MASARYKOVA UNIVERZITA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky


# Zjišťování úrovně kombinačního myšlení žáků 1. stupně na vybraných úlohách

Diplomová práce

Brno 2023


Vedoucí práce:

**Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.**

Vypracovala:

**Aneta Pařízková**

## Bibliografický záznam

Pařízková, A. (2023). *Zjišťování úrovně kombinačního myšlení žáků 1. stupně na vybraných úlohách (diplomová práce)*. PdF MU, Katedra matematiky. Vedoucí práce Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

## Anotace

Cílem diplomové práce je zjištění úspěšnosti žáků 4. a 5. ročníku základní školy při řešení kombinatorických úloh. Nástrojem pro naplnění cíle je pracovní list s 5 kombinatorickými úlohami, který byl za tímto účelem vytvořen. Teoretická část práce se zabývá Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání, především vzdělávací oblastí Matematika a její aplikace. Dále popisuje teorii kombinatoriky a představuje kombinatorické úlohy v učivu matematiky 1. stupně ZŠ. Praktická část přináší zpracování výsledků vyřešených úloh do kvantitativního výzkumu a jeho vyhodnocení. Rovněž ukazuje konkrétní způsoby žákovských řešení zadaných úloh. Pracovní list řešila jedna třída 4. ročníku a jedna třída 5. ročníku.

## Klíčová slova

Kombinatorika, kombinační myšlení, kombinatorické úlohy, pracovní list, žákovské řešení.

## Annotation

The aim of this Diploma thesis is to determine the success of pupils of the 4th and 5th grade of primary school in solving combinatorial problems. A worksheet with 5 combinatorial problems, which was created for this purpose, is a tool for the fulfilment of the aim. The theoretical part of the thesis deals with the Framework Educational Programme for Primary Education, especially the educational area of Mathematics and its applications. Furthermore, it describes the theory of combinatorics and presents combinatorial problems in the mathematics curriculum of the 1st grade of primary school. The practical part presents the processing of the results of solved problems into quantitative research and its evaluation. It also shows concrete ways of students' solutions to the given problems. The worksheet was solved by one class of 4th grade and one class of 5th grade.



## Keywords

Combinatorics, combinatorial thinking, combinatorial problems, worksheet, student solutions.

## Prohlášení

*Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně, s využitím pouze citovaných literárních pramenů, dalších informací a zdrojů v souladu s Disciplinárním řádem pro studenty Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity a se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů.*

…………………..………………..

V Brně dne                                                  Aneta Pařízková

## Poděkování

Touto cestou bych chtěla především moc poděkovat paní Mgr. Jitce Panáčové, Ph.D. za odborné vedení, ochotný a vstřícný přístup, cenné rady a čas, jenž mi věnovala při zpracování mé diplomové práce.

Velké poděkování patří i mé rodině a příteli za podporu během celého studia.

# OBSAH

# ÚVOD

Jako téma své diplomové práce jsem si zvolila kombinatorické úlohy a kombinační myšlení žáků 1. stupně ZŠ. Kombinatorické úlohy se v Rámcovém vzdělávacím programu řadí k okruhu nestandardních aplikačních úloh, které mě během studia i praxí zaujaly. Líbí se mi, že o těchto úlohách musí žáci přemýšlet, uvažovat a objevovat různá řešení, nestačí si pouze zapamatovat algoritmické postupy.

Za cíl práce jsem si stanovila zjištění úspěšnosti žáků 4. a 5. ročníku ZŠ při řešení kombinatorických úloh. Nástrojem pro zjištění úspěšnosti žákovských řešení kombinatorických úloh byl pracovní list, který jsem za tímto účelem vytvořila.

Práce je rozdělena do dvou hlavních částí – teoretické a praktické. Teoretická část je dále členěna na 3 kapitoly. V úvodní kapitole se zabývám Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání, následně popisuji teorii kombinatoriky a v poslední kapitole se zaměřuji na zastoupení kombinatorických úloh v učivu matematiky 1. stupně ZŠ.

V praktické části představuji pracovní list s kombinatorickými úlohami, který jsem pro žáky připravila. Při výběru úloh jsem se inspirovala v učebnicích matematiky pro 1. stupeň ZŠ nakladatelství Alter (Justová, 2012) a nakladatelství Fraus (Hejný et al., 2010) a také v publikaci Příhonské (2019), která se tímto tématem již dlouhodobě zabývá. Úlohy jsem volila záměrně typově odlišné. Tento pracovní list bude nástrojem pro kvantitativní výzkum, který popisuji v další kapitole. Cílem výzkumu je zjištění úspěšnosti žáků 4. a 5. ročníku při řešení vybraných kombinatorických úloh. V poslední kapitole se zaměřuji na způsoby žákovských řešení jednotlivých úloh, uvádím zde, jaké řešitelské strategie žáci preferovali a byli ve svých výpočtech úspěšní, a dále poukazuji na nejčastější chyby v žákovských řešeních.

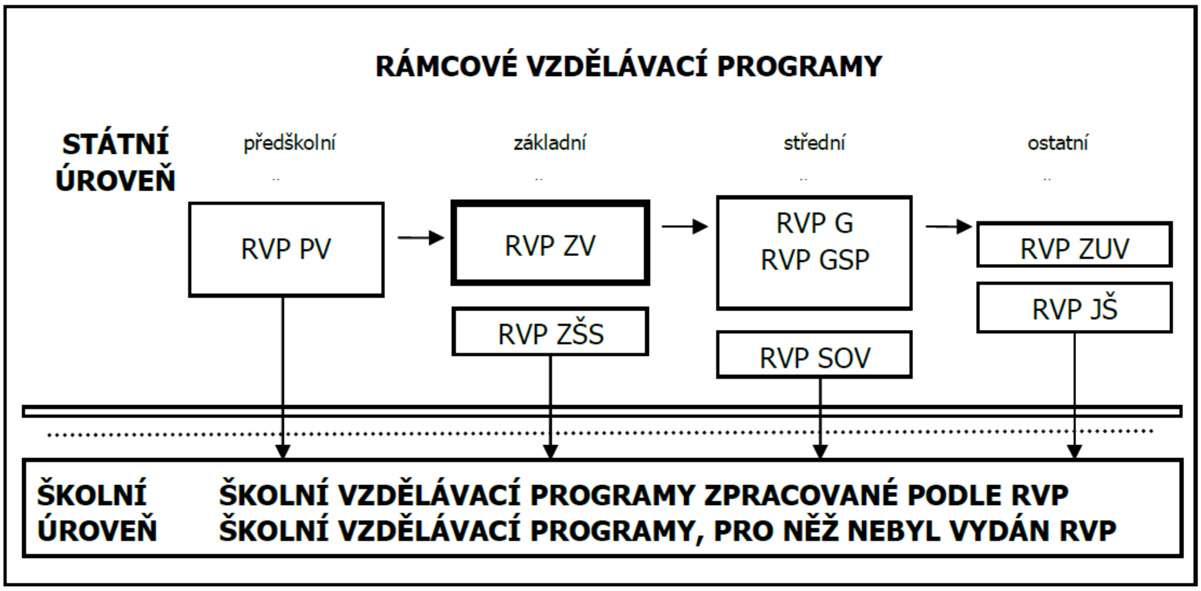
# TEORETICKÁ ČÁST

## 1. Kurikulární dokumenty

Kurikulární dokumenty jsou vytvářeny na státní a školní úrovni. Státní úroveň představují rámcové vzdělávací programy (RVP) a školní úroveň školní vzdělávací programy (ŠVP). „RVP vymezují závazné rámce vzdělávání pro jeho jednotlivé etapy – předškolní, základní a střední vzdělávání.“ (RVP ZV, s. 5) ŠVP jsou tvořeny na základě RVP a každá škola si tvoří svůj vlastní.

**Obrázek 1**

*Systém kurikulárních dokumentů*




Zdroj: RVP ZV, 2021

Rámcové vzdělávací programy kladou důraz na využití získaných vědomostí a dovedností v praktickém životě. RVP stanovují očekávané výstupy jednotlivých etap vzdělávání, které jsou sice závazné při tvoření ŠVP, ale jinak je při tvorbě ŠVP podporována „pedagogická autonomie škol a profesní odpovědnost učitelů.“ (RVP ZV, 2021, s. 6) RVP také zdůrazňují klíčové kompetence a jejich propojení se vzdělávacím obsahem. (RVP ZV, 2021)

## 1.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

„Základní vzdělávání, kterým se dosahuje stupně základní vzdělání, se realizuje v oboru vzdělání základní škola. V souladu se školským zákonem je pro realizaci základního vzdělávání vydán Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.“ (RVP ZV, 2021, s. 7) Základní vzdělávání dělíme na 1. a 2. stupeň. Po celou jeho dobu by měly být respektovány přirozené potřeby žáků, individuální úroveň jejich učení a tomu by se měl přizpůsobovat učební program. (RVP ZV, 2021)

### 1.1.1 Klíčové kompetence

RVP ZV stanovuje tyto klíčové kompetence: Kompetence k učení; Kompetence k řešení problémů; Kompetence komunikativní; Kompetence sociální a personální; Kompetence občanské; Kompetence pracovní; Kompetence digitální. Všechny kompetence se nějakým způsobem prolínají, navazují na sebe. „K jejich utváření a rozvíjení musí směřovat a přispívat veškerý vzdělávací obsah i aktivity a činnosti, které ve škole probíhají.“ (RVP ZV, 2021, s. 10) Jednotlivé klíčové kompetence vedou žáky k následujícím schopnostem a dovednostem:

**Kompetence k učení**

Žák by měl být schopen plánovat a řídit své učení a volit k němu vhodné metody, učení se mu zdá smysluplné a má k němu pozitivní vztah. Je motivován k dalšímu vzdělávání. Posoudí své pokroky v učení a umí je zhodnotit. (RVP ZV, 2021)

**Kompetence k řešení problémů**

Žák rozpozná problémové situace ve škole i mimo ni, chápe je a volí přiměřené způsoby k jejich řešení – aplikuje logické, matematické a empirické postupy. Je si vědom svých rozhodnutí a dokáže si je obhájit. (RVP ZV, 2021)

**Kompetence komunikativní**

Žák formuluje své myšlenky do souvislého a kultivovaného projevu, a to jak mluveného, tak i psaného. Naslouchá ostatním lidem, respektuje jejich názory, reaguje na ně a zapojuje se do diskuse, obhájí si svůj názor. (RVP ZV, 2021)

**Kompetence sociální a personální**

Žák se podílí na vytváření pozitivního klima třídy či skupiny. Efektivně spolupracuje se spolužáky, přispívá svými nápady k diskusi a k řešení zadaného úkolu a zároveň respektuje a zvažuje nápady ostatních. Je připraven komukoliv pomoct a zároveň o pomoc v případě potřeby požádat. (RVP ZV, 2021)

**Kompetence občanské**

Žák zná svá práva a povinnosti. V nebezpečných situacích jedná přiměřeně a zodpovědně. „Respektuje, chrání a ocení naše tradice a kulturní i historické dědictví“ (RVP ZV, 2021, s. 5), má kladný vztah k umění, žije kulturním a sportovním životem. Jedná s ohledem na životní prostředí a snaží se dodržovat základní ekologické návyky. (RVP ZV, 2021)

**Kompetence pracovní**

Žák pracuje s ohledem na předem určená pravidla, při manuální práci neohrožuje sebe ani své okolí. S ohledem na své schopnosti a dovednosti vhodně volí další vzdělání a následné profesní zaměření. (RVP ZV, 2021)

**Kompetence digitální**

Žák ovládá digitální zařízení a pomocí nich vyhledává informace a data, u nichž posoudí relevantnost a správnost. Zná rizika spojena s působením v digitálním prostředí a chová se zde vhodně a bezpečně. (RVP ZV, 2021)

### 1.1.2 Vzdělávací oblasti

Vzdělávací obsah dělí RVP ZV do devíti vzdělávacích oblastí. Ty jsou tvořeny jedním či více vzdělávacími obory. Jednotlivé vzdělávací obory jsou rozděleny do tematických okruhů, které obsahují očekávané výstupy a učivo. Očekávané výstupy jsou na 1. stupni rozděleny do dvou období – očekávané výstupy pro první vzdělávací období, tedy pro 1. – 3. ročník a očekávané výstupy pro druhé období, tedy pro 4. – 5. ročník. Jsou formulovány tak, aby byly kontrolovatelné. Očekávané výstupy jsou zde rovněž uvedeny v upravené formě, na nižší úrovni, které jsou určeny pro některé žáky s IVP. (RVP ZV, 2021) „Učivo je chápáno jako prostředek k dosažení očekávaných výstupů.“ (RVP ZV, 2021, s. 15)

**Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace**

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace cílí především na využití matematiky v reálném životě a pochopení vzájemných vztahů, na což budou žáci navazovat při dalším studiu. Kvůli své nenahraditelné roli probíhá její výuka během celého základního vzdělávání.

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace je rozdělen do čtyř tematických okruhů: **Čísla a početní operace** (na prvním stupni) a Číslo a proměnná (navazuje na druhém stupni); **Závislosti, vztahy a práce s daty**; **Geometrie v rovině a v prostoru**; **Nestandardní aplikační úlohy a problémy**.

**Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace, 1. stupeň ZŠ**

Očekávané výstupy, tedy znalosti a dovednosti žáka, jsou zde rozděleny do dvou období. První období končí 3. ročníkem a konec druhého období je v 5. ročníku.

<u>Číslo a početní operace</u>

V tomto tematickém okruhu si žáci osvojují aritmetické operace ve třech složkách: **dovednost provádět operaci**; **algoritmické porozumění** – žáci by tedy měli rozumět tomu, proč je daná operace prováděna daným způsobem; **významové porozumění** – schopnost propojení operace s reálnou situací.

Očekávané výstupy:

1. období

Žák:

- „používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daném souboru, vytváří soubory s daným počtem prvků
- čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti
- užívá lineární uspořádání; zobrazí číslo na číselné ose
- provádí zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly
- řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace“ (RVP ZV, 2021, s. 31)

2. období

Žák:

- „využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení
- provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel
- zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel
- řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel
- modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku
- porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel
- přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty
- porozumí významu znaku „–“ pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose“

  (RVP ZV, 2021, s. 32)

Učivo:

- přirozená čísla, celá čísla, desetinná čísla, zlomky
- zápis čísla v desítkové soustavě a jeho znázornění – číselná osa, teploměr, model
- násobilka
- vlastnosti početních operací s čísly
- písemné algoritmy početních operací

Závislosti, vztahy a práce s daty

V tomto tematickém okruhu se žáci seznamují s určitými typy změn a závislostí, se kterými se mohou setkat v běžném životě. „Uvědomují si změny a závislosti známých jevů, docházejí k pochopení, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu. Tyto změny a závislosti žáci analyzují z tabulek, diagramů a grafů.“ (RVP ZV, 2021, s. 30) Tyto činnosti vedou žáka k tomu, aby později porozuměl pojmu funkce. (RVP ZV, 2021)

Očekávané výstupy:

1. období

Žák:

- „orientuje se v čase, provádí jednoduché převody jednotek času
- popisuje jednoduché závislosti z praktického života
- doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel“
  (RVP ZV, 2021, s. 32)

2. období

Žák:

- „vyhledává, sbírá a třídí data
- čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy“
  (RVP ZV, 2021, s. 33)

Učivo:

- závislosti a jejich vlastnosti
- diagramy, grafy, tabulky, jízdní řády

<u>Geometrie v rovině a v prostoru</u>

V tomto tematickém okruhu „žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině.“ (RVP ZV, 2021, s. 30) Odhadují a měří délku, obvod a obsah a na základě těchto vlastností mezi sebou geometrické útvary porovnávají.

Očekávané výstupy:

1. období

Žák:

- „rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci
- porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky
  rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině“
  (RVP ZV, 2021, s. 33)

2. období

Žák:

- „narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce
- sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran
- sestrojí rovnoběžky a kolmice
- určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu
- rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru“
  (RVP ZV, 2021, s. 33)

Učivo:

- základní útvary v rovině – lomená čára, přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, obdélník, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník, mnohoúhelník
- základní útvary v prostoru – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec
- délka úsečky; jednotky délky a jejich převody
- obvod a obsah obrazce
- vzájemná poloha dvou přímek v rovině
- osově souměrné útvary

<u>Nestandardní aplikační úlohy a problémy</u>

V tomto posledním, avšak důležitém, tematickém okruhu je nezbytné uplatnit logické myšlení. Úlohy tohoto typu „by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání.“ (RVP ZV, 2021, s. 30)

Očekávané výstupy:

2. období

Žák:

- „řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky“ (RVP ZV, 2021, s. 34)

Učivo:

- slovní úlohy
- číselné a obrázkové řady
- magické čtverce
- prostorová představivost

# 2. Kombinatorika

„Kombinatorika je matematická disciplína, která se zabývá rozdělováním, uspořádáním a výběrem prvků z dané množiny, tj. tvořením konfigurací daných prvků do skupin s určitými vlastnostmi." (Blažková & Vaňurová, 2012, s. 156) Na rozdíl od ostatních matematických disciplín pracujeme v kombinatorice pouze s konečnými množinami. (Calda, 1993)

Počátky kombinatoriky sahají až do antického Řecka, kde tehdejší matematici některé kombinatorické úlohy řešili. Jako vědní disciplína se však kombinatorika začala utvářet až mnohem později, a to v 16. století ve spojení s hazardními hrami, kdy se snažili hráči vypočítat svoji pravděpodobnost výhry. Tyto teorie dále rozvíjeli v 17. století tehdejší vědci, například B. Pascal. (Smida, 1989)

S kombinatorikou se setkáváme nejen v různých oblastech matematiky, ale jejich principů užíváme také v běžném životě, kde neustále něco kombinujeme – například jak zkombinovat oblečení, jakými spoji městské hromadné dopravy se dostaneme do práce, co a za kolik nakoupíme, co uvaříme, v jakém sledu vykonáme domácí práce apod. Můžeme vybírat z mnoha možností a vhodně je zkombinovat. Proto bychom měli kombinatorické myšlení rozvíjet již u žáků mladšího školního věku, kdy žáci řeší kombinatorické úlohy pouze využitím experimentu, ještě bez znalosti kombinatorických pravidel a funkcí. (Calda, 1993)

Kombinatorika má dvě základní pravidla, a to kombinatorické pravidlo součinu a kombinatorické pravidlo součtu. Ke kombinatorickým funkcím řadíme variace, permutace a kombinace bez opakování a s opakováním. (Calda, 1993)

## 2.1 Základní kombinatorická pravidla

V dalším textu popíšeme základní kombinatorická pravidla – kombinatorické pravidlo součtu a kombinatorické pravidlo součinu.

**Kombinatorické pravidlo součinu**: „Počet všech uspořádaných $k$-tic, jejichž první člen lze vybrat $n_1$ způsoby, druhý člen po výběru prvního členu $n_2$ způsoby atd. až $k$-tý člen po výběru všech předcházejících členů $n_k$ způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$." (Calda, 1993, s. 9)

*Příklad*: *„Určete počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.“* (Calda, 1993, s. 8)

*Řešení: Žádné číslo nezačíná nulou, tudíž na místo desítek můžeme dosadit číslice od 1 do 9. Na místo jednotek vybíráme opět z 9 možností, tedy číslice 0 až 9 kromě číslice, které dosadíme na místo desítek. Např.: Na místo desítek jsme dosadili číslici* $5$*, na místo jednotek můžeme tedy dosadit číslici z devíti-prvkové množiny {0; 1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9}. Počet takových dvojciferných čísel je tedy* $9 \cdot 9 = 81$. (Calda, 1993)

**Kombinatorické pravidlo součtu**: „Jsou-li $A_1$, $A_2$, … $A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1$, $p_2$, …, $p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.“ (Calda, 1993, s. 9)

***Příklad**: Využijeme zadání předchozího příkladu, pouze jej vyřešíme jiným způsobem.*

*Řešení: Dvojciferná čísla můžeme rozdělit do dvou disjunktních množin. První množina obsahuje čísla se stejnými číslicemi, tj. 11, 22, 33, …, 99. Druhá množina obsahuje čísla s různými číslicemi, tj. 10, 12, 13, … 97, 98. Víme, že všech dvojciferných čísel existuje 90 a dvojciferných čísel se shodnými číslicemi 9. Nás však zajímá počet dvojciferných čísel s různými číslicemi, ten si označíme neznámou* $p$ *a dosadíme do rovnice:*

$p + 9 = 90$. *Z této rovnice vypočítáme, že* $p = 90 - 9$

$$p = 81$$

*Počet takových dvojciferných čísel je 81.* (Calda, 1993)

## 2.2 Kombinatorické funkce

Následující text shrnuje a popisuje základní kombinatorické funkce, které můžeme dělit dle uspořádání prvků takto:

- **variace a permutace** – záleží na pořadí prvků, tj. skupiny jsou uspořádané,
- **kombinace** – nezáleží na pořadí prvků, tj. skupiny jsou neuspořádané.

Dalším kritériem, podle kterého můžeme kombinatorické funkce dělit, je opakování prvků ve skupině:

- prvky se ve skupině nemohou opakovat – variace, permutace a kombinace **bez opakování,**
- prvky se ve skupině mohou opakovat – variace, permutace a kombinace **s opakováním**.

