b = \{P\}$	Průsečík P přímek a, b
$AB \cong CD$	Úsečka AB je shodná s úsečkou CD
$\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle CUD$	Konvexní úhel AVB je shodný s konvexním úhlem CUD
$\Delta\, ABC \cong \Delta\, KLM$	Trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem KLM
$\Delta\, ABC \sim \Delta\, KLM$	Trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku KLM
$\lvert AB \rvert$	Délka úsečky AB
$\lvert Ap \rvert$	Vzdálenost bodu A od přímky p
$\lvert ab \rvert$	Vzdálenost rovnoběžných přímek
$\lvert \sphericalangle AVB \rvert$	Velikost konvexního úhlu AVB
$\lvert \sphericalangle ab \rvert$	Odchylka přímek a, b
$\boldsymbol{AB}$	Orientovaná úsečka AB
$\lvert \boldsymbol{AB} \rvert$	Velikost orientované úsečky AB

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

$Z: X \to X'$	Bod X' je obrazem bodu X v zobrazení Z
$O(o)$	Osová souměrnost s osou souměrnosti o
$S(S)$	Středová souměrnost se středem souměrnosti S
$T(\boldsymbol{AB})$	Posunutí určené orientovanou úsečkou $\boldsymbol{AB}$
$R(S,\varphi)$	Otočení se středem S a úhlem otočení φ
$H(S,\kappa)$	Stejnolehlost se středem S a koeficientem κ

Literatura:

Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia – Planimetrie.* Prometheus, Praha 1993
Kuřina, F. a kol.: *Matematika a porozumění světu.* Academia, Praha 2009

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.