### 2.2.1 Variace

a) **Variací $\boldsymbol{k}$-té třídy bez opakování z $\boldsymbol{n}$-prvkové množiny** je každá uspořádaná $k$-tice sestavená z těchto prvků tak, že je v ní každý obsažen nejvýše jedenkrát. Jde tedy o $k$-členné skupiny vytvořené z nějakých $n$ prvků, které se nemohou opakovat. Příklady z kategorie variací bez opakování jsou většinou formulovány jako: Je dáno $n$ různých předmětů. Kolik z nich můžeme sestavit $k$-členných skupin tak, aby se v ní každý předmět vyskytoval pouze jedenkrát? (Calda, 1993) Z následujícího vzorce získáme počet všech variací bez opakování.

$$\boxed{V\,(k,n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$$

***Příklad****: „K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté. Určete počet vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit.“* (Calda, 1993, s. 14)

*Řešení: Pruhy mají být různé barvy a záleží na pořadí, hledáme tedy 3členné variace z pěti prvků. Počet všech vlajek, které odpovídají zadanému popisu, určíme dosazením do vzorce takto:*

$$V\,(3,5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

*Existuje celkem 60 různých vlajek se zadanými parametry.* (Calda, 1993)

b) **Variací $\boldsymbol{k}$-té třídy s opakováním z $\boldsymbol{n}$-prvkové množiny** je každá uspořádaná $k$-tice, sestavená z těchto prvků, které se v ní mohou opakovat nejvýše $k$-krát. Jde tedy o $k$-členné skupiny vytvořené z nějakých $n$ prvků, které se mohou opakovat. Příklady z kategorie variací bez opakování jsou většinou formulovány jako:

Je dáno $n$ různých předmětů. Kolik z nich můžeme sestavit $k$-členných skupin tak, že se v ní předměty mohou opakovat? (Calda, 1993)
Z následujícího vzorce získáme počet všech variací s opakováním.

$$\boxed{V'(k,n) = n^k}$$

***Příklad***: *„Ve Švambránii je státní poznávací značka osobního auta tvořena uspořádanou sedmicí, jejíž první tři členy jsou písmena a další čtyři číslice. Určete, kolik poznávacích značek mají ve Švambránii dispozici, mohou-li pro první část značky použít každé z 28 písmen."* (Calda, 1993, s. 35)

*Řešení: Na první část SPZ vybíráme uspořádanou trojici z 28 písmen, která se mohou opakovat, tedy* $V'(3,28) = 28^3$ *možností uspořádaných trojic. Do druhé části vybíráme uspořádanou čtveřici z deseti číslic, která se rovněž mohou opakovat, tedy* $V'(4,10) = 10^4$ *možností uspořádaných čtveřic. K výpočtu všech možností značek využijeme kombinatorické pravidlo součinu, tj. počet všech státních poznávacích značek vyhovujících daným podmínkám určíme dosazením do vzorce následovně:*

$V'(3,28) \cdot V'(4,10) = 28^3 \cdot 10^4 = 219\,520\,000$

*Existuje celkem* $219\,520\,000$ *různých SPZ se zadanými parametry.* (Calda, 1993)

### 2.2.2 Permutace

a) **Permutací bez opakování z $n$-prvkové množiny** rozumíme každou uspořádanou $n$-tici z těchto prvků a každý prvek je v ní obsažen právě jednou. Lze ji považovat jako speciální případ variací bez opakování – zatímco u variací uvažujeme skupiny, kde se prvky vyskytují jen v určitém množství, u permutací se ve skupině vyskytují všechny prvky a záleží pouze na jejich pořadí. (Calda, 1993)
Z následujícího vzorce získáme počet všech permutací bez opakování.

$$\boxed{P(n) = n!}$$

**Faktoriál**: pro $n \in \mathbb{N}$ je $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

pro $n = 0$ je $0! = 1$.

*Příklad*: *Do jídelny přišla na oběd skupinka 11 dětí. Určete, kolika způsoby se mohli seřadit do fronty u výdeje obědů.* (Vrba, 1980)

*Řešení: Hledáme počet front ze všech 11 dětí, jde tedy o permutaci z 11 prvků. Počet různých front, které mohly děti utvořit, určíme dosazením zadaných čísel do vzorce následovně:*

$P(11) = 11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = \; 39\,916\,800$

*11 dětí mohlo utvořit celkem 39 916 800 různých front.* (Vrba, 1980)

b) **Permutací s opakováním z $\boldsymbol{n}$-prvkové množiny** rozumíme uspořádanou $k$-tici sestavenou z těchto prvků tak, že je v ní každý prvek obsažen alespoň jednou. Některé prvky jsou tedy stejné a počet permutací tudíž menší. (Calda, 1993)
Z následujícího vzorce získáme počet všech permutací s opakováním.

$$\boxed{P'(k_1, k_2, \ldots k_n) = \frac{(k_1 + \; k_2 \; + \; \ldots \; + \; k_n)!}{k_1! \;\; k_2! \; \ldots \; k_n!}}$$

*Příklad*: *„Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova ABRAKADABRA.“* (Calda, 1993, s. 43)

*Řešení: V tomto slově máme pět písmen, kde A je pětkrát, B dvakrát, D jednou, K jednou a R dvakrát. Jde zde tedy o permutaci s opakováním z pěti prvků a počet všech způsobů přemístění písmen tedy vypočítáme dosazením do vzorce následovně:* $P'\,(5, 2, 2, 1, 1) \; = \; \frac{(5\,+\,2\,+\,2\,+\,1\,+\,1)!}{5!\;2!\;2!\;1!\;1!} \; = \; \frac{11!}{5!\;2!\;2!} \; = \; \frac{11!}{480} = 83\,160$

*Písmena slova ABRAKADABRA lze přemístit 83 160 různými způsoby.* (Calda, 1993)

### 2.2.3 Kombinace

a) **Kombinací $\boldsymbol{k}$-té třídy z $\boldsymbol{n}$-prvkové množiny bez opakování** je každá neuspořádaná $k$-tice, sestavená z prvků této množiny, kdy je v ní každý prvek obsažen maximálně jedenkrát. Vybíráme tedy z $n$ prvků do $k$-členné skupiny, ve které se prvky nemohou opakovat a nezáleží na jejich pořadí. (Calda, 1993)
Z následujícího vzorce získáme počet všech kombinací bez opakování.

$$\boxed{K\,(k, n) = \binom{n}{k}}$$

Kombinační číslo: pro $n \in \mathbb{Z}^+$ a $k \in \mathbb{Z}^+$, $k \leq n$ je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

***Příklad**: „Určete, kolika způsoby je možno ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou právě dvě ženy.“* (Calda, 1993, s. 27)

*Řešení: Když vybereme dvě ženy ze čtyř, tedy $\binom{4}{2}$, pro muže nám zbývají čtyři místa. Vybereme čtyři muže ze sedmi, tedy $\binom{7}{4}$. K výpočtu využijeme kombinatorické pravidlo součinu, tj. $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4} = 210$ způsobů.*

*Šestičlenná skupina lze dle zadaných kritérií sestavit 210 různými způsoby.* (Calda, 1993)

b) **Kombinací $\boldsymbol{k}$-té třídy z $\boldsymbol{n}$-prvkové množiny s opakováním** je každá $k$-tice složená z prvků této množiny tak, že se zde každý prvek opakuje nejvýše $k$-krát. V tomto případě tedy vybíráme z $n$ prvků do $k$-členné skupiny, ve které nezáleží na pořadí prvků a mohou se opakovat. (Calda, 1993)
Z následujícího vzorce získáme počet všech kombinací s opakováním.

$$\boxed{K'\,(k, n) = \binom{n + k - 1}{k}}$$

***Příklad**: „V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky; kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné. Určete, kolika způsoby lze vybrat pět kuliček, jestliže je v sáčku alespoň pět kuliček od každé barvy.“* (Calda, 1993, s. 49)

*Řešení: Protože je od každé barvy aspoň pět kuliček, můžeme vytvořit všechny možné pětice ze tří barev, tedy K'* $(5, 3) = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21.$

*Pět kuliček lze dle zadaných kritérií vybrat 21 různými způsoby.* (Calda, 1993)

# 3. Kombinatorické úlohy v učivu matematiky na 1. stupni ZŠ

## 3.1 Kombinační myšlení

Pokud žáci řeší kombinatorické úlohy, automaticky se u nich rozvíjí kombinační myšlení, které vykazuje tyto specifické fenomény:

- žáci si uvědomují vztahy mezi zkoumanými objekty,
- žáci poznají, kdy je skupina prvků uspořádaná a kdy neuspořádaná,
- žáci určí, zda se ve skupinách prvky mohou nebo nemohou opakovat,
- žáci dovedou úlohu a její řešení zobecnit a díky tomu najít pravidlo pro určování výsledků dalších úloh.

  (Blažková & Budínová, 2016)

## 3.2 Rozvoj kombinačního myšlení u žáků 1. stupně ZŠ

Na 1. stupni ZŠ není kombinatorika v RVP popsána jako samostatné téma, je pouze zařazena jako součást učiva v tematickém okruhu *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*, v rámci kterých žáci řeší jednoduché slovní úlohy, jejichž řešení se často vymyká běžným postupům a algoritmům školní matematiky.

Dítě se od útlého věku díky jeho zvědavosti a touze po poznání přirozeně setkává s kombinatorikou prostřednictvím různých her i situací v běžném životě. Abychom přispěli k dalšímu rozvoji kombinačního myšlení žáka, je vhodné již od prvních ročníků ZŠ zařazovat do výuky matematiky úlohy s kombinatorickými tématy přizpůsobené jeho věku a zájmům. Je důležité, aby žák mohl při řešení úloh manipulovat s hmotnými předměty (korálky, kuličky, geometrické tvary, …), a měl tak reálnou představu o řešeném problému. Žáci tak postupují od experimentu v podobě manipulativní činnosti ke zobecnění a grafickému znázornění. Měli bychom vést žáka k tomu, aby úkoly vyřešil sám a podporovat jeho nápady při postupu řešení, což vyžaduje důkladnou přípravu pedagoga, který by si měl zadávanou úlohu předem prostudovat a promyslet různé způsoby řešení. (Blažková et al., 1998; Zýková, 2011)

Mezi úlohy pro rozvoj kombinačního myšlení žáků 1. stupně ZŠ, které lze řešit experimentem prostřednictvím manipulativní činnosti či dramatizací, patří například stavby věží z různobarevných kostek, kombinování oblečení, rozdělování peněz, počítání nohou zvířat, sestavování kytic z různých druhů květin, navlékání korálek různých barev, řazení se do fronty či podávání rukou apod. Jako didaktické pomůcky můžeme také využít různé společenské hry, které všichni znají, např. Domino, Kostky, Scrable, Člověče nezlob se. (Blažková et al., 1998; Břehovský & Příhonská, 2017)

Jak již bylo zmíněno výše, kombinatorické úlohy nejsou v RVP pro 1. stupeň popsány, a proto je některá vydavatelství do svých učebnic zařazují pouze zřídka. V učebnicích jiných nakladatelství se s nimi můžeme setkat častěji. Tyto úlohy v učebnicích mají však někdy své nedostatky:

- Jednotlivé dovednosti, které jsou zde osvojovány, nejsou vzájemně propojovány, učí se izolovaně;
- Úlohy nejsou provázány mezipředmětově;
- V úlohách chybí souvislost s nějakou reálnou situací, která by byla žákům blízká.

(Břehovský & Příhonská, 2017)

V Tabulce 1 jsou rozděleny a popsány jednotlivé typy úloh. Toto rozdělení vzniklo na základě analýzy učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ, kterou provedla v rámci výzkumného šetření na téma kombinatorické úlohy Příhonská (2019). Úlohy jsou rozděleny do devíti kategorií (C1 – C9).

**Tabulka 1**

*Klasifikace kategorií kombinatorických úloh v učebnicích*

| Kategorie | Název | Typy úloh |
|---|---|---|
| **C1** | Hry s čísly a písmeny | úlohy s číslicemi a vytváření čísel kombinacemi různých možností, početní operace s čísly, hledání možností pro daný výsledek, písmenné kombinace, kódování |
| **C2** | Kvantifikační a rozhodovací problémy | nejvíce, nejméně, alespoň … |
| **C3** | Sudoku a Magické čtverce | |
| **C4** | Využití teorie grafů | nalezení cesty v plánu, bludišti nebo čtvercové síti; úlohy na přelévání tekutin; úlohy na vážení; úlohy se sportovní tématikou, rozpis turnaje… |
| **C5** | Základní kombinatorická pravidla | kombinatorické pravidlo součtu a součinu, Pascalův trojúhelník v úlohách, tvorby *k*-tic z *n* prvků… |
| **C6** | Geometrické úlohy | problémy v rovině a v prostoru: dělení útvarů na části, sestavování možných obrazců z daných tvarů, barvení stěn krychlí, sirkové hlavolamy |
| **C7** | Třídící problémy | způsoby vyplacení určité částky peněz pomocí daného počtu a druhu mincí, rozdělování do přihrádek |
| **C8** | Komplexní úlohy | propojení jednotlivých prvků z úloh předchozích kategorií |
| **C9** | Kreativní úlohy | úlohy vyžadující buď vytvoření další úlohy a zadání na základě předchozí úlohy, nebo určení, co ještě můžeme ze zadaných dat vypočítat či určit |

Zdroj: Příhonská, 2019

Ukázky z učebnic matematiky pro 4. a 5. ročník ZŠ (na základě rozdělení z Tabulky 1):

- C1 – Hry s čísly a písmeny

  *„Tomáš zapomněl svoji kombinaci na zámku u kola. Na jeho otevření musí složit trojciferné číslo z číslic 1–6. Kolik je to možností?“* (Justová, 2012, s. 61)

  *„Kolik lze napsat čtyřciferných čísel z číslic 2, 4, 6, 0, když se:*

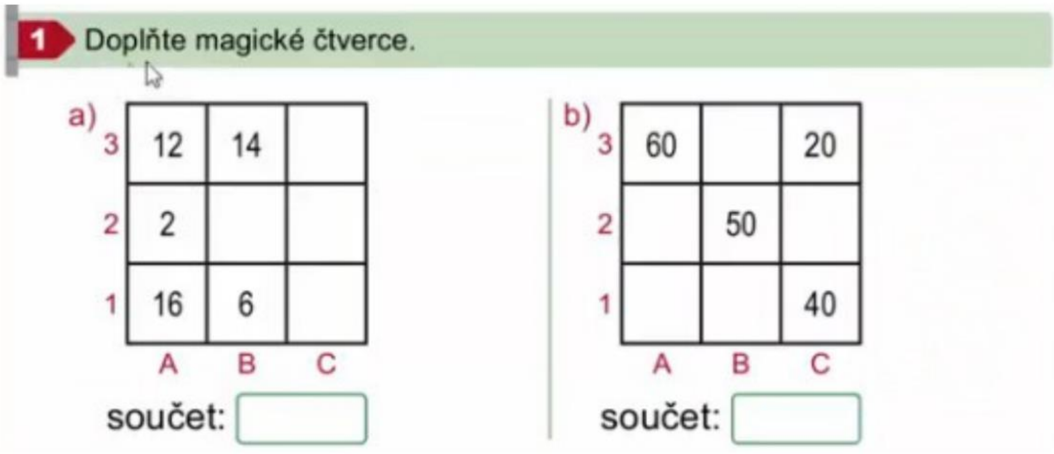
  *a) číslice v čísle mohou opakovat?*

  *b) číslice v čísle nemohou opakovat?“* (Justová, 2012, s. 61)

- C3 – Sudoku a Magické čtverce

**Obrázek 2**

*Magické čtverce*




Zdroj: Novotný & Novák, 2014

- C4 – Využití teorie grafů

  *„Turnaje v košíkové se zúčastnilo 6 družstev a hrálo každé s každým. Kolik se odehrálo celkem zápasu?"* (Justová, 2012, s. 61)

- C6 – Geometrické úlohy

  *„Vymodeluj co nejvíce různých trojúhelníků, které mají obvod:*

  *a) 3 dřívka b) 4 dřívka c) 5 dřívek d) 6 dřívek e)7 dřívek."*
  (Hejný et al., 2010, s. 48)

- C7 – Třídící problémy

  *„Jak můžeme rozměnit pětisetkorunovou bankovku na menší peníze, alespoň padesátikoruny, budou-li z nich:*

  *a) alespoň 3 stokoruny,*

  *b) nejvýše 2 stokoruny.*

  *Do tabulky zapiš všechny možnosti."* (Justová, 2012, s. 60)

Žáci 1. stupně nevyužívají k řešení kombinatorických úloh žádné naučené vzorce, ale uplatňují různé, mnohdy intuitivní, řešitelské strategie. Příhonská (2019, s. 13) ve svém výzkumu zjistila, že žáci nejčastěji využívali při řešení kombinatorických úloh dvě metody řešení:

1) „systematický zápis všech možných řešení ve formě tabulky, resp. tabulkového schématu či symbolického zápisu“

***Příklad**: „Paní učitelka je nemocná, a proto se v pondělí mění rozvrh. Žáci budou mít tyto předměty: český jazyk, matematiku, tělesnou výchovu, anglický jazyk a hudební výchovu. Druhou hodinou určitě musí být anglický jazyk a pátou hodinou tělesná výchova. Jak může vypadat rozvrh na pondělí?“* (Příhonská, 2019, s. 10)

**Obrázek 3**

*Žákovské řešení úlohy zápisem všech možných řešení*


| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|---|
| PONDĚLÍ | M | AJ | ČJ | HV | TV |
| PONDĚLÍ | ČJ | AJ | HV | M | TV |
| PONDĚLÍ | HV | AJ | M | ČJ | TV |
| PONDĚLÍ | M | AJ | HV | ČJ | TV |
| PONDĚLÍ | ČJ | AJ | M | HV | TV |
| PONDĚLÍ | HV | AJ | ČJ | M | TV |

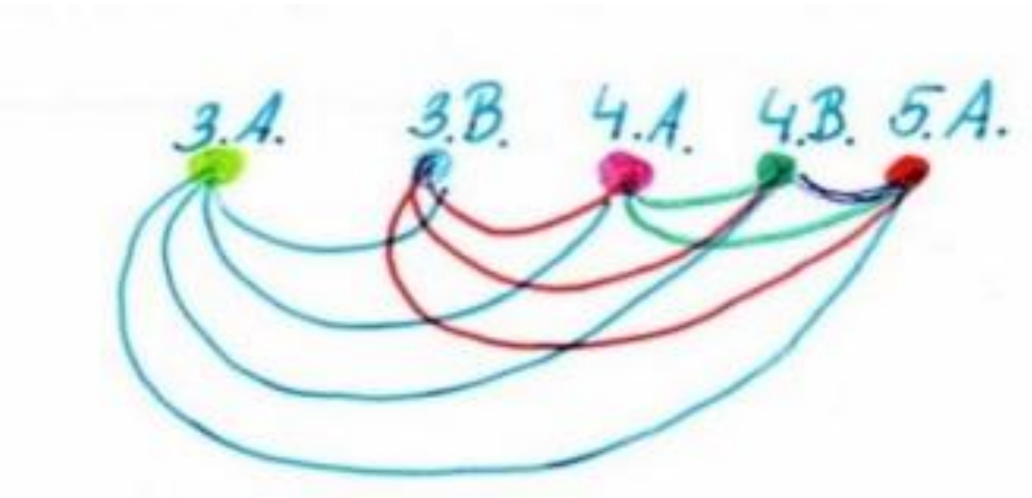
Zdroj: Příhonská, 2019

2) „diskrétní graf jako metodu grafického postupu či vizualizace dané situace,“ kdy je vizualizace provedena většinou pomocí obrázku.

***Příklad**: „Ve škole se koná turnaj ve vybíjené. Přihlásilo se do něj pět družstev z pěti tříd (3. A, 3. B, 4. A, 4. B a 5. A). V turnaji si zahrají všechny týmy navzájem (každý s každým jednou). Kolik zápasů bude celkem?“* (Příhonská, 2019, s. 10)

**Obrázek 4**

*Žákovské řešení úlohy grafickým způsobem*




Zdroj: Příhonská, 2019

# PRAKTICKÁ ČÁST

## 4. Pracovní list

Cílem mé diplomové práce bylo zjistit, jaká je úroveň kombinačního myšlení žáků 1. stupně ZŠ, tedy jaká bude jejich úspěšnost při řešení vybraných kombinatorických úloh. V rámci praktické části práce jsem tedy připravila pracovní list s pěti kombinatorickými úlohami (Příloha 1), které mají kombinační myšlení žáků prověřit. Úlohy jsou přiměřené věku žáků 4. a 5. ročníku základní školy a každou úlohu jsem se snažila volit tak, aby byly z různých kategorií dle Tabulky 1, aby si žáci vyzkoušeli co nejvíce typů řešitelských strategií. V následujícím textu se budu těmito jednotlivými kombinatorickými úlohami zabývat podrobněji a nabídnu jejich možné způsoby řešení.

**1. ÚLOHA**

**Zadání:** *Kolik dvouciferných čísel můžeš sestavit z číslic 2, 6, 8, když se číslice nemohou opakovat?*

Takové typy kombinatorických úkolů, v nichž se pracuje s číslicemi, se běžně vyskytují v učebnicích matematiky pro 1. stupeň ZŠ, například v učebnici Justové (2012) nebo Hejného et al. (2010).

Možné způsoby řešení:

1. Aritmeticky s využitím kombinatorického pravidla součinu:
   $3 \cdot 2 = \mathbf{6}$ čísel
   → Na místo desítek vybíráme ze 3 číslic a na místo jednotek již pouze ze 2 číslic. Z těchto číslic můžeme zapsat **6 dvojciferných čísel**.

2. Vypíšeme všechny možnosti
   **26, 28, 62, 68, 82, 86**
   → Zapsali jsme **6 dvojciferných čísel**.

## 2. ÚLOHA

**Zadání:** *Ve škole proběhne fotbalový turnaj, kterého se zúčastní 5 tříd: 4. A, 4. B, 5. A, 5. B a 5.C. Každá třída hraje s každou třídou 1 zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?*

Tyto úlohy typu „každý s každým“ (podávání rukou, přiťuknutí sklenkami, …) se rovněž vyskytují v učebnicích pro 1. stupeň ZŠ, například v učebnici Justové (2012). Tyto situace mohou být žákům známé z běžného života. Mnoho žáků se již mohlo setkat s rozepisováním vzájemných zápasů různých sportovních týmů do tabulky.

Možné způsoby řešení:

1. Využití vzorce pro dvouprvkové kombinace z 5 prvků:

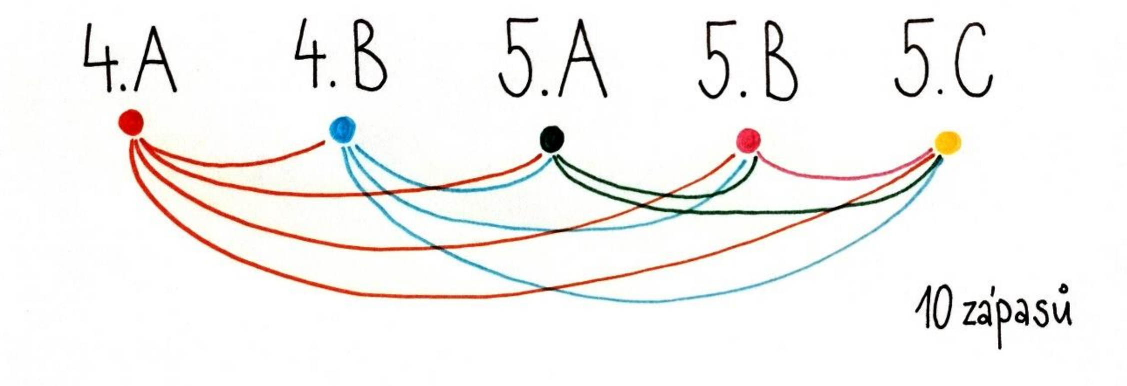
$$K\,(2,5) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot3\cdot2} = \frac{120}{12} = \mathbf{10\ zápasů}$$

2. Vypíšeme všechny možnosti

| | | | |
|---|---|---|---|
| **4.A – 4.B** | **4.B – 5.A** | **5.A – 5.B** | **5.B – 5.C** |
| **4.A – 5.A** | **4.B – 5.B** | **5.A – 5.C** | |
| **4.A – 5.B** | **4.B – 5.C** | | |
| **4.A – 5.C** | | | |

→ Celkem se odehraje **10 zápasů**.

3. Graficky (uzlový graf)



4. Tabulka

| | 4.A | 4.B | 5.A | 5.B | 5.C |
|---|---|---|---|---|---|
| 4.A | | 1. | 2. | 3. | 4. |
| 4.B | 1. | | 5. | 6. | 7. |
| 5.A | 2. | 5. | | 8. | 9. |
| 5.B | 3. | 6. | 8. | | 10. |
| 5.C | 4. | 7. | 9. | 10. | |

→ Z tabulky je možné vyčíst, že se celkem odehraje **10 zápasů**.

### 3. ÚLOHA

**Zadání:** *Kuba si ze skříně vytáhl 4 trička (zelené, modré, žluté, červené) a 3 kraťasy (černé, bílé, šedé). Kolik kombinací oblečení si může Kuba obléknout?*

Touto úlohou jsem se inspirovala v publikaci Příhonské (2019), podobnou úlohu můžeme také najít v učebnici matematiky Justové (2012).

Možné způsoby řešení:

1. Početně (kombinatorické pravidlo součinu)

   $4 \cdot 3 = \mathbf{12}$ možností oblečení

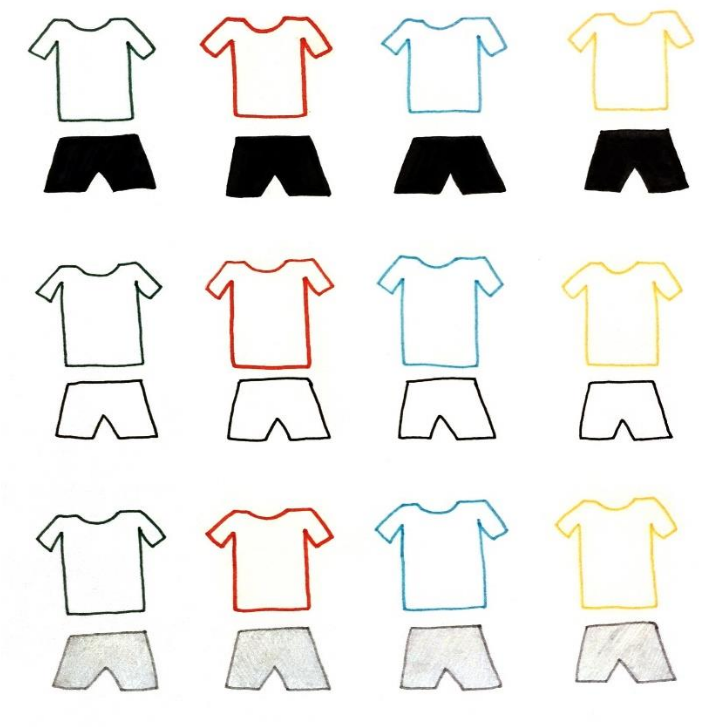
   → Kombinaci oblečení vytvoříme výběrem ze 4 triček a 3 kraťasů. Existuje tedy **12 možností**, jak se Kuba může obléknout.

2. Vypíšeme všechny možnosti

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Z – Č** | **M – Č** | **Ž – Č** | **Č – Č** |
| **Z – B** | **M – B** | **Ž – B** | **Č – B** |
| **Z – Š** | **M – Š** | **Ž – Š** | **Č – Š** |

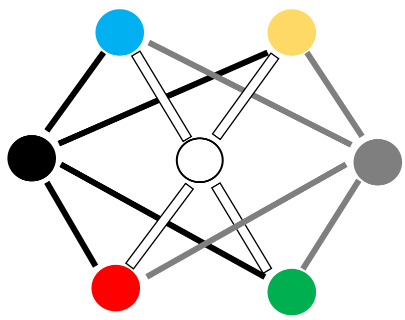
   → Existuje **12 možností**, jak se Kuba může obléknout.

3. Graficky (obrázkem)



→ Existuje **12 možností**, jak se Kuba může obléknout.

4. Graficky (uzlový graf)



→ Každá spojnice mezi barevnými kruhy znamenají vždy 1 možnost. V grafu vidíme 12 spojnic, existuje tedy **12 možností**, jak se Kuba může obléknout.

**4. ÚLOHA**

**Zadání:** *Kája dostala od kamarádů 5 obrázků. Přemýšlí, jak obrázky uspořádá vedle sebe, aby si je mohla pověsit na zeď. Kolika způsoby může obrázky vedle sebe pověsit, když má ten největší viset uprostřed?*

Touto úlohou jsem se také inspirovala v publikaci Příhonské (2019). S nejrůznějšími úlohami na využití permutací se můžeme rovněž setkat v učebnicích (například seřazení do fronty na oběd, navlékání korálek, …). Tato úloha s obrázky se mi zdála jako velmi atraktivní a motivační.

Možné způsoby řešení:

1. Početně (permutace bez opakování)

   $P\ (4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{24\ možností}$

2. Všechny obrázky můžeme očíslovat a pomocí číslic vypíšeme všechny možnosti

**1** **2** **3** **4** **5**

→ Obrázky nejdříve seřadíme tak, aby byl největší uprostřed a následně očíslujeme od 1 do 5. Do tabulky níže vypíšeme všechny možnosti uspořádání obrázků s využitím číslic.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 2 3 4 5 | 2 1 3 4 5 | 4 1 3 2 5 | 5 1 3 2 4 |
| 1 2 3 5 4 | 2 1 3 5 4 | 4 1 3 5 2 | 5 1 3 4 2 |
| 1 4 3 2 5 | 2 4 3 1 5 | 4 2 3 1 5 | 5 2 3 1 4 |
| 1 4 3 5 2 | 2 4 3 5 1 | 4 2 3 5 1 | 5 2 3 4 1 |
| 1 5 3 2 4 | 2 5 3 1 4 | 4 5 3 1 2 | 5 4 3 1 2 |
| 1 5 3 4 2 | 2 5 3 4 1 | 4 5 3 2 1 | 5 4 3 2 1 |

→ Vypsali jsme **24 možností**.

**5. ÚLOHA**

**Zadání:** *Kolika dvoukorunami a kolika pětikorunami můžeš zaplatit za nákup, který stojí 26 Kč? Úloha má více řešení, zkus najít všechny.*

Tyto úlohy vedoucí na neurčité rovnice se rovněž vyskytují v učebnicích matematiky, můžeme se s ní setkat například v učebnici Justové (2012).

Neurčitou neboli diofantickou rovnicí rozumíme lineární rovnici $ax + by = c$, kde $a \neq 0 \wedge b \neq 0$. Koeficienty $a, b, c$ i neznámé $x, y$ jsou z oboru celých čísel. Podmínkou pro to, aby měla tato rovnice řešení, je, aby největší společný dělitel $D$ koeficientů $a, b$ dělil celé číslo $c$. „Předpokládejme, že rovnice má řešení $x_0, y_0$. Potom platí $D|a \cdot x_0 + b \cdot y_0$, protože $(D|a) \wedge (D|b)$. Tím jsme dokázali, že $D|c$.“ (Drábek, 1985, s. 195) Provedením vhodných úprav rovnice lze docílit toho, že koeficienty $a, b$ jsou z oboru přirozených čísel. Například rovnici $11 \cdot x - 6 \cdot y = 10$ lze upravit do podoby $11 \cdot x + 6 \cdot (-y) = 10$. Touto úpravou jsme dosáhli toho, že koeficienty $a, b$ jsou čísla přirozená. (Drábek, 1985)

Při řešení úlohy z pracovního listu hledáme takové násobky čísla 2 a čísla 5, aby byl jejich součet roven 26.

Možné způsoby řešení:

1. Algebraicky s využitím neurčité rovnice

   $x$… počet pětikorun

   $y$… počet dvoukorun

   $5x + 2y = 26$

   Nejprve ověříme, zda má rovnice řešení → $D(5; 2) = 1$. Jelikož platí, že $D|26$, rovnice řešení má.

Nyní dosadíme do vzorce $D = ax_0' + by_0'$, čímž získáme neurčitou rovnici:

$1 = 5x_0' + 2y_0'$.

Za neznámé $x_0'$ a $y_0'$ zvolíme taková čísla, aby platila rovnost. Lze tedy dosadit například $x_0' = -1$ a $y_0' = 3$; Následně celou rovnici vynásobíme 26.

$1 = 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \qquad | \cdot 26,$

$26 = 5 \cdot (-26) + 2 \cdot 78.$

Z této poslední rovnosti vidíme, že $x_0 = -26$ a $y_0 = 78$. Tato čísla dosadíme do následujících vzorců:

$x = x_0 + \frac{b}{D} t,$ $\qquad$ $y = y_0 - \frac{a}{D} t,$

$x = -26 + \frac{2}{1} t,$ $\qquad$ $y = 78 - \frac{5}{1} t$

$x = -26 + 2t.$ $\qquad$ $y = 78 - 5t, \qquad t \in \mathbf{Z}.$

Jelikož pro tuto úlohu musí platit podmínky $x \geq 0 \wedge y \geq 0$, je nyní nutné určit, z jakého intervalu lze hodnoty pro parametr $t$ dosazovat:

$x \geq 0,$ $\qquad$ $y \geq 0,$

$-26 + 2t \geq 0,$ $\qquad$ $78 - 5t \geq 0 \qquad | \cdot (-1),$

$2t \geq 26 \qquad |: 2,$ $\qquad$ $5t \leq 78 \qquad |: 5,$

$t \geq 13.$ $\qquad$ $t \leq 15{,}6 \qquad t \in \mathbf{Z}.$

Z těchto podmínek vyplývá, že může dosadit z těchto hodnot pro $t = \{13; 14; 15\}$. Tyto hodnoty nyní postupně dosadíme do rovnic pro $x$ a $y$:

$t = 13 \rightarrow x_1 = -26 + 2 \cdot 13,$ $\qquad$ $y_1 = 78 - 5 \cdot 13,$

$\boldsymbol{x_1 = 0}.$ $\qquad$ $\boldsymbol{y_1 = 13}.$

$t = 14 \rightarrow x_1 = -26 + 2 \cdot 14,$ $\qquad$ $y_1 = 78 - 5 \cdot 14,$

$\boldsymbol{x_1 = 2}.$ $\qquad$ $\boldsymbol{y_1 = 8}.$

$t = 15 \rightarrow x_1 = -26 + 2 \cdot 15,$ $\qquad$ $y_1 = 78 - 5 \cdot 15,$

$\boldsymbol{x_1 = 4}.$ $\qquad$ $\boldsymbol{y_1 = 3}.$

Všechna řešení zapíšeme zpět do rovnice a ověříme správnost:

1) $5 \cdot 0 + 2 \cdot 13 = 26$ → 0 pětikorun a 13 dvoukorun,
2) $5 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 26$ → 2 pětikoruny a 8 dvoukorun,
3) $5 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 26$ → 4 pětikoruny a 3 dvoukoruny.

→ Neurčitá rovnice, kterou jsme pro vyřešení úlohy sestavili, má **3 řešení** v oboru přirozených čísel.

2. Tabulka (metoda experimentální)

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Počet pětikorun | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| hodnota Kč | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| zbývá Kč | 26 | 21 | 16 | 11 | 6 | 1 | - |
| Počet dvoukorun | 13 | - | 8 | - | 3 | - | - |

→ Z tabulky lze vyčíst, že úloha má **3 řešení**, která vidíme v 1., 3. a 5. sloupci. O správnosti řešení se přesvědčíme aritmeticky.
Tedy 0 pětikorun a 13 dvoukorun je: $0 \cdot 5 + 13 \cdot 2 = 26$,
2 pětikoruny a 8 dvoukorun je: $2 \cdot 5 + 8 \cdot 2 = 26$,
4 pětikoruny a 3 dvoukoruny je: $4 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 26$.

# 5. Kvantitativní výzkum vyhodnocující výsledky žákovských řešení kombinatorických úloh

## 5.1 Cíl výzkumného šetření

Cílem mé diplomové práce bylo zjistit, jaká je úroveň kombinačního myšlení žáků 1. stupně ZŠ. Nástrojem pro toto zjištění byl pracovní list (Příloha 1), který jsem vytvořila a zadala žákům 4. a 5. ročníku. Na základě tohoto pracovního listu s vybranými pěti kombinatorickými úlohami, jsem zjišťovala úspěšnost žáků 4. a 5. ročníku při jejich řešení.

## 5.2 Metodologie kvantitativního výzkumu

Vědecký výzkum dělíme dle použité metodologie na kvantitativní a kvalitativní, mohou se však navzájem prolínat. Kvantitativní výzkum se na danou problematiku zaměřuje pouze na jednu objektivní realitu, je nestranný. Kvalitativní výzkum je naopak subjektivní a zkoumá více možných realit. (Gavora, 2010) „Pokud hovoříme o kvantitativně orientovaném výzkumu v pedagogice, můžeme jej vymezit jako záměrnou a systematickou činnost, při které se empirickými metodami zkoumají hypotézy o vztazích mezi pedagogickými jevy." (Chráska, 2016, s. 11)

Ve své diplomové práci jsem se zaměřila na kvantitativní výzkum, v němž sleduji úspěšnost žáků při řešení vybraných kombinatorických úloh pracovního listu a výsledky porovnávám. Data, která jsem pro výzkum získala, porovnávala a vyhodnocovala, tvoří soubor výsledků kombinatorických úloh vytvořeného pracovního listu (Příloha 1) žáků 4. a 5. ročníku.

## 5.3 Odhady výsledků výzkumného šetření

Před tím, než jsem ve škole zadala pracovní list (Příloha 1) k vypracování žákům, jsem se pokusila o několik odhadů, jak by řešení jednotlivých úloh mohla vypadat a jak by žáci při jejich řešení mohli být úspěšní. Tyto odhady budou po zpracování výsledků vyřešených pracovních listů buď potvrzeny, nebo vyvráceny.

### 1. ÚLOHA

**Zadání:** *Kolik dvouciferných čísel můžeš sestavit z číslic 2, 6, 8, když se číslice nemohou opakovat?*

Odhaduji, že při řešení této úlohy, kde mají žáci za úkol zapsat dvojciferná čísla ze tří zadaných číslic, kdy se číslice nemohou opakovat, se najde pár žáků, kteří budou nepozorní při čtení zadání. Je tedy možné, že namísto 6 správných řešení naleznou 8 řešení, z čehož však 2 neodpovídají podmínce, že se číslice v zápisu nemohou opakovat. Předpokládám, že většina žáků k vyřešení úlohy využije takový způsob, kdy všechny možnosti vypíše. Odhaduji, že relativní četnost úspěšnosti řešení této úlohy bude v 5. ročníku asi 75 %, ve 4. ročníku to bude o něco méně, a to asi 70 %.

### 2. ÚLOHA

**Zadání:** *Ve škole proběhne fotbalový turnaj, kterého se zúčastní 5 tříd: 4. A, 4. B, 5. A, 5. B a 5.C. Každá třída hraje s každou třídou 1 zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?*

Tuto úlohu, kde chceme znát počet vzájemných zápasů mezi pěti třídami, by žáci mohli řešit pomocí tabulky. Předpokládám, že žáci, kteří se věnují nějakým sportovním hrám a účastní se turnajů, by takové tabulky, pomocí kterých se vzájemné zápasy rozepisují, mohli znát. To by pro ně mohlo být výhodou a mohli by tohoto způsobu řešení využít. Odhaduji, že relativní četnost počtu úspěšných řešení této úlohy v 5. ročníku bude asi 60 %, ve 4. ročníku by se relativní četnost počtu úspěšných řešení mohla pohybovat kolem 50 %.

### 3. ÚLOHA

**Zadání:** *Kuba si ze skříně vytáhl 4 trička (zelené, modré, žluté, červené) a 3 kraťasy (černé, bílé, šedé). Kolik kombinací oblečení si může Kuba obléknout?*

U této úlohy, ve které je úkolem určit počet možností oblečení, předpokládám, že ji budou žáci řešit graficky, s využitím barev. Myslím, že by řešení mohlo mít poměrně vysokou úspěšnost, odhaduji, že relativní četnost úspěšnosti řešení by mohla dosahovat 80 % v obou ročnících.

**4. ÚLOHA**

**Zadání:** *Kája dostala od kamarádů 5 obrázků. Přemýšlí, jak obrázky uspořádá vedle sebe, aby si je mohla pověsit na zeď. Kolika způsoby může obrázky vedle sebe pověsit, když má ten největší viset uprostřed?*

Tuto úlohu, kde žáci určují počet možností poskládání obrázků do řady, vidím jako nejproblematičtější. Pro žáky může být náročný vysoký počet možných řešení, kterých je celkem 24 a při řešení úlohy by je tak vysoký počet mohl odradit. Grafické řešení, ve smyslu překreslování obrázků do všech možností, zde není zcela možné. Žáci by mohli například obrázky očíslovat a možnosti poté pomocí číslic zapisovat do tabulky. Předpokládám, že tato úloha bude mít nejnižší úspěšnost řešení, odhaduji, že by jeho relativní četnost mohla být v 5. ročníku asi 20 %, ve 4. ročníku 15 %.

**5. ÚLOHA**

**Zadání:** *Kolika dvoukorunami a kolika pětikorunami můžeš zaplatit za nákup, který stojí 26 Kč? Úloha má více řešení, zkus najít všechny.*

Odhaduji, že v této úloze s mincemi někteří žáci nenajdou všechna 3 možná řešení. Myslím si, že jim největší problém bude dělat to řešení, kde máme 13 dvoukorun a žádnou pětikorunu. Tudíž je možné, že i ti žáci, kteří zvolí dobrou řešitelskou strategii, najdou pouze 2 možná řešení. Odhaduji, že relativní četnost počtu úspěšných řešení bude v 5. ročníku okolo 65 % a ve 4. ročníku okolo 55 %.

Obecně odhaduji, že všechny úlohy budou dosahovat vyšší úspěšnosti řešení v 5. ročníku, neboť žáci 5. ročníku by měli mít více znalostí a zkušeností než žáci 4. ročníku.

## 5.4 Výzkumný soubor

Pracovní list s vybranými kombinatorickými úlohami, jehož zadání je uvedeno v Příloze 1 této práce, jsem zadala žákům 4. ročníku a 5. ročníku na jedné brněnské škole. Ve 4. ročníku pracovní list vypracovalo 15 žáků a v 5. ročníku 19 žáků. Díky tomu, že se na této škole vyučuje matematika s prvky Hejného metody, se tito žáci s nestandardními aplikačními úlohami, mezi které patří i ty kombinatorické, pravidelně setkávají, a úlohy ze zadaného pracovního listu by tedy pro ně neměly být neznámé. Žáci jsou vedeni k hledání různých cest k úspěšnému vyřešení úkolu a nebojí se chyby, což by mělo být u úloh, ze kterých se pracovní list skládá, výhodou.

Bodové hodnocení jednotlivých úloh v pracovním listu jsem určila tak, že za správně vyřešenou úlohu žák dostal 1 bod, a v případě, že řešení nebylo úplné nebo zcela chybělo, žák obdržel za úlohu 0 bodů. Za správně vyřešenou úlohu považuji takovou úlohu, v níž žák dospěl ke správnému výsledku. Jelikož pracovní list obsahoval celkem 5 úloh a za každou mohl žák získat nejvýše 1 bod, bylo z celého pracovního listu možno dosáhnout maximálně 5 bodů.

Výsledky pracovních listů jsem zpracovala a vyhodnotila v následujícím textu.

## 5.5 Popis výzkumného šetření ve 4. ročníku

4. ročník navštěvuje 15 žáků, z toho 12 dívek a pouze 3 chlapci, z nichž 1 má diagnostikované ADHD a poruchy učení, proto je mu přidělena asistentka. S těmito žáky jsem se setkala poprvé, a tudíž jsem nevěděla, jak úspěšní v matematice jsou. Když jsem se jich na začátku ptala, koho matematika baví, přihlásili se všichni chlapci a asi polovina dívek.

Jelikož tito žáci byli první, kteří pracovní list řešili, nebyla jsem si zcela jistá, kolik času budou potřebovat. Paní učitelka mi vyhradila celou vyučovací hodinu, a tak jsem žákům řekla, že skončíme 10 minut před zvoněním, abychom si poté ještě stihli ukázat správná řešení a případně i některé řešitelské strategie. Na vypracování měli tedy asi 30 minut.

Než začali žáci pracovat, přečetli jsme si společně jednotlivá zadání úloh, abychom předešli případným nejasnostem. Poté jsem žákům řekla, že když si nebudou vědět rady, mohou se kdykoliv během práce přihlásit a já jim případné nejasnosti objasním.

V průběhu řešení pracovního listu jsem byla několika žáky požádána o objasnění některých nejasností, se kterými se potýkali při čtení zadání dané úlohy. Většina žáků měla vypracovány všechny úlohy pracovního listu ještě před uplynutím stanoveného času, z čehož jsem měla radost, protože jsem měla trošku obavy, aby nebylo toto zadání pro žáky čtvrtého ročníku příliš dlouhé a náročné na tento časový úsek.

### 5.5.1 Vyhodnocení výsledků řešení kombinatorických úloh 1

Poté, co jsem opravila pracovní list a jednotlivé úlohy jsem ohodnotila příslušným počtem bodů dle popisu výše, věnovala jsem se dále zpracování získaných dat. Nejdříve jsem vyhodnotila výsledky úloh, tj. počet získaných bodů pracovního listu u každého žáka. Tyto údaje jsem zapsala do Tabulky 2, přičemž jména jednotlivých žáků jsem nahradila čísly dle toho, jak jsou uvedena v abecedním seznamu. Připomeňme, že žák mohl z celého pracovního listu získat maximálně 5 bodů.

**Tabulka 2**

*Počet správně vyřešených úloh pracovního listu jednotlivých žáků 4. ročníku*

| **Žák (statistická jednotka)** | **Počet správně vyřešených úloh (hodnota znaku)** |
|---|---|
| 1. | 3 |
| 2. | 1 |
| 3. | 3 |
| 4. | 3 |
| 5. | 2 |
| 6. | 4 |
| 7. | 3 |
| 8. | 3 |
| 9. | 2 |
| 10. | 4 |
| 11. | 3 |
| 12. | 3 |
| 13. | 3 |
| 14. | 4 |
| 15. | 3 |

Pro jednotlivé hodnoty znaku z Tabulky 2 jsem dále určila jejich absolutní a relativní četnost, které uvádím do Tabulky 3.

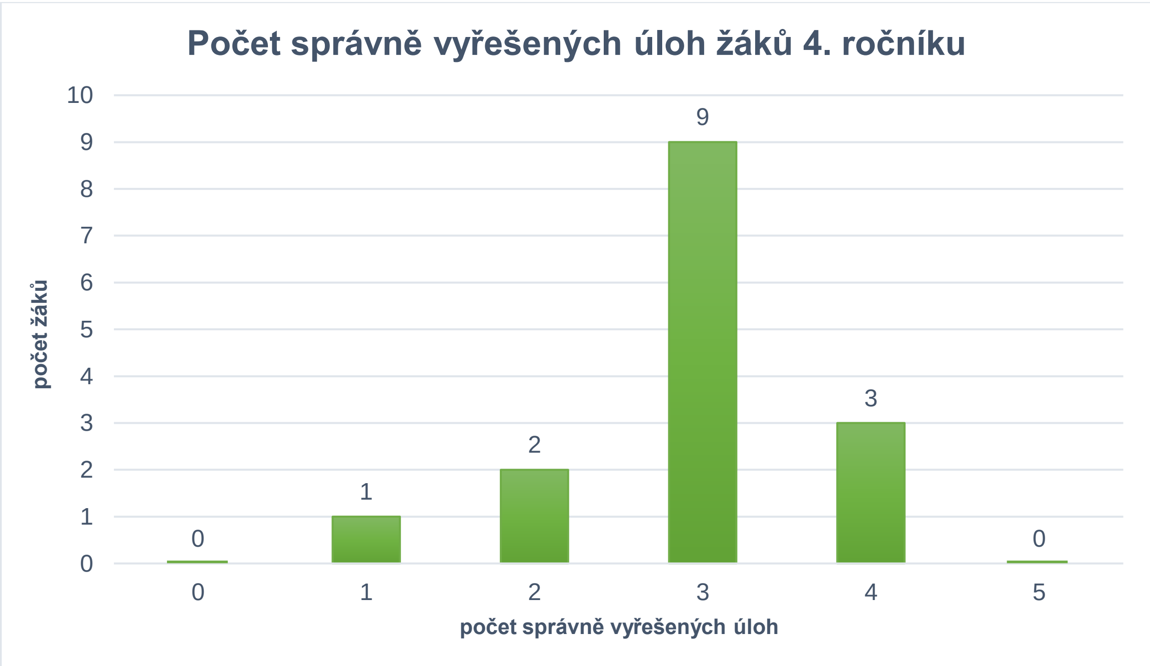
**Tabulka 3**

*Počet správně vyřešených úloh a jejich absolutní a relativní četnost ve 4. ročníku*

| Počet správně vyřešených úloh (hodnota znaku) [$x_i$] | Absolutní četnost počtu správně vyřešených úloh | Relativní četnost počtu správně vyřešených úloh (v %) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 6,7 |
| 2 | 2 | 13,3 |
| 3 | 9 | 60 |
| 4 | 3 | 20 |
| 5 | 0 | 0 |

Z Tabulky 3 je zřejmé, že 60 % žáků vyřešila správně právě 3 úlohy z pracovního listu. Pozitivní zjištění je, že se žádnému z žáků nestalo, že by nevyřešil správně žádnou ze zadaných úloh. Pouze 1 nebo 2 správná řešení v pracovním listu měli jen 3 žáci. Trošku mě překvapilo, že ani jeden žák nevyřešil správně všech 5 úloh.

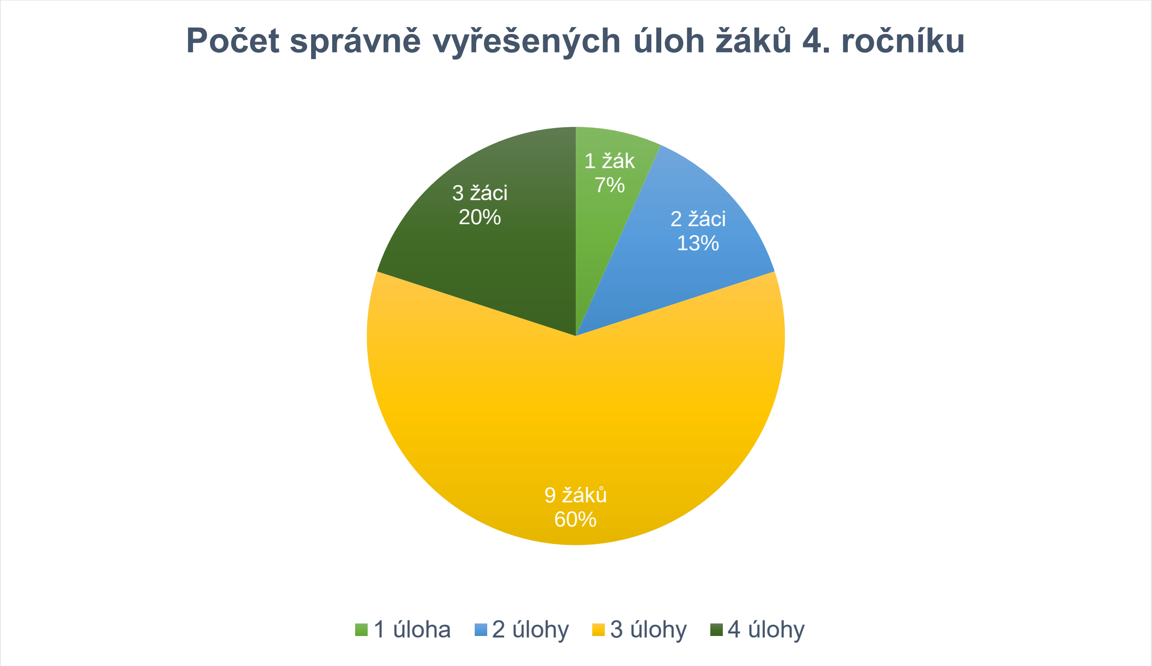
V Grafu 1 je zobrazena absolutní četnost počtu správně vyřešených úloh z Tabulky 3, tedy závislost mezi počtem žáků a počtem správně vyřešených úloh.




**Graf 1**

*Závislost mezi počtem žáků a počtem správně vyřešených úloh ve 4. ročníku*

V Grafu 2 je zobrazena relativní četnost počtu správně vyřešených úloh z Tabulky 3, tedy procentuální podíl počtu žáků v závislosti na počtu správně vyřešených úloh.




**Graf 2**

*Relativní četnost počtu správně vyřešených úloh žáků 4. ročníku*

Aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \Sigma_{i=1}^{n} x_i$$

$n = 15\ldots$ počet žáků 4. ročníku

$x_i\ldots$ hodnoty znaku z Tabulky 3

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 3}{15} = \frac{1 + 4 + 27 + 12}{15} = \frac{44}{15}$$

$\boldsymbol{\bar{x} = 2,9}$

→ Žáci 4. ročníku správně vyřešili průměrně 2,9 z 5 zadaných úloh.

### 5.5.2 Vyhodnocení výsledků řešení kombinatorických úloh 2

Získaná data jsou dále zpracována do Tabulky 4, kde je uvedena úspěšnost řešení jednotlivých úloh. U každé úlohy, které jsou očíslovány od 1 do 5 ve stejném pořadí jako v pracovním listě, jsou uvedeny počty správných žákovských řešení.

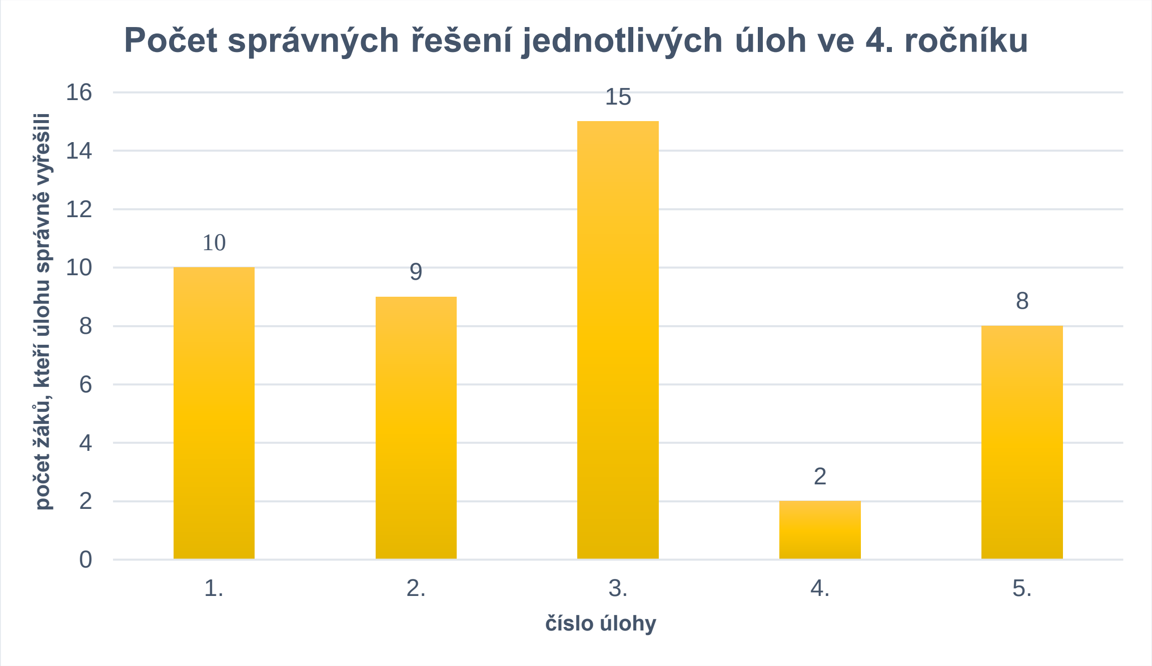
**Tabulka 4**

*Úspěšnost žákovských řešení jednotlivých úloh ve 4. ročníku*

| Úloha | Počet správných řešení | Relativní četnost počtu správných řešení (v %) |
|---|---|---|
| 1. | 10 | 67 |
| 2. | 9 | 60 |
| 3. | 15 | 100 |
| 4. | 2 | 13 |
| 5. | 8 | 53 |

Tabulka 4 ukazuje, že největší úspěšnost řešení měla 3. úloha, v níž měli žáci určit počet možností oblečení. Tuto úlohu správně vyřešili všichni žáci této třídy. Přisuzuji to tomu, že se tato úloha dala snadno graficky znázornit. Druhou nejúspěšnější byla 1. úloha, kde měli žáci zapsat dvojciferná čísla ze 3 zadaných číslic. Tu správně vyřešilo 67 % žáků. Většina z těch, co úlohu nevyřešili, byli zřejmě nepozorní při četbě zadání a nevšimli si podmínky, že se číslice v zápisu čísla nemohou opakovat. 2. úlohu vyřešilo 60 % žáků a 5. úlohu vyřešilo 53 % žáků. Nejproblémovější úlohou byla 4. úloha. Počet všech řešení této úlohy přesahoval 20, což mnohé žáky odradilo. Začali totiž úlohu řešit graficky, ale přibývající počet možných řešení je vedl na myšlenku, že obrázek zřejmě nevede ke správnému výsledku, takže pokračování grafického znázornění vzdali.

Graf 3 zobrazuje závislost počtu žáků, kteří danou úlohu správně vyřešili na jednotlivých úlohách. Úlohy jsou v grafu očíslované od 1 do 5 ve stejném pořadí jako v pracovním listu.




**Graf 3**

*Závislost počtu správných řešení jednotlivých úloh u žáků 4. ročníku*

### 5.5.3 Vyhodnocení předem stanovených odhadů na základě výsledků výzkumného šetření ve 4. ročníku

V následujícím textu porovnám své původní odhady s výsledky výzkumného šetření ve 4. ročníku.

V 1. úloze někteří žáci opravdu zřejmě nepozorně četli zadání a místo 6 možných řešení jich vypsali 8. Odhadovala jsem, že relativní četnost počtu správných řešení této úlohy ve 4. ročníku bude 70 %, jelikož je to 67 %, můj odhad se reálnému výsledku blížil.

Při řešení 2. úlohy žádný žák 4. ročníku nevyužil postup pomocí tabulky. Relativní četnost počtu správných řešení jsem odhadla na 50 %. Zde jsem se o 10 % netrefila, jelikož je úspěšnost ve skutečnosti 60 %.

Můj odhad, že 3. úloha dosáhne z celého pracovního listu nejvyšší úspěšnosti řešení, se naplnil. Relativní četnost počtu správných řešení 4. ročníku dosahuje dokonce 100 % namísto odhadovaných 80 %, což znamená, že tuto úlohu vyřešili všichni žáci této třídy.

Dle mého odhadu mělo být řešení 4. úlohy pro žáky nejnáročnější, a počet správných řešení tedy nejnižší. Tento odhad byl správný. Ve 4. ročníku nalezli všechna možná řešení 2 žáci z 15. Relativní četnost počtu správných řešení jsem odhadovala okolo 15 %, ve skutečnosti je to 13 %.

V 5. úloze jsem odhadovala relativní četnost počtu správných řešení ve 4. ročníku asi 55 %. Ve skutečnosti to je 53 %, tudíž zde byl můj odhad téměř správný. Většina žáků, kteří nenalezli všechna možná řešení, skutečně našli pouze 2 možná řešení namísto 3, tak jak jsem napsala ve svých odhadech.

## 5.6 Popis výzkumného šetření v 5. ročníku

Třídu 5. ročníku navštěvuje 19 žáků, z toho je 14 chlapců a 5 dívek. Žáky této třídy znám. Byla jsem zde několikrát na praxi, asistentské i souvislé. Asi dvě třetiny žáků, především chlapců, matematika baví a jsou v ní úspěšní. Ze své zkušenosti, když jsem zde vedla vyučovací hodiny, vím, že mají velmi dobře rozvinuté logické myšlení.

Předpokládala jsem, což mi potvrdila i paní učitelka, že většina žáků bude s řešením úloh v pracovním listu hotova ještě před uplynutím stanoveného časového limitu. Pro tyto žáky měla paní učitelka připravenou další práci. Nechtěla jsem však vyvíjet tlak na pomalejší žáky, a proto jsem limit ponechala stejný jako ve 4. ročníku, tedy 30 minut.

Nejprve jsme si opět přečetli společně zadání jednotlivých úloh. Během práce jsem zpočátku chodila mezi lavicemi a byla připravena objasňovat případné nejasnosti. Oproti třídě 4. ročníku, kde se alespoň jedenkrát přihlásil téměř každý, to zde bylo spíše ojedinělé. Toto srovnání mě docela překvapilo a usoudila jsem, že paní učitelka již pomalu žáky připravuje k přechodu na 2. stupeň a žáci jsou mnohem samostatnější než dříve.

### 5.6.1 Vyhodnocení výsledků řešení kombinatorických úloh 1

Poté, co jsem opravila pracovní list a jednotlivé úlohy, jsem ohodnotila příslušným počtem bodů dle popisu výše, zabývala jsem se dále zpracováním získaných dat. Nejdříve jsem vyhodnotila výsledky úloh, tj. počet získaných bodů pracovního listu u každého žáka. Tyto údaje jsem zapsala do Tabulky 5, přičemž jména jednotlivých žáků jsem nahradila čísly dle toho, jak jsou uvedena v abecedním seznamu. Připomeňme, že žák mohl získat maximálně 5 bodů z celého pracovního listu.

**Tabulka 5**

*Počet správně vyřešených úloh pracovního listu jednotlivých žáků 5. ročníku*

| **Žák (statistická jednotka)** | **Počet správně vyřešených úloh (hodnota znaku)** |
|---|---|
| 1. | 3 |
| 2. | 3 |
| 3. | 2 |
| 4. | 4 |
| 5. | 4 |
| 6. | 1 |
| 7. | 3 |
| 8. | 4 |
| 9. | 4 |
| 10. | 2 |
| 11. | 3 |
| 12. | 3 |
| 13. | 4 |
| 14. | 2 |
| 15. | 4 |
| 16. | 3 |
| 17. | 3 |
| 18. | 4 |
| 19. | 3 |

Pro jednotlivé hodnoty znaku z Tabulky 5 jsem dále určila jejich absolutní a relativní četnost, které uvádím do Tabulky 6.

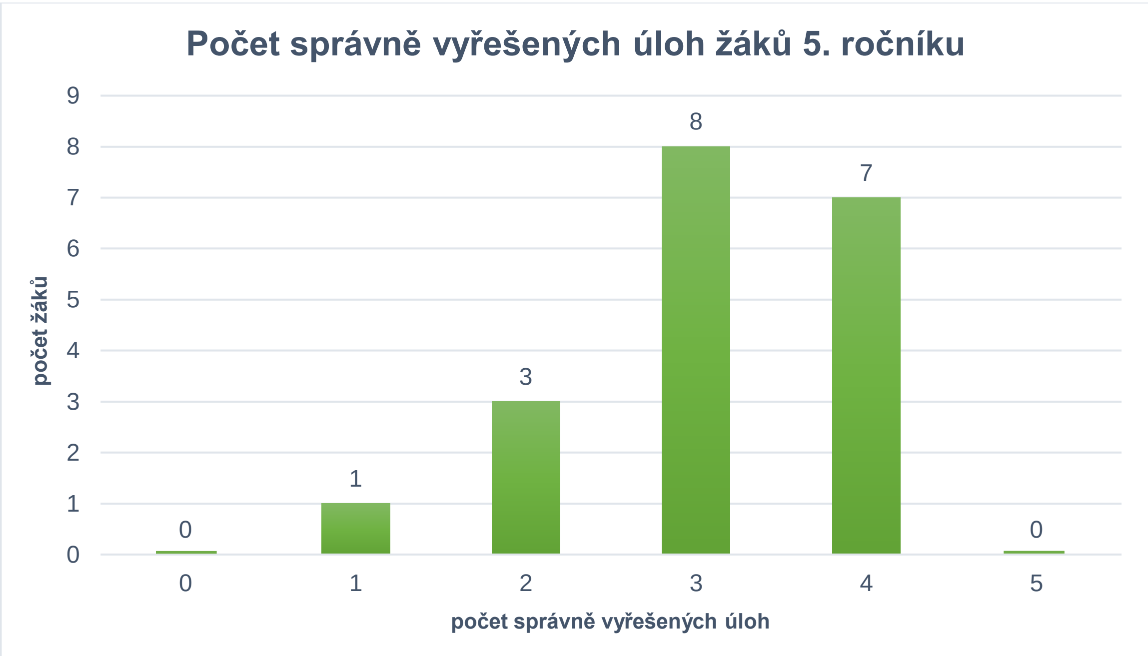
**Tabulka 6**

*Počet správně vyřešených úloh a jejich absolutní a relativní četnost v 5. ročníku*

| Počet správně vyřešených úloh (hodnota znaku) [$x_i$] | Absolutní četnost počtu správně vyřešených úloh | Relativní četnost počtu správně vyřešených úloh (v %) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 5,3 |
| 2 | 3 | 15,8 |
| 3 | 8 | 42,1 |
| 4 | 7 | 36,8 |
| 5 | 0 | 0 |

Z Tabulky 6 můžeme vyčíst, že nejvíce žáků 5. ročníku správně vyřešilo právě 3 úlohy z pracovního listu. Správná řešení ke 4 úlohám se podařilo najít téměř 37 % žáků. Opět pozitivní je to, že se nikomu nestalo, že by nevyřešil ani 1 úlohu a právě 1 úlohu vyřešil správně pouze 1 žák. Žádnému žákovi se nepodařilo nalézt řešení ke všem 5 úlohám, což mě vzhledem k tomu, že je zde několik žáků matematicky nadaných, trochu překvapilo.

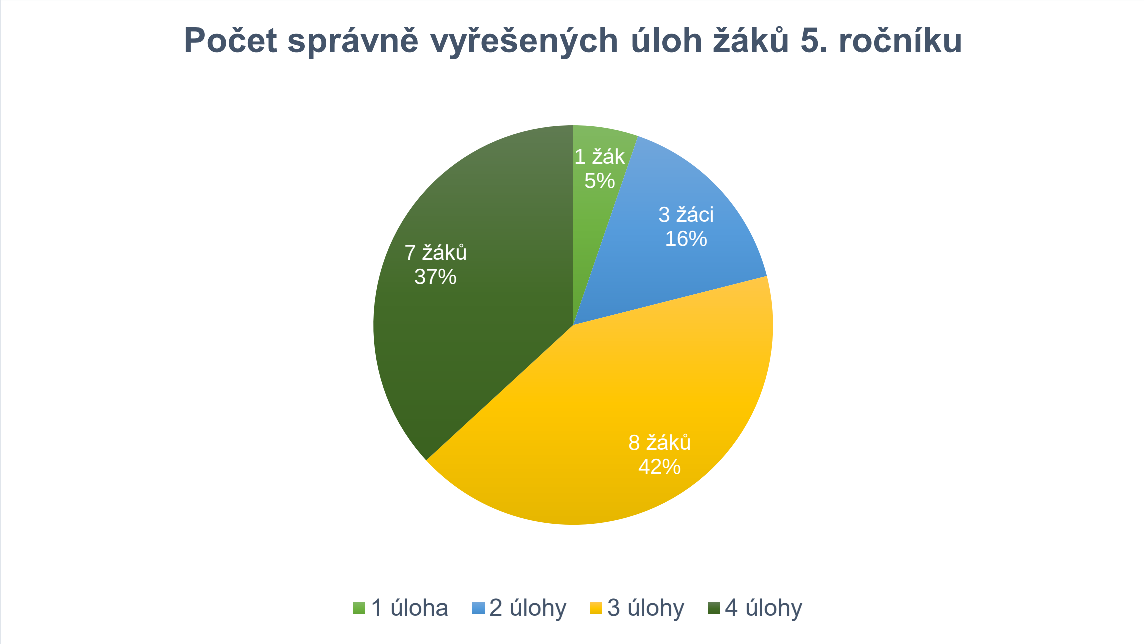
V Grafu 4 je zobrazena absolutní četnost počtu správně vyřešených úloh z Tabulky 6, tedy závislost mezi počtem žáků a počtem správně vyřešených úloh.




**Graf 4**

*Závislost mezi počtem žáků a počtem správně vyřešených úloh v 5. ročníku*

V Grafu 5 je zobrazena relativní četnost počtu správně vyřešených úloh z Tabulky 6, tedy procentuální podíl počtu žáků v závislosti na počtu správně vyřešených úloh.




**Graf 5**

*Relativní četnost počtu správně vyřešených úloh žáků 5. ročníku*

Aritmetický průměr

$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \Sigma_{i=1}^{n} x_i$

$n = 19$… počet žáků 5. ročníku

$x_i$… hodnoty znaku z Tabulky 6

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7}{19} = \frac{1 + 6 + 24 + 28}{19} = \frac{59}{19}$$

$\boldsymbol{\bar{x} = 3,1}$

→ Žák 5. ročníku správně vyřešil průměrně 3,1 z 5 zadaných úloh.

## 5.6.2 Vyhodnocení výsledků řešení kombinatorických úloh 2

Tabulka 7 uvádí úspěšnosti řešení jednotlivých úloh. Je zde zaznamenáno, kolik žáků správně vyřešilo danou úlohu.

Získaná data jsou dále zpracována do Tabulky 7, kde je uvedena úspěšnost řešení jednotlivých úloh. U každé úlohy, které jsou očíslovány od 1 do 5 ve stejném pořadí jako v pracovním listě, jsou uvedeny počty správných žákovských řešení.

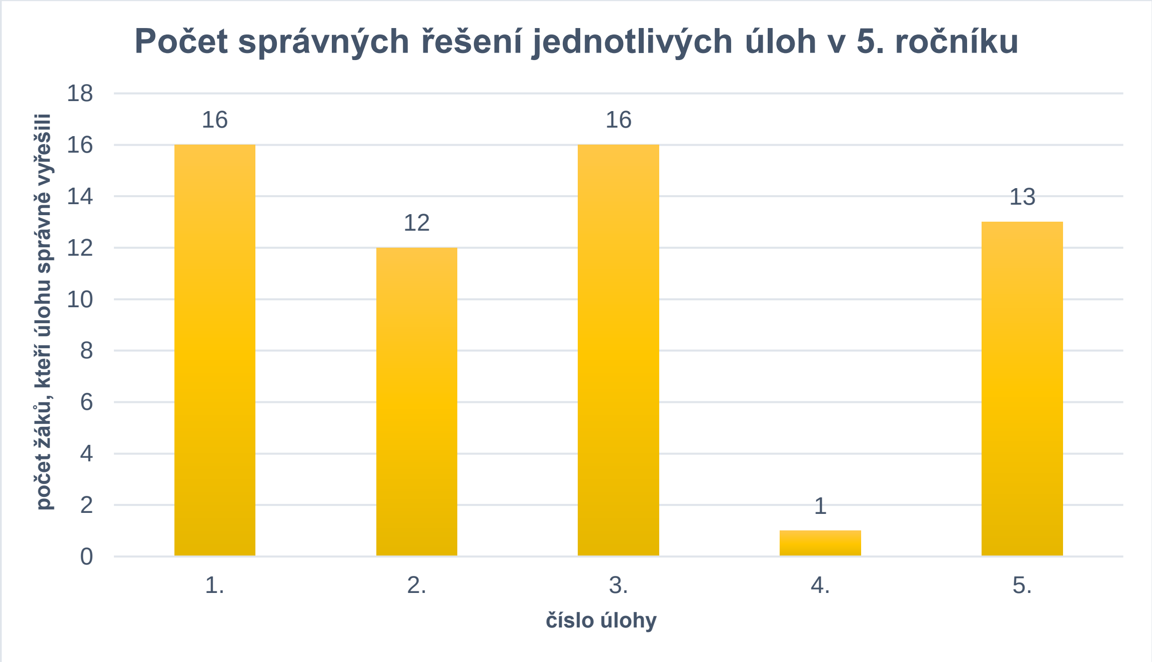
**Tabulka 7**

*Úspěšnost žákovských řešení jednotlivých úloh v 5. ročníku*

| Úloha | Počet správných řešení | Relativní četnost počtu správných řešení (v %) |
|---|---|---|
| 1. | 16 | 84 |
| 2. | 12 | 63 |
| 3. | 16 | 84 |
| 4. | 1 | 5 |
| 5. | 13 | 68 |

Tabulka 7 ukazuje, že největší úspěšnost řešení měla 1. úloha, tedy zápis dvojciferných čísel ze 3 zadaných číslic a 3. úloha, v níž měli žáci určit počet možností oblečení. Obě tyto úlohy správně vyřešilo shodně 16 žáků z 19, tedy 84 % všech žáků. 5. a 2. úloha měly také poměrně hodně úspěšných řešitelů, a to 68 % a 63 %. Nejproblémovější úlohou byla stejně jako ve čtvrtém ročníku 4. úloha. Očekávala jsem však, že si zde s tímto úkolem poradí více žáků. Naopak ji ale vyřešil pouze 1 žák. Většina žáků začalo s řešením dobře, ale nedokončili jej a vyšel jim často nižší počet řešení.

Graf 6 zobrazuje závislost počtu žáků, kteří danou úlohu správně vyřešili na jednotlivých úlohách. Úlohy jsou v grafu očíslované od 1 do 5 ve stejném pořadí jako v pracovním listu.




**Graf 6**

*Závislost počtu správných řešení jednotlivých úloh u žáků 5. ročníku*

### 5.6.3 Vyhodnocení předem stanovených odhadů na základě výsledků výzkumného šetření v 5. ročníku

V následujícím textu porovnám své původní odhady s výsledky výzkumného šetření v 5. ročníku.

Odhadovala jsem, že relativní četnost počtu správných řešení 1. úlohy bude v 5. ročníku 75 %, avšak ve skutečnosti je to o 9 % více, tedy 84 %. Byli zde pouze 2 žáci, kteří zřejmě nepozorně přečetli zadání a místo 6 možných řešení jich vypsali 8.

Ani žádný žák z 5. ročníku, stejně jako ve 4. ročníku, nevyužil k řešení 2. úlohy postup pomocí tabulky. Můj odhad, že bude relativní četnost počtu správných řešení 60 %, byl téměř správný, protože je to 63 %.

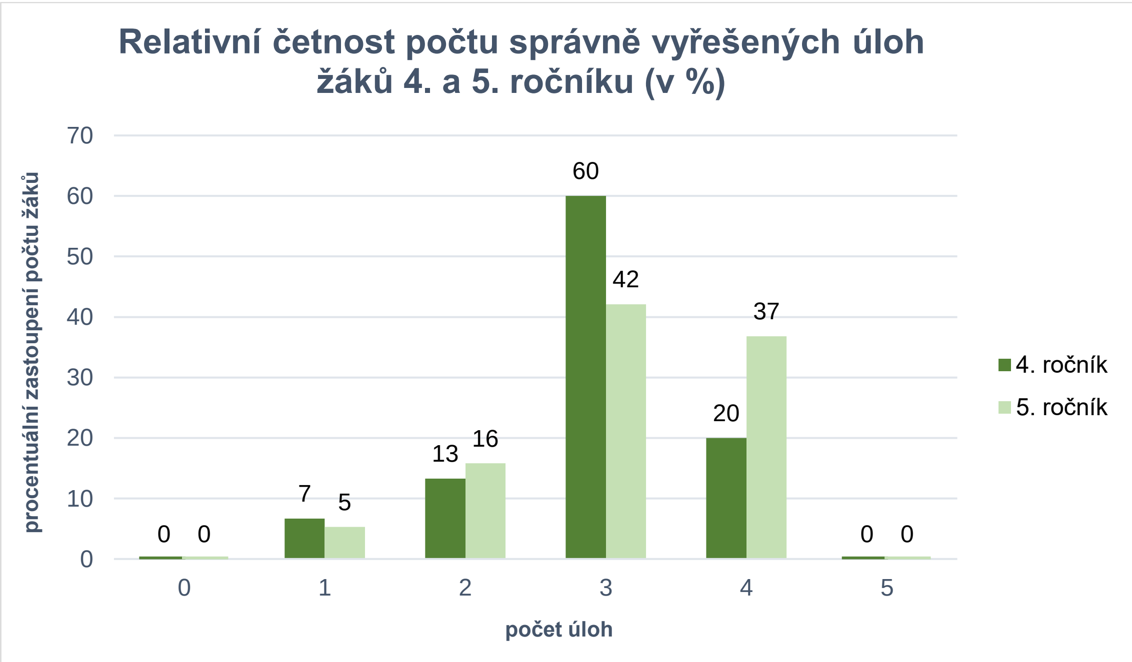
Relativní četnost počtu správných řešení 3. úlohy v 5. ročníku dosahuje 84 %, což je o 4 % více, než jsem odhadovala. Relativní četnost je zde tedy totožná jako v 1. úloze, a obě tyto úlohy jsou tedy v 5. ročníku řešitelsky nejúspěšnější.

Dle mého odhadu mělo být řešení 4. úlohy pro žáky nejnáročnější, a počet správných řešení tedy nejnižší. Tento odhad se naplnil i v 5. ročníku. Relativní četnost počtu správných řešení jsem odhadovala okolo 20 %, v 5. ročníku je to však pouze 5 %. Všechna možná řešení nalezl pouze 1 žák z 19.

V 5. úloze jsem odhadovala relativní četnost počtu správných řešení v 5. ročníku asi 65 %, což bylo téměř správné, jelikož skutečná relativní četnost počtu správných řešení je zde 68 %. Většina žáků, kteří nenalezli všechna možná řešení, skutečně našli pouze 2 možná řešení namísto 3, tak jak jsem napsala ve svých odhadech.

## 5.7 Srovnání úspěšnosti řešení 4. a 5. ročníku

Porovnání výsledků výzkumného šetření 4. a 5. ročníku zobrazuji ve dvou grafech (Graf 7 a Graf 8). Musím však připomenout, že co se počtu žáků týče, nejde o dva naprosto totožné výzkumné soubory – ve 4. ročníku pracovní list řešilo 15 žáků a v 5. ročníku 19 žáků. Do Grafu 7 a 8 jsem tedy uvedla namísto absolutní četnosti počtu žáků jejich relativní četnost v procentech.

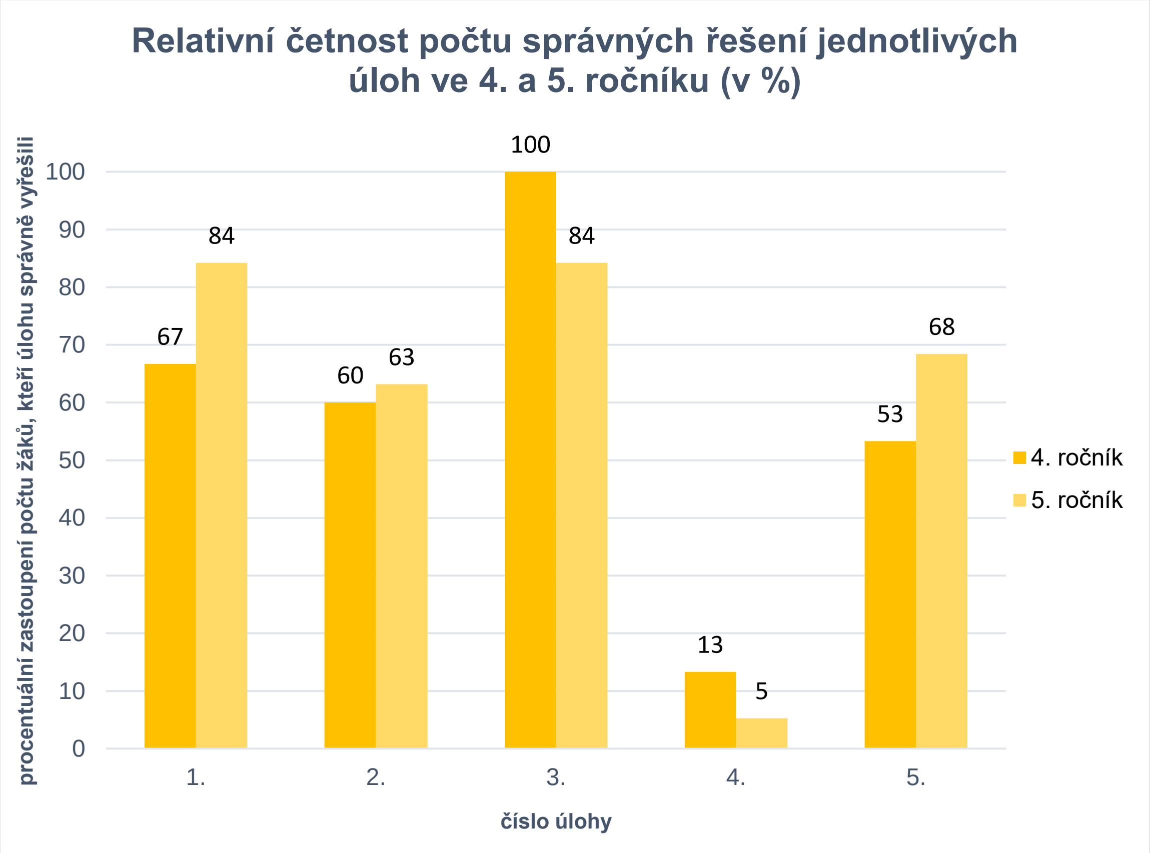



**Graf 7**

*Srovnání relativní četnosti počtu správně vyřešených úloh ve 4. a 5. ročníku*

V Grafu 7 jsou zobrazeny hodnoty z Tabulky 3 a 6. Lze z něho vyčíst, že ve 4. i 5. ročníku nejvíce žáků správně vyřešilo právě 3 úlohy. Ani v jednom z ročníků nebyl žák, který by nevyřešil žádnou úlohu, a právě jednu úlohu vyřešil v každé třídě pouze 1 žák. Tuto skutečnost hodnotím pozitivně. Avšak ani v jednom z ročníků nebyl žák, který by správně vyřešil všech 5 úloh. Nejzásadnější rozdíl mezi 4. a 5. ročníkem vidím v tom, že v 5. ročníku vyřešilo 4 úlohy správně o 17 % žáků více než ve 4. ročníku. Tento výsledek je dle očekávání, protože žák 5. ročníku by měl mít více znalostí a zkušeností než žák 4. ročníku.

Žák 5. ročníku správně vyřešil průměrně 3,1 z 5 zadaných úloh, což je pouze o 0,2 více než u žáka 4. ročníku, kde bylo správně vyřešeno průměrně 2,9 úlohy z 5 zadaných.




**Graf 8**

*Srovnán relativní četnosti počtu správných řešení jednotlivých úloh ve 4. a 5. ročníku*

V Grafu 8 jsou zobrazeny hodnoty z Tabulky 4 a 7. Lze z něj vyčíst, že 3 z 5 zadaných úloh měly vyšší úspěšnost řešení u žáků 5. ročníku. Nejproblémovější úlohou byla v obou ročnících 4. úloha. Zajímavým faktem je to, že ji ve 4. ročníku správně vyřešilo 13 % žáků, zatímco v 5. ročníku pouze 5 % žáků. Můj odhad, že všechny úlohy budou mít vyšší úspěšnost řešení v 5. ročníku, se tedy neslučuje s realitou.

# 6. Řešitelské strategie žáků

Kombinatorické úlohy lze řešit různými způsoby řešení. Lze je řešit aritmeticky, s pomocí grafického znázornění (obrázkem či uzlovým grafem), je možné vytvořit tabulku nebo metodou pokus-omyl (tj. experimentálně). Žáci 4. a 5. ročníku při řešení kombinatorických úloh v připraveném pracovním listu využívali různých řešitelských strategií. V následujícím textu rozeberu, jaká řešení jednotlivých úloh žáci preferovali, ukážu, jaké strategie vedly k chybnému řešení a zároveň upozorním na některé zajímavé způsoby řešení.

## 6.1 Vybraná žákovská řešení 1. úlohy

**Zadání:** *Kolik dvouciferných čísel můžeš sestavit z číslic 2, 6, 8, když se číslice nemohou opakovat?*

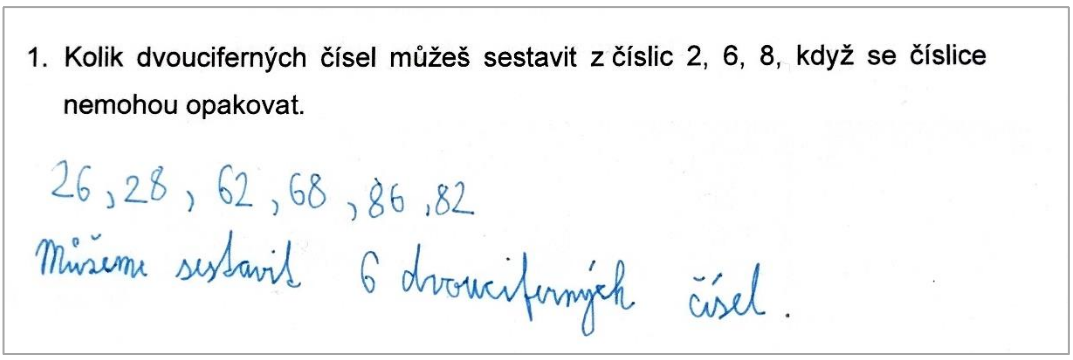
### 6.1.1 Nejčastější způsoby žákovských řešení

Tak, jak jsem předpokládala, všichni žáci řešili 1. úlohu tím, že vypsali všechny možnosti. Pokud si pozorně přečetli zadání a porozuměli mu, bylo pro ně poté jednoduché najít k úloze správné řešení.

Na Obrázku 5 vidíme ukázkové žákovské řešení, při kterém žák vypsal všechny možnosti, i s odpovědí celou větou, na které jsem sice netrvala, ale žáci 5. ročníku (narozdíl od 4. ročníku) je většinou sami od sebe napsali. Tato skutečnost mě potěšila, neboť jsem i já s těmito žáky na jedné ze svých praxí náležitosti slovní úlohy probírala a procvičovala.

**Obrázek 5**

*Žákovské řešení 1. úlohy*


1. Kolik dvouciferných čísel můžeš sestavit z číslic 2, 6, 8, když se číslice nemohou opakovat.

26, 28, 62, 68, 86, 82

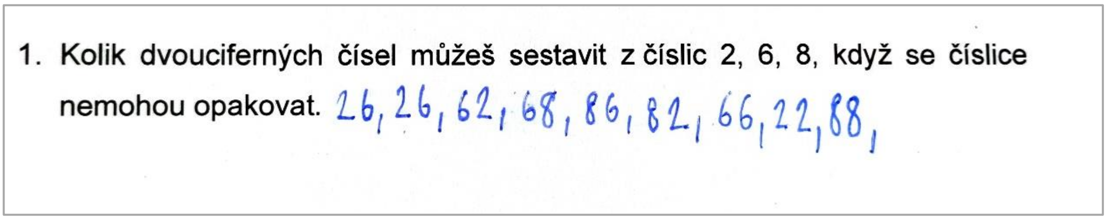
Můžeme sestavit 6 dvouciferných čísel.

## 6.1.2 Chybná žákovská řešení

Několik žáků si dle mého očekávání zřejmě nepozorně přečetli zadání nebo mu neporozuměli. Na Obrázku 6 vidíme chybné řešení z důvodu nedodržení podmínky, že se číslice v zápisu čísel nemohou opakovat. Žák tedy do řešení zahrnul i čísla 22, 66 a 88.

**Obrázek 6**

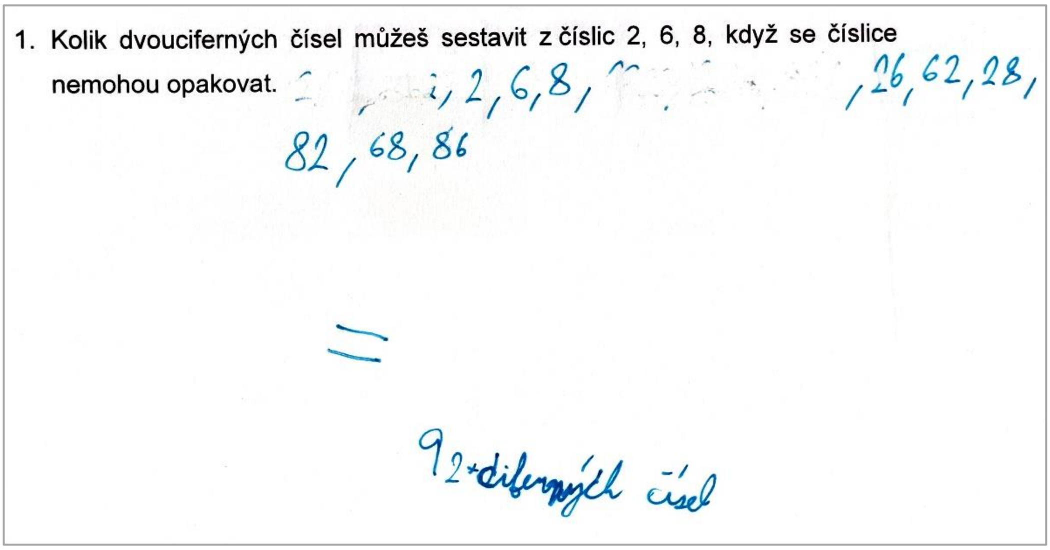
*Chybné žákovské řešení 1. úlohy (1)*


1. Kolik dvouciferných čísel můžeš sestavit z číslic 2, 6, 8, když se číslice nemohou opakovat. 26, 26, 62, 68, 86, 82, 66, 22, 88,

Na Obrázku 7 lze vidět, že žák zřejmě neporozuměl pojmu „dvouciferné číslo“, neboť do výčtu řešení zapsal i jednociferná čísla 2, 6 a 8. Naopak podmínka o tom, že se číslice v zápisu nemohou opakovat, zde byla dodržena.

**Obrázek 7**

*Chybné žákovské řešení 1. úlohy (2)*


1. Kolik dvouciferných čísel můžeš sestavit z číslic 2, 6, 8, když se číslice nemohou opakovat. 2, 6, 8, 26, 62, 28, 82, 68, 86

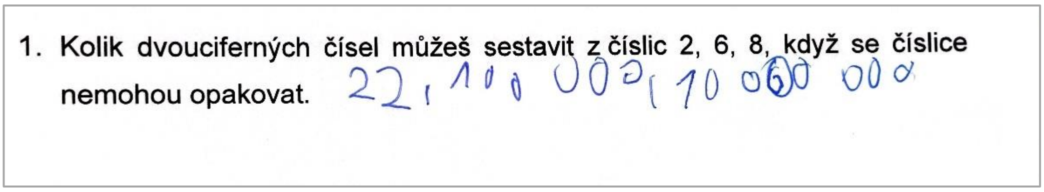
=

9 2-ciferných čísel

Obrázek 8 ukazuje řešení úlohy, kterou řešil žák s diagnostikovaným ADHD a poruchami učení. Žák zřejmě zadání pochopil tak, že má zapsat číslo dvouciferné, šesticiferné a osmiciferné.

**Obrázek 8**

*Chybné žákovské řešení 1. úlohy (3)*


1. Kolik dvouciferných čísel můžeš sestavit z číslic 2, 6, 8, když se číslice nemohou opakovat. 22, 100 000, 10 000 000

## 6.2 Vybraná žákovská řešení 2. úlohy

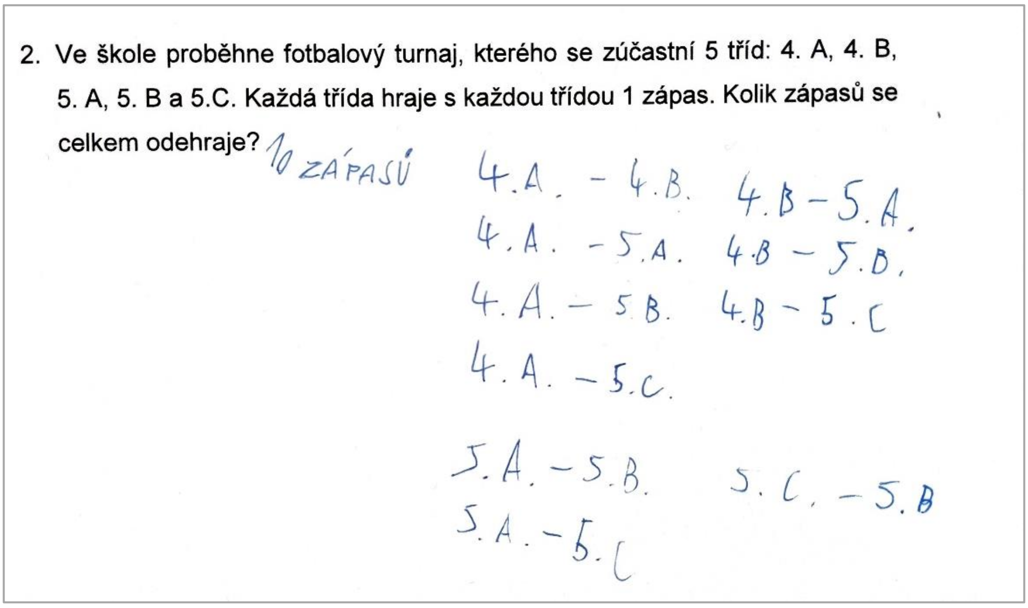
**Zadání:** *Ve škole proběhne fotbalový turnaj, kterého se zúčastní 5 tříd: 4. A, 4. B, 5. A, 5. B a 5.C. Každá třída hraje s každou třídou 1 zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?*

### 6.2.1 Nejčastější způsoby žákovských řešení

Navzdory mému odhadu neřešil žádný z žáků 2. úlohu pomocí tabulky. Nejvíce žáků přišlo k řešení opět vypsáním všech možností, tedy všech dvojic vzájemných zápasů. Takový případ lze vidět na Obrázku 9.

**Obrázek 9**

*Žákovské řešení 2. úlohy*


2. Ve škole proběhne fotbalový turnaj, kterého se zúčastní 5 tříd: 4. A, 4. B, 5. A, 5. B a 5.C. Každá třída hraje s každou třídou 1 zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje? 10 ZÁPASŮ

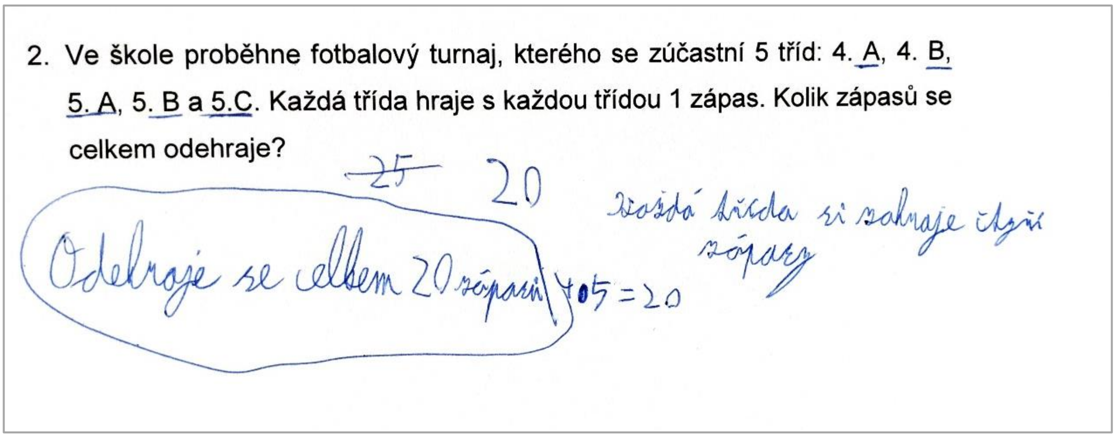
4.A. – 4.B. 4.B – 5.A.
4.A. – 5.A. 4.B – 5.B.
4.A. – 5.B. 4.B – 5.C
4.A. – 5.C.
5.A. – 5.B. 5.C. – 5.B
5.A. – 5.C

## 6.2.2 Chybná žákovská řešení

Někteří žáci napsali, že celkový počet zápasů bude 20. Jeden žáků, jehož řešení ukazuje Obrázek 10, do rozboru uvedl, že *Každá třída si zahraje čtyři zápasy*, počítal tedy $4 \cdot 5 = 20$. V tom má sice pravdu, ale neuvědomil si, že například 4.A – 4.B a 4.B – 4.A je stále jeden identický zápas.

**Obrázek 10**

*Chybné žákovské řešení 2. úlohy (1)*



2. Ve škole proběhne fotbalový turnaj, kterého se zúčastní 5 tříd: 4. A, 4. B, 5. A, 5. B a 5.C. Každá třída hraje s každou třídou 1 zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?

~~25~~ 20

Odehraje se celkem 20 zápasů

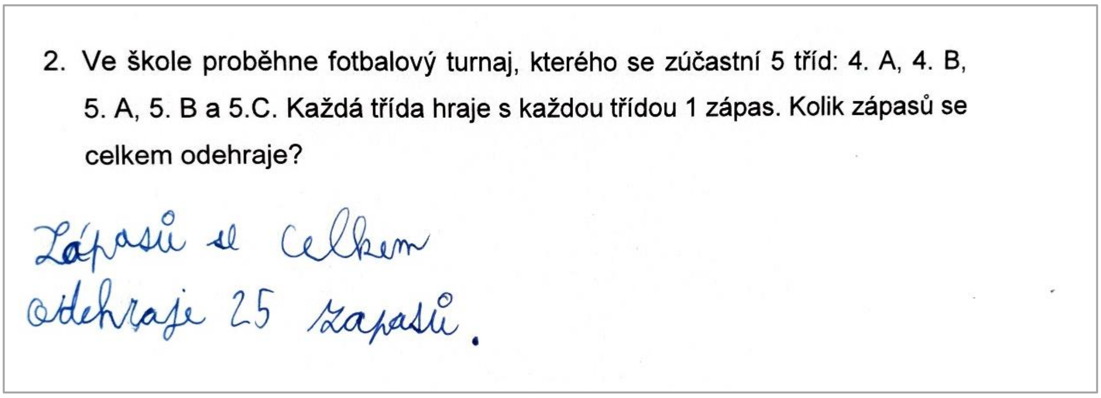
$4 \cdot 5 = 20$

Každá třída si zahraje čtyři zápasy

Další chybné řešení lze vidět na Obrázku 11. Takové řešení se vyskytlo u pár žáků v 5. ročníku. Jelikož žádný z nich neuvedl přesný postup řešení, usuzuji, že počítali $5 \cdot 5 = 25$. (5 tříd, tudíž každá 5 zápasů).

**Obrázek 11**

*Chybné žákovské řešení 2. úlohy (2)*



2. Ve škole proběhne fotbalový turnaj, kterého se zúčastní 5 tříd: 4. A, 4. B, 5. A, 5. B a 5.C. Každá třída hraje s každou třídou 1 zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?

Zápasů se celkem odehraje 25 zapasů.

## 6.3 Vybraná žákovská řešení 3. úlohy

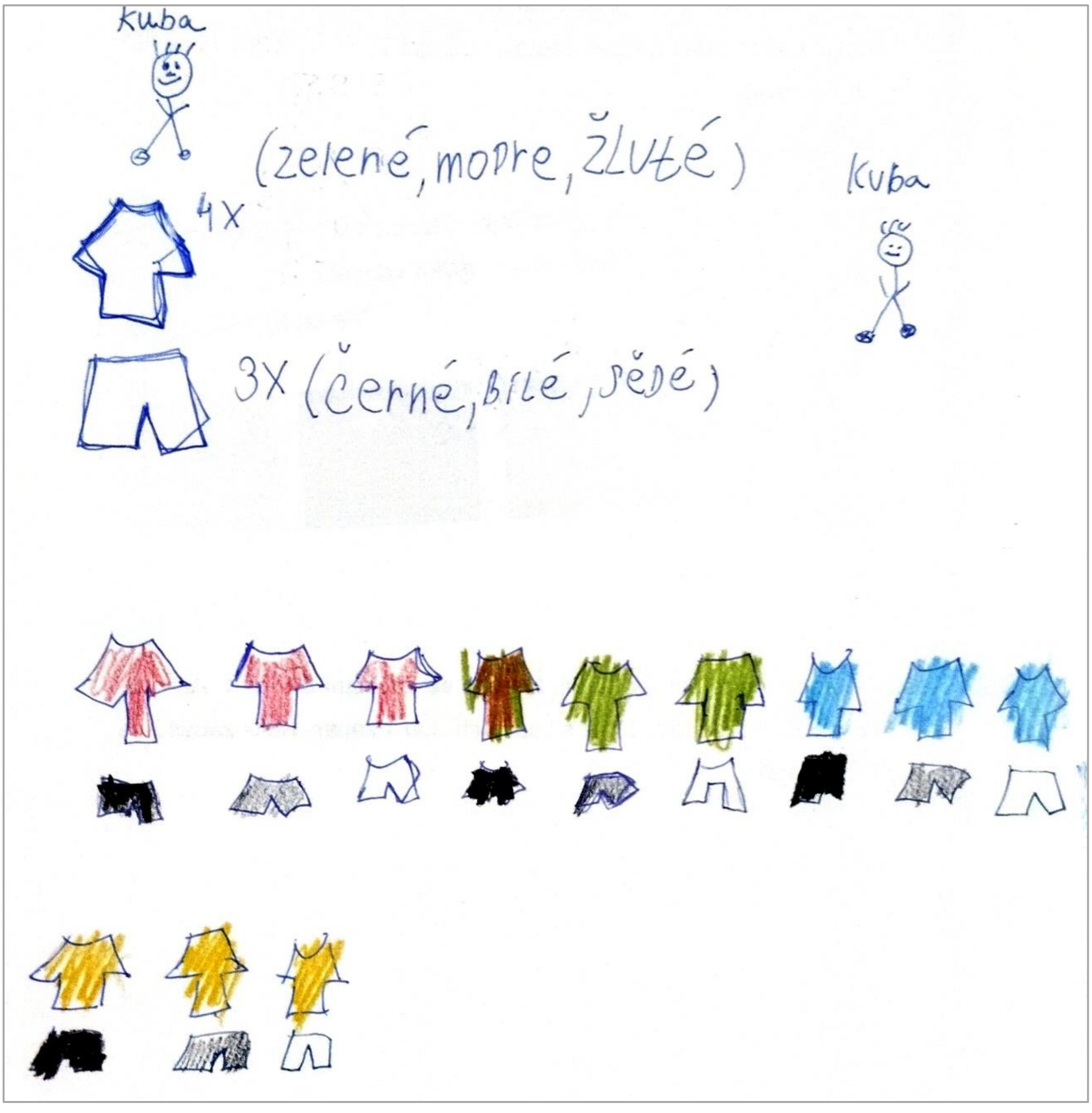
**Zadání:** *Kuba si ze skříně vytáhl 4 trička (zelené, modré, žluté, červené) a 3 kraťasy (černé, bílé, šedé). Kolik kombinací oblečení si může Kuba obléknout?*

### 6.3.1 Nejčastější způsoby žákovských řešení

V této úloze je veliký rozdíl ve strategii řešení žáků 4. a 5. ročníku. Žáci 4. ročníku řešili úlohu nejčastěji graficky, pomocí obrázku, což lze vidět na Obrázku 12 nebo pomocí uzlového grafu, jako je na Obrázku 13.

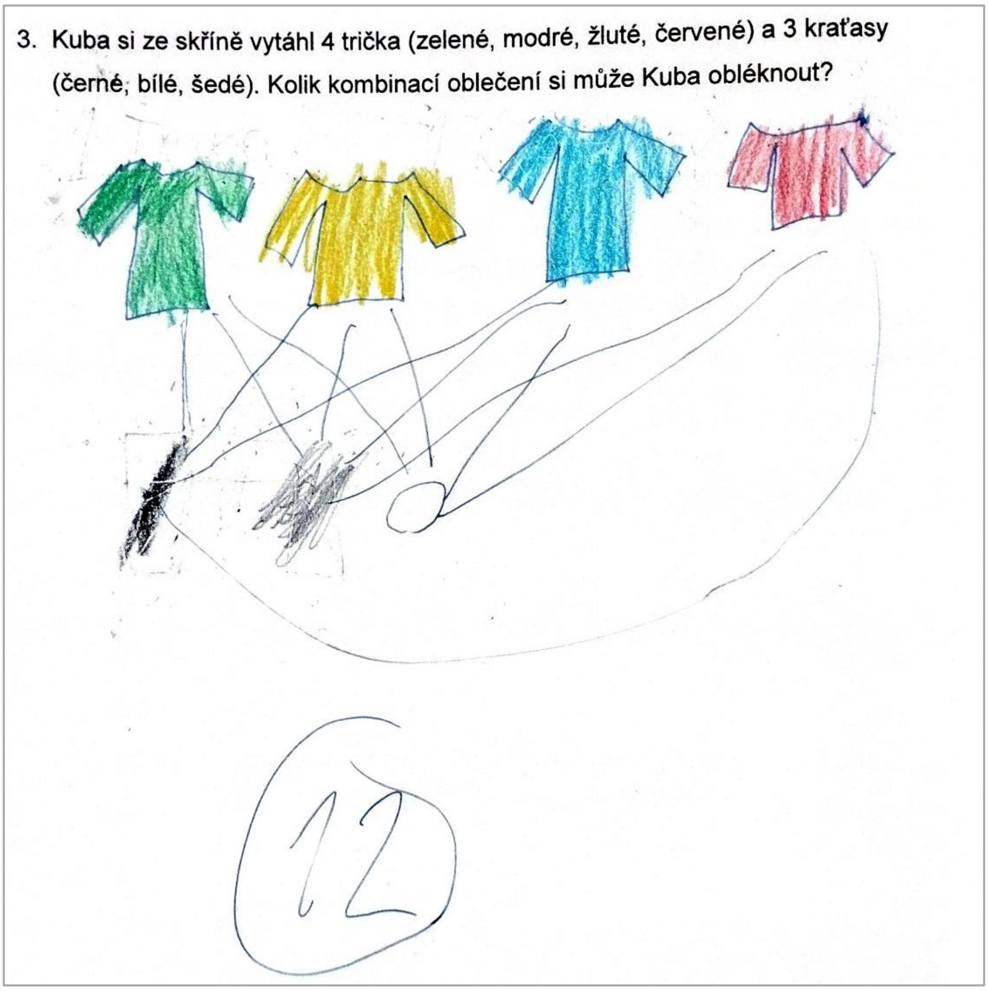
**Obrázek 12**

*Žákovské řešení 3. úlohy (pomocí obrázku)*



**Obrázek 13**

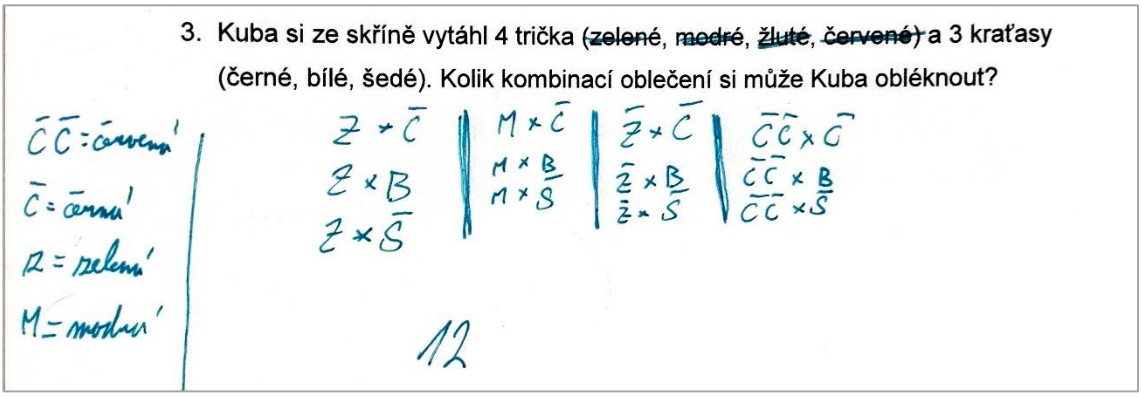
*Žákovské řešení 3. úlohy (pomocí uzlového grafu)*




Žáci 5. ročníku hledali nejčastěji řešení tak, že jednotlivé barvy označili zkratkami a následně všechny možnosti vypsali, což můžeme vidět na Obrázku 14.

**Obrázek 14**

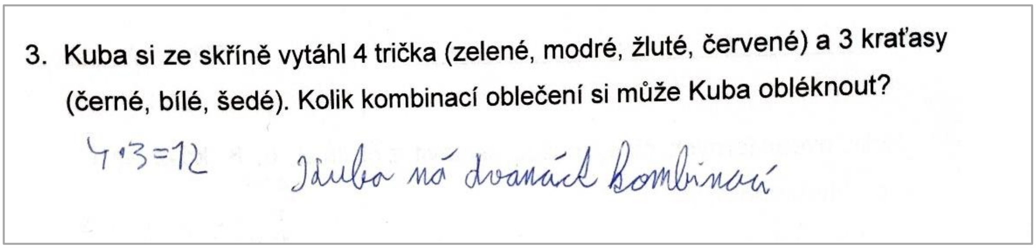
*Žákovské řešení 3. úlohy (vypsáním všech možností)*



Překvapilo mě, že několik žáků 5. ročníku bylo schopno vyřešit úlohu aritmeticky, vynásobením počtu triček a počtu kalhot, tedy $4 \cdot 3 = 12$, jako je tomu na Obrázku 15.

**Obrázek 15**

*Žákovské řešení 3. úlohy (aritmeticky)*



3. Kuba si ze skříně vytáhl 4 trička (zelené, modré, žluté, červené) a 3 kraťasy (černé, bílé, šedé). Kolik kombinací oblečení si může Kuba obléknout?

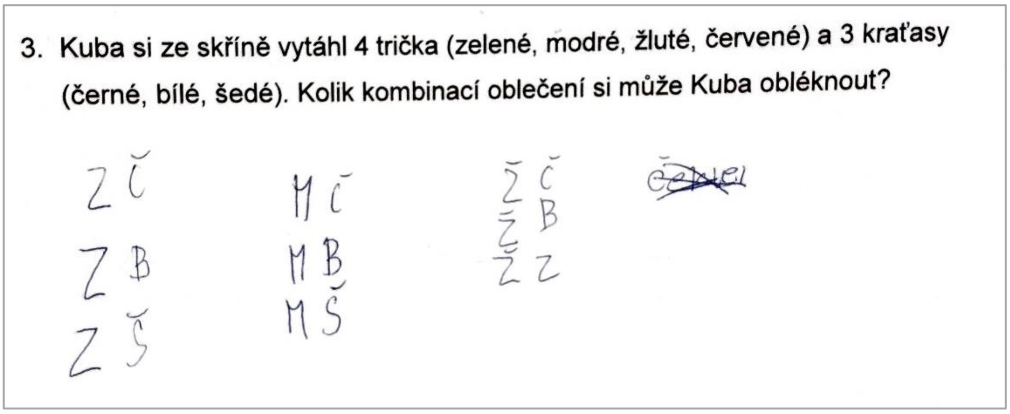
4·3=12 Kuba má dvanáct kombinací

## 6.3.2 Chybná žákovská řešení

Chybných řešení této úlohy příliš nebylo. Ve 4. ročníku si s řešením poradili všichni. Chybná řešení v 5. ročníku plynou buď z toho, že se v průběhu řešení žák v zadaných údajích ztratil nebo zazmatkoval, jako je tomu v Obrázku 16, anebo si možná počet řešení tipnul, což usuzuji z řešení na Obrázku 17, jelikož zde chybí jakýkoliv postup či výpočet.

**Obrázek 16**

*Chybné žákovské řešení 3. úlohy (1)*



3. Kuba si ze skříně vytáhl 4 trička (zelené, modré, žluté, červené) a 3 kraťasy (černé, bílé, šedé). Kolik kombinací oblečení si může Kuba obléknout?

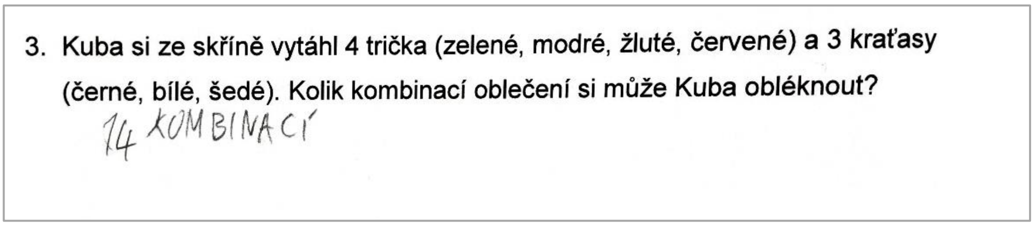
Z Č
Z B
Z Š

M Č
M B
M Š

Ž Č
Ž B
Ž Z

**Obrázek 17**

*Chybné žákovské řešení 3. úlohy (2)*



3. Kuba si ze skříně vytáhl 4 trička (zelené, modré, žluté, červené) a 3 kraťasy (černé, bílé, šedé). Kolik kombinací oblečení si může Kuba obléknout?

14 KOMBINACÍ

## 6.4 Vybraná žákovská řešení 4. úlohy

**Zadání:** *Kája dostala od kamarádů 5 obrázků. Přemýšlí, jak obrázky uspořádá vedle sebe, aby si je mohla pověsit na zeď. Kolika způsoby může obrázky vedle sebe pověsit, když má ten největší viset uprostřed?*

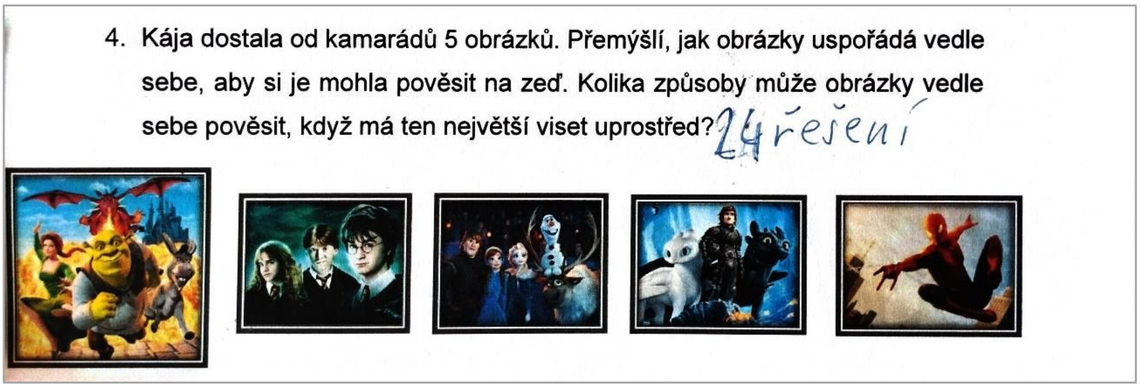
### 6.4.1 Nejčastější způsoby žákovských řešení

Jak jsem již výše psala, moje předpoklady ohledně 4. úlohy se naplnily. Řešení této úlohy bylo opravdu pro žáky nejobtížnější a dosáhlo nejnižší úspěšnosti. Ve 4. ročníku přišli ke správnému řešení dva žáci a v ročníku 5. pouze jeden žák.

Většina žáků 4. ročníku však neměla u této úlohy žádný postup řešení a měli pouze číselně napsaný počet řešení. Tak tomu bylo i u těch 2 správných řešení, což lze vidět na Obrázku 18. Nemohu tedy s jistotou určit, zda to byl pouze dobrý tip či odhad, nebo si situaci nějak abstraktně vymodelovali v hlavě.

**Obrázek 18**

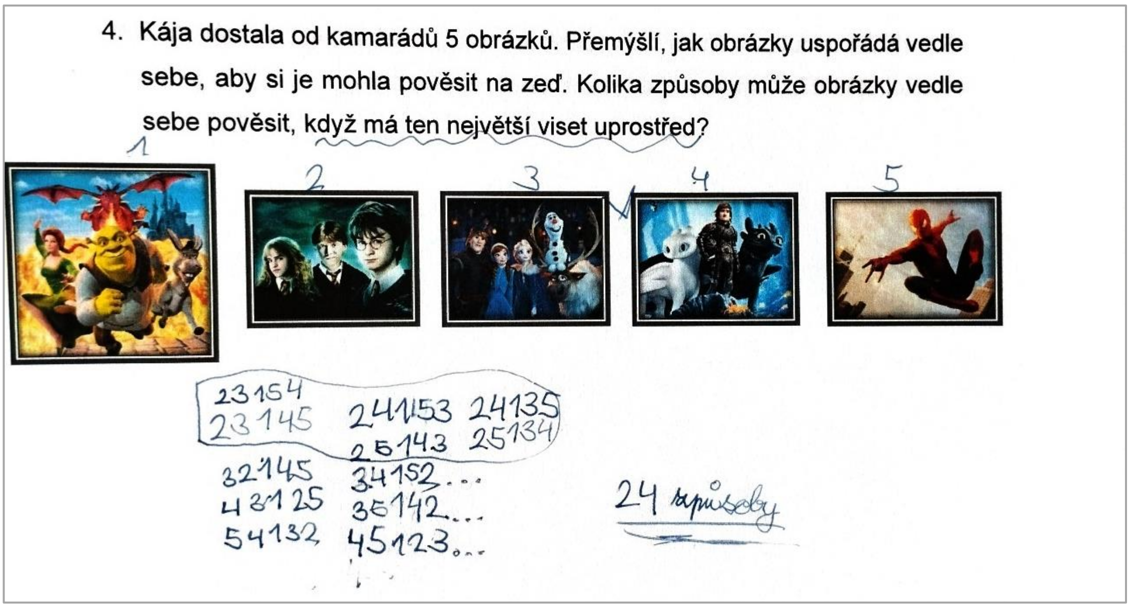
*Žákovské řešení 4. úlohy (1)*




Každý žák 5. ročníku se alespoň snažil najít nějaký způsob řešení. Nejčastěji si obrázky očíslovali, nebo označili zkratkami, pomocí kterých zapisovali možné pořadí. Jediný žák 5. ročníku, který našel k úloze správné řešení, si obrázky očísloval a číslice následně začal zapisovat vedle sebe v různém pořadí. Všechny možnosti sice nevypsal, ale počet řešení uvedl správně, tedy 24. Tento žákův postup vidíme v Obrázku 19.

**Obrázek 19**

*Žákovské řešení 4. úlohy (2)*

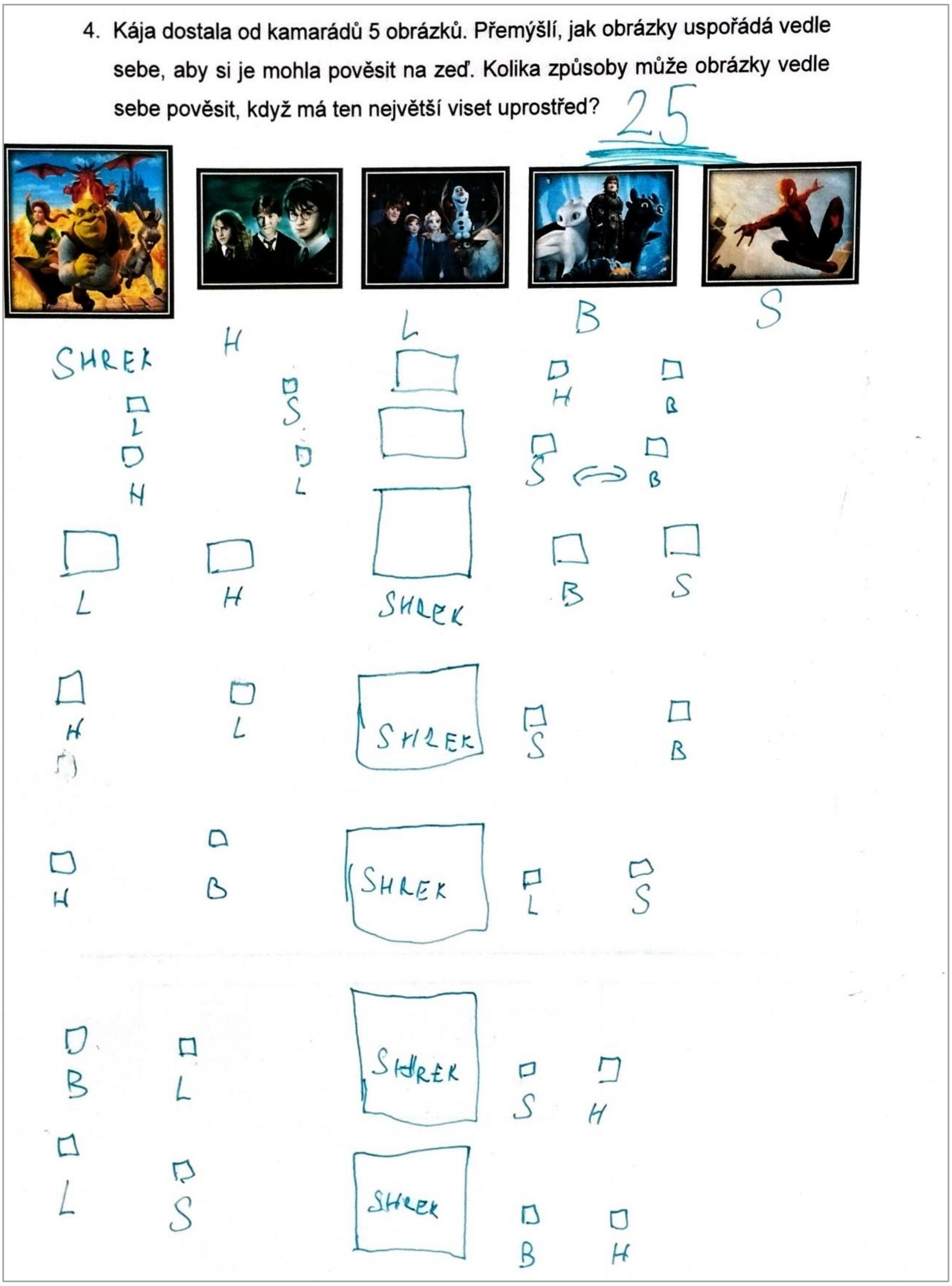



## 6.4.2 Chybná žákovská řešení

Chybná řešení se v této úloze často opakovala. Nejčastěji to byl počet řešení 12 a 25. Myslím, že nejblíže správnému výsledku byli ti, kteří určili počet řešení 25, jako na Obrázku 20. Vypadá to, že žáci svým postupem řešení přišli na to, že mohou obrázky vedle sebe poskládat 24 způsoby, ale poté ještě přičetli výchozí sestavení obrázků ze zadání, které však nesplňují podmínku, že má být největší obrázek uprostřed.

**Obrázek 20**

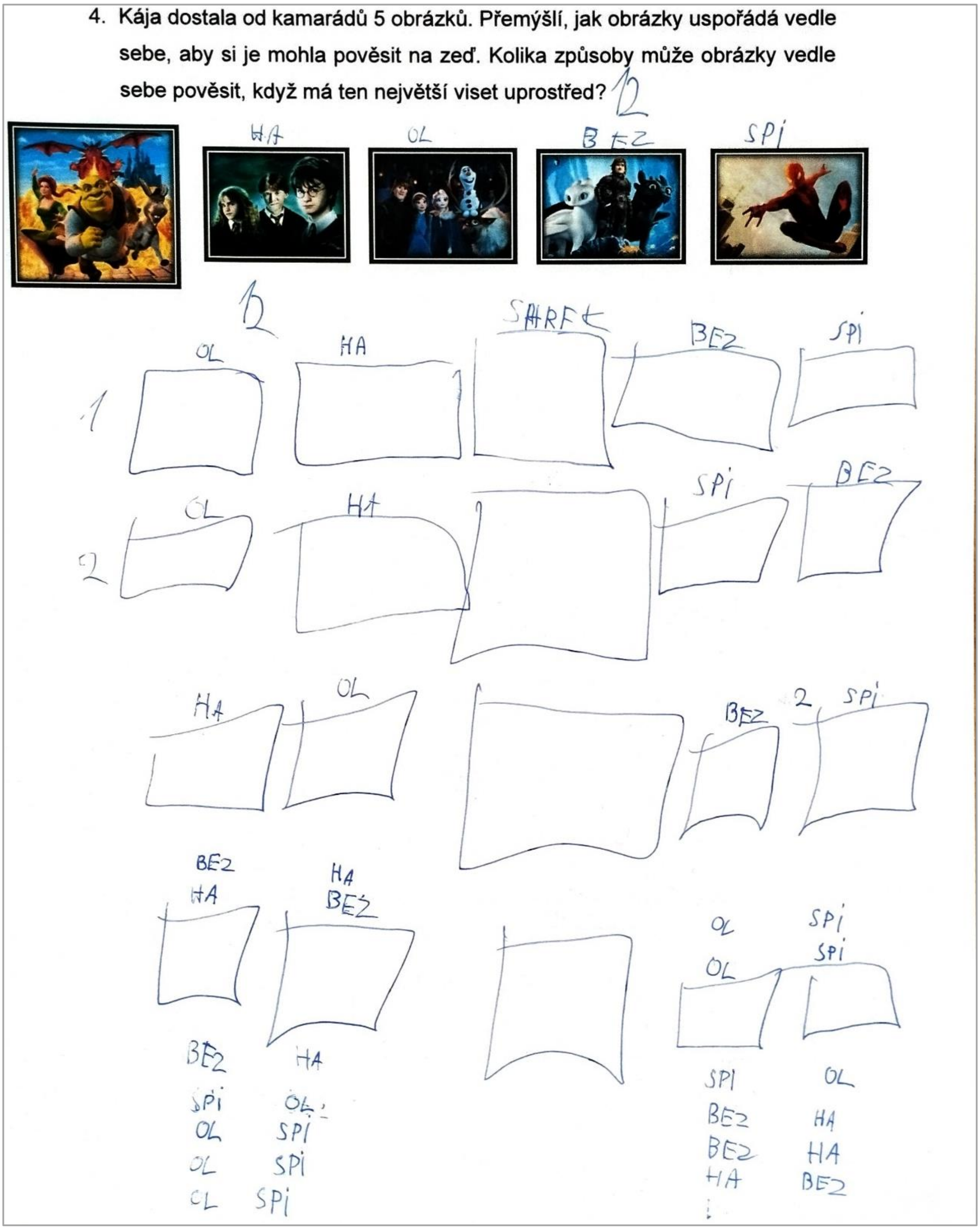
*Chybné žákovské řešení 4. úlohy (1)*




Dalším chybně zapsaným počtem řešení bylo 12. Žáci, kteří tento výsledek určili, byli dle mého názoru na dobré cestě k úspěšnému vyřešení, neboť si kombinace pěkně rozepsali. Nedošli však k úplnému počtu řešení, protože zapomněli, že mohou pořadí i otočit a například obrázek, který byl první, může být i poslední. Jeden z takových případů vidíme na Obrázku 21.

**Obrázek 21**

*Chybné žákovské řešení 4. úlohy (2)*

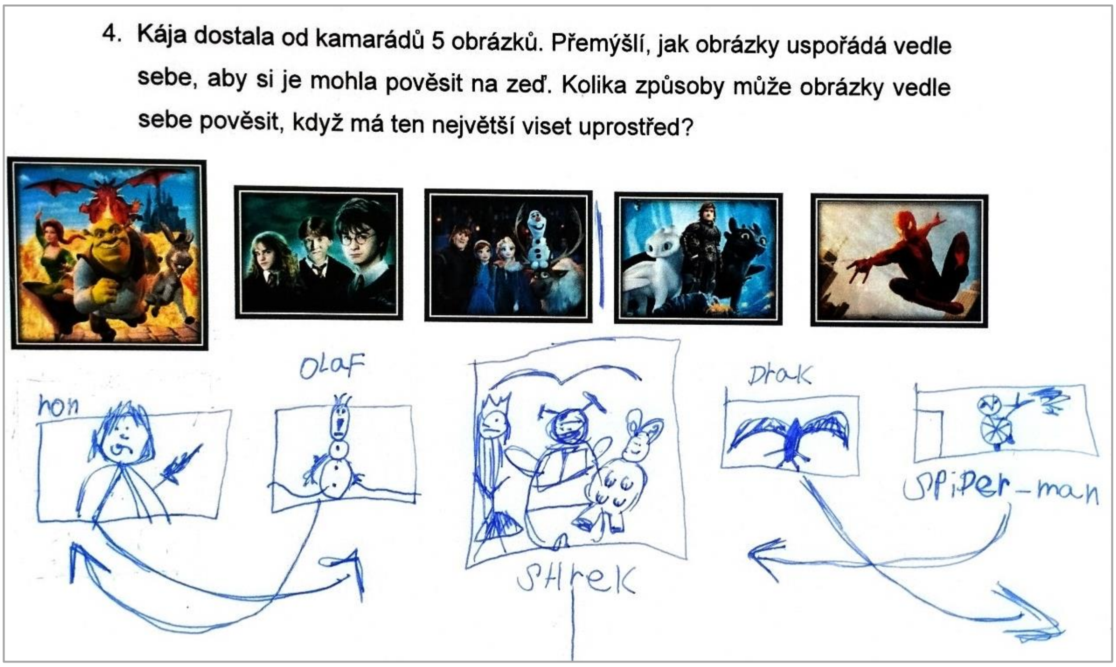



U několika žáků nastalo to, že začali s řešením, které by zřejmě vedlo k nalezení správného počtu všech možných řešení. Avšak jak jsem zaznamenala ve svém odhadu, vysoký počet řešení je zřejmě v průběhu odradil, a oni tak svoji myšlenku nedokončili.

Příklad takové situace můžeme vidět v Obrázku 22, kde žák začal smysluplným grafickým názorem nebo v Obrázku 23, kde si žák jednotlivé obrázky označil zkratkami a začal je zapisovat vedle sebe v různém pořadí.

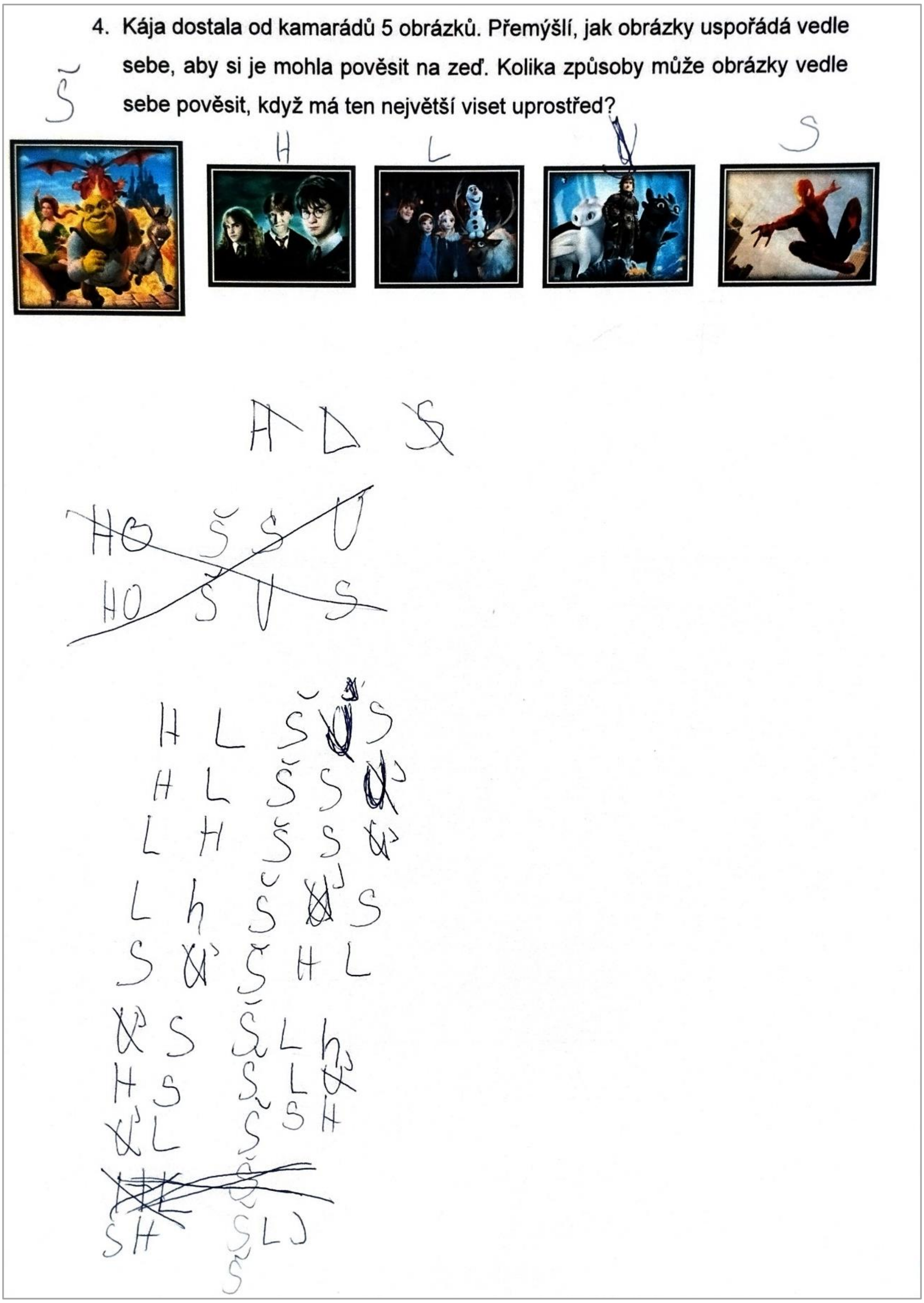
**Obrázek 22**

*Chybné žákovské řešení 4. úlohy (3)*



**Obrázek 23**

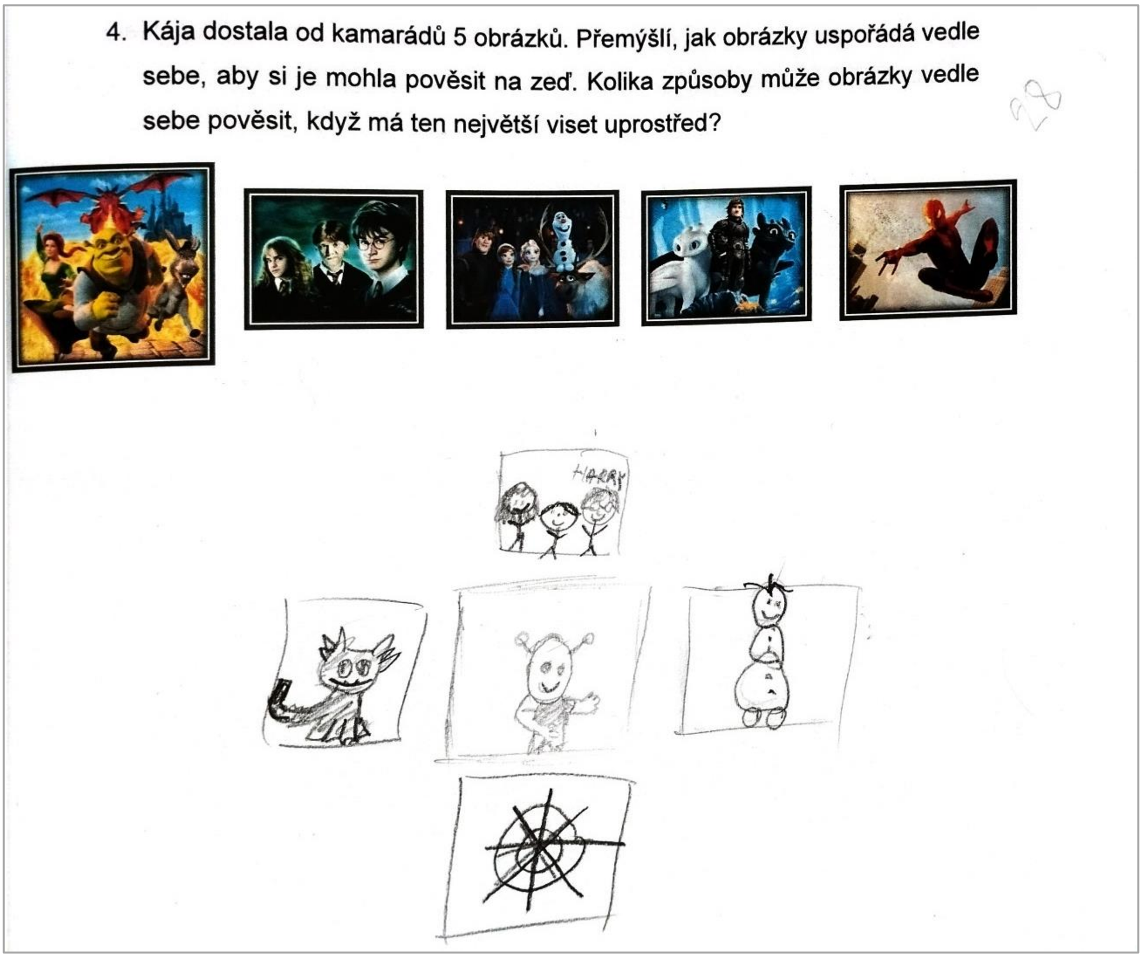
*Chybné žákovské řešení 4. úlohy (4)*




Asi ve dvou případech jsem zaznamenala, že si žáci u tohoto úkolu udělali špatný grafický názor situace, a to tak že obrázky místo do řady vedle sebe stavěli kolem toho největšího dokola, což lze vidět na Obrázku 24. Tato situace byla nejspíše zapříčiněná nepozorným čtením zadání či jeho nepochopením.

**Obrázek 24**

*Chybné žákovské řešení 4. úlohy (5)*




## 6.5 Vybraná žákovská řešení 5. úlohy

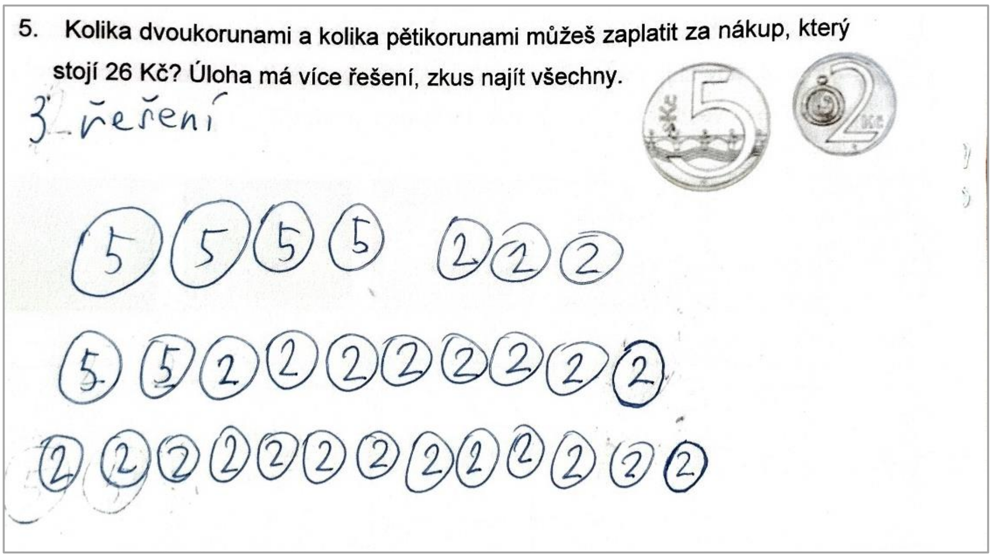
**Zadání:** *Kolika dvoukorunami a kolika pětikorunami můžeš zaplatit za nákup, který stojí 26 Kč? Úloha má více řešení, zkus najít všechny.*

### 6.5.1 Nejčastější způsoby žákovských řešení

Úlohu s mincemi řešili žáci nejčastěji graficky, pomocí zakreslení jednotlivých mincí, jako na Obrázku 25. Nebo případně zkoušeli odhalit všechna možná řešení početně, pomocí náhodného dosazování čísel do výrazu představujícího neurčitou rovnici, což lze vidět v Obrázku 26.

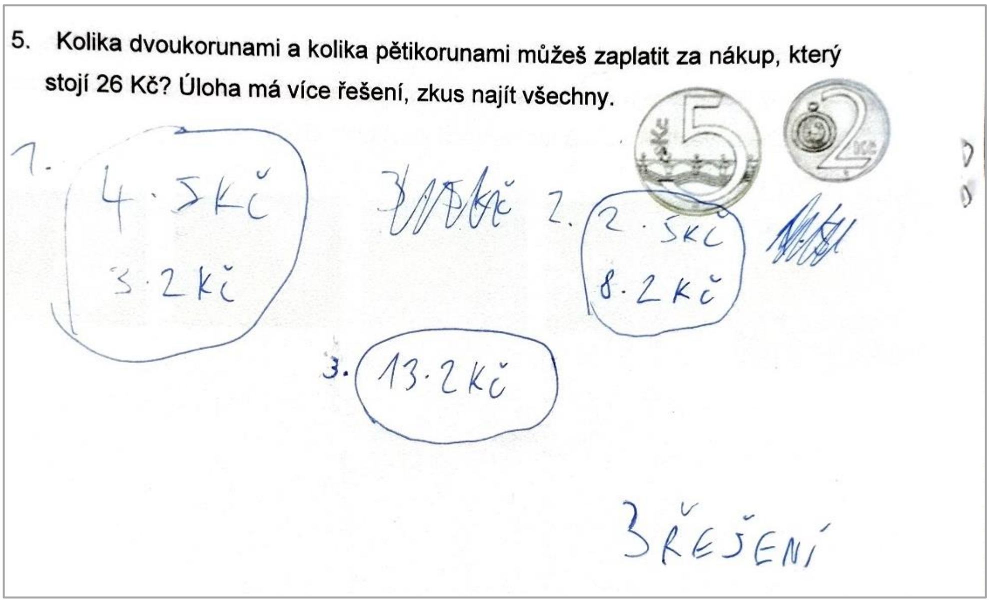
**Obrázek 25**

*Žákovské řešení 5. úlohy (graficky)*




**Obrázek 26**

*Žákovské řešení 5. úlohy (početně)*

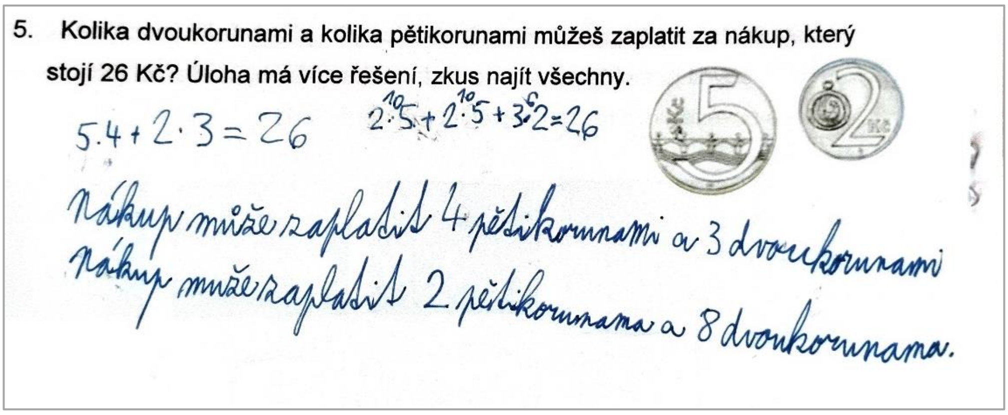



## 6.5.2 Chybná žákovská řešení

Chybným řešením 5. úlohy je nejčastěji uvedení pouze 2 ze 3 řešení, a to nejčastěji tak, že chybí možnost, kde nevyužijeme žádnou pětikorunu, z čehož vyplývá, že můj odhad ohledně tohoto jevu byla správná. Tuto skutečnost ukazuje Obrázek 27. Zde se žák dokonce snažil o odpovědi celou větou, tak jak by tomu správně mělo u slovních úloh být, avšak nenalezl třetí možné řešení.

**Obrázek 27**

*Chybné žákovské řešení 5. úlohy (1)*


5. Kolika dvoukorunami a kolika pětikorunami můžeš zaplatit za nákup, který stojí 26 Kč? Úloha má více řešení, zkus najít všechny.

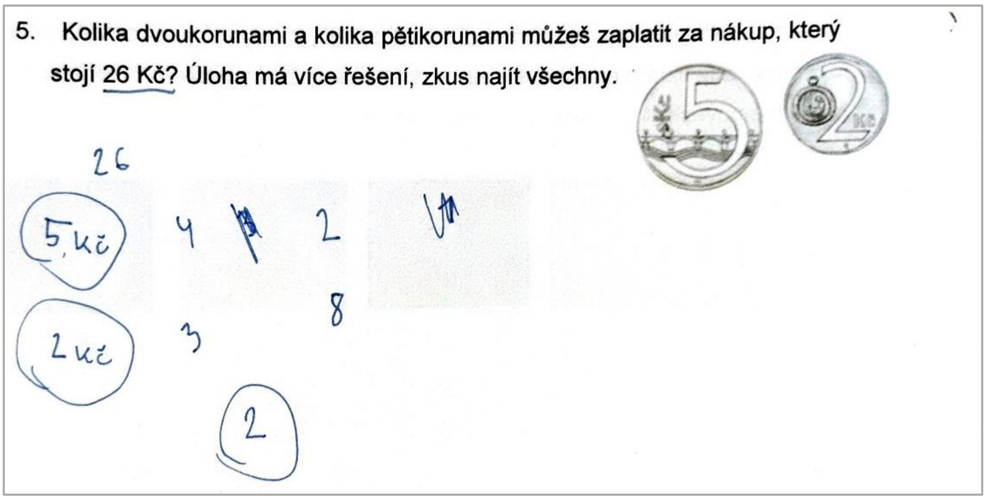
$5 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 26$ $\quad \overset{10}{2 \cdot 5} + \overset{10}{2 \cdot 5} + \overset{6}{3 \cdot 2} = 26$

nákup může zaplatit 4 pětikorunami a 3 dvoukorunami
nákup může zaplatit 2 pětikorunama a 8 dvoukorunama.

V Obrázku 28 vidíme náznak pokusu o sestavení tabulky. Nehodící se počet mincí byl škrtnut a žák tímto způsobem nakonec nalezl pouze 2 možnosti řešení.

**Obrázek 28**

*Chybné žákovské řešení 5. úlohy (2)*


5. Kolika dvoukorunami a kolika pětikorunami můžeš zaplatit za nákup, který stojí 26 Kč? Úloha má více řešení, zkus najít všechny.

26

5 Kč 4 2

2 Kč 3 8

2

# ZÁVĚR

Moje diplomová práce se zabývá kombinatorickými úlohami a kombinačním myšlením žáků 1. stupně ZŠ. Jejím hlavním cílem bylo zjistit úspěšnost žáků 4. a 5. ročníku při řešení různých kombinatorických úloh.

V teoretické části jsem čerpala převážně z odborné literatury. Nejdříve jsem se zabývala Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání, kde jsem se zaměřila na vzdělávací oblast Matematika a její aplikace. Následně jsem popsala teorii kombinatoriky a nakonec jsem představila typy kombinatorických úloh, které se vyskytují v učivu matematiky 1. stupně ZŠ.

K naplnění hlavního cíle práce jsem připravila pracovní list, který obsahuje 5 kombinatorických úloh, a dala jsem jej vypracovat jedné třídě žáků 4. a jedné třídě žáků 5. ročníku. Výsledky vyřešených pracovních listů jsem zpracovala v kvantitativním výzkumu. Výsledky výzkumného šetření jsem porovnala s předem stanovenými odhady. Rovněž jsem ukázala a okomentovala konkrétní způsoby žákovských řešení zadaných úloh.

Výsledky výzkumného šetření ukázaly, že v obou ročnících, tedy ve 4. i v 5., vyřešilo nejvíce žáků právě 3 z 5 zadaných úloh. Pozitivně hodnotím to, že ani v jedné třídě nebyl takový žák, který by nevyřešil žádnou úlohu. Ovšem naopak ani žádný žák z obou ročníků nenašel správná řešení ke všem 5 úlohám, což mě především ve třídě 5. ročníku překvapilo. Výpočtem aritmetického průměru počtu správně vyřešených úloh jsem zjistila, že žák 4. ročníku vyřešil průměrně 2,9 úlohy a žák 5. ročníku průměrně 3,1 úloh z celkových 5 zadaných.

Nejvyššího počtu úspěšných řešení dosahovala ve 4. ročníku jednoznačně 3. úloha, jejímž úkolem bylo určit počet možností oblečení. Vyřešilo ji všech 15 žáků a většina z nich zvolila postup pomocí grafického znázornění situace. V 5. ročníku byly řešitelsky nejúspěšnější hned 2 úlohy, které správně vyřešilo 16 z 19 žáků. Stejně jako ve 4. ročníku to byla 3. úloha. Zde však žáci volili jiná řešení, a to nejčastěji aritmeticky nebo vypsali všechny možnosti řešení. Druhou, řešitelsky stejně úspěšnou úlohou tady byla 1. úloha, u které všichni úspěšní řešitelé úlohu vyřešili tak, že všechna dvojciferná čísla ze 3 zadaných číslic vypsali. Naopak nejnižší úspěšnost řešení měla dle odhadu 4. úloha, kde žáci hledali počet všech možností poskládání obrázků do řady. Tato nízká úspěšnost, jejíž relativní četnost činí ve 4. ročníku 13 % a v 5. ročníku pouze 5 %, je s největší pravděpodobností zapříčiněna vysokým počtem možných řešení, který je 24. Především žáci 5. ročníku začali často řešit úlohu správně, graficky nebo vypisováním možností pomocí číslic či zkratek, kterými si jednotlivé obrázky označili, ale s přibývajícím počtem řešení je napadlo, že tento postup zřejmě nevede ke správnému výsledku, a v řešení tedy již dále nepokračovali. Obecně žáci u všech pěti zadaných úloh preferovali řešení pomocí grafického znázornění nebo všechna možná řešení vypsali.

Výběr a následné zpracování řešení kombinatorických úloh v mé diplomové práci mě bavilo a přineslo mi to cenné poznatky a zkušenosti, které bych ráda využila ve své budoucí praxi. Chtěla bych do výuky zařazovat různé kombinatorické úlohy již od 1. ročníku, abych již od útlého věku žáků rozvíjela jejich kombinační myšlení. Začala bych nejjednoduššími typy úloh a postupně by se žáci naučili aplikovat různé řešitelské strategie, čímž by byli schopni řešit i obtížnější úlohy tohoto typu.

# Seznam literatury


1. Blažková, R. & Budínová, I. (2016). *ROZVOJ KOMBINAČNÍHO MYŠLENÍ NA ZŠ*. PdF MU. https://is.muni.cz/el/ped/jaro2016/MA2MP_PDM2/um/DM2P5.pdf
2. Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (1998). *Náměty k rozvíjení kombinačního myšlení*. PdF MU.
3. Blažková, R. & Vaňurová, M. (2012). Motivace žáků 1. stupně základní školy prostřednictvím kombinatorických úloh. In J. Novotná (Ed.), *Motivace nadaných žáků a studentů v matematice a přírodních vědách* (s. 140–146). PdF MU.
4. Břehovský, J. & Příhonská, J. (2017). *Rozvíjení kombinatorického myšlení na prvním stupni základní školy*. Jednota českých matematiků a fyziků. https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/149108/UcitelMat_025-2017-4_2.pdf
5. Calda, E. (1993). *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. Prometheus.
6. Drábek, J. (1985). *Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. SPN.
7. Gavora, P. (2010). *Úvod do pedagogického výzkumu*. Paido.
8. Hejný, M., Jirotková, J. & Bomerová, E. (2010). *Matematika pro 4. ročník základní školy.* FRAUS
9. Chráska, M. (2016). *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. Grada Publishing, a.s.
10. Justová, J. (2012). *Matematika pro 5. ročník základních škol, 1. díl.* ALTER.
11. Justová, J. (2012). *Matematika pro 5. ročník základních škol, 2. díl.* ALTER.
12. Novotný, M & Novák, F. (2014). *Matýskova matematika pro 4. ročník, 2. díl.* NOVÁ ŠKOLA, s.r.o.
13. Příhonská, J. (2019). *KOMBINATORICKÉ ÚLOHY V UČIVU PRIMÁRNÍ ŠKOLY*. Elementary Mathematics Education Journal. http://emejournal.upol.cz/Issues/Prihonska_EMEJ_2019.pdf
14. Smida, J. (1989). *Matematika pro 2. ročník gymnázií – Kombinatorika*. SPN.
15. Vrba, A. (1980). *Kombinatorika*. Mladá fronta.
16. Zýková, K. (2011, 22. července). *Logika, statistika a kombinatorika na 1. stupni základní školy*. Metodický portál: články. https://clanky.rvp.cz/clanek/10477/LOGIKA-STATISTIKA-A-KOMBINATORIKA-NA-1-STUPNI-ZAKLADNI-SKOLY.html

# Seznam obrázků

# Seznam tabulek

# Seznam grafů

# Seznam příloh

**Příloha 1:**

Jméno: ______________________________ Třída:_________________

| úloha | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | počet správných řešení |
|---|---|---|---|---|---|---|
| správné (1) /nesprávné (0) řešení | | | | | | |

1. Kolik dvouciferných čísel můžeš sestavit z číslic 2, 6, 8, když se číslice nemohou opakovat.

2. Ve škole proběhne fotbalový turnaj, kterého se zúčastní 5 tříd: 4. A, 4. B, 5. A, 5. B a 5.C. Každá třída hraje s každou třídou 1 zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?

3. Kuba si ze skříně vytáhl 4 trička (zelené, modré, žluté, červené) a 3 kraťasy (černé, bílé, šedé). Kolik kombinací oblečení si může Kuba obléknout?

4. Kája dostala od kamarádů 5 obrázků. Přemýšlí, jak obrázky uspořádá vedle sebe, aby si je mohla pověsit na zeď. Kolika způsoby může obrázky vedle sebe pověsit, když má ten největší viset uprostřed?





5. Kolika dvoukorunami a kolika pětikorunami můžeš zaplatit za nákup, který stojí 26 Kč? Úloha má více řešení, zkus najít všechny.