12. Posloupnosti na střední škole

- **posloupnost** = je nějaká řada za sebou nějak seřazených čísel.
- libovolná řada

$1;\ 5;\ 7;\ -3;\ 2;\ 8;\ 12;\ 3{,}75;\ \pi;\ \ldots\ \infty$

$a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n\ \ldots$

nekonečně mnoho členů.

ARITMETICKÁ POSLOUPNOST – jednotlivé členy posloupnosti se liší pořád o stejný kus (rozdíl) a tento rozdíl nazýváme DIFERENCÍ.

d … diference

$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 7 \ldots$

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4$

d = diference (rozdíl)

n = počet členů posloupnosti

a_1

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{15} = a_7 + 8d$

$15 - 7 = 8$

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$ ⇒ vzorec pro n-tý člen

$\boxed{a_r = a_s + (r-s) \cdot d}$

$r = s+1$ $\qquad a_{s+1} = a_s + (s+1-s) \cdot d$

$6 = 5+1$ $\qquad a_{s+1} = a_s + d$

$\boxed{a_{n+1} = a_n + d}$

Př: $a_{15} = 7$ $\quad d = 3$ $\quad a_{22} = ?$

$a_{22} = a_{15} + (22-15) \cdot d$

$a_{22} = a_{15} + 7 \cdot d$

$a_{22} = 7 + 7 \cdot 3 = 7 + 21 = 28$

SOUČET arit. posloupnosti

- členy arit. posloupnosti se dají sčítat, členy jakékoliv posloupnosti se dají sčítat.
- SOUČET členů posloupnosti

$+2 = d$

$1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9$

$S_3 = 1+3+5$

$S_5 = 1+3+5+7+9$

- pokud sčítáme rostoucí posloupnost tak ten součet je nekonečno $+\infty$
- pokud sčítáme klesající posloupnost $(2; -3; -8\dots)$ součet jde do $-\infty$

$3+13=16$

$7+9=16$

$1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13;\ 15;\ \dots\dots$

$a_1\quad a_2\quad a_3\quad a_4\quad a_5\quad a_6\quad a_7\quad a_n = a_8$

$5+11=16$

$1+15=\text{⑯}$

→ SUDÝ POČET ČLENŮ

$n = 8$ členů

a_1 … první člen

a_n … poslední člen

$\frac{n}{2}$ … polovina členů

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1+a_n)}$$

$4+8=12$

$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ \dots\dots$

$a_1\quad a_2\quad a_3\quad a_4\quad a_5 = a_n$

$2+10=12$

→ LICHÝ POČET ČLENŮ

$S_5 = \frac{5}{2}\cdot(2+10)$

$n = 5$ členů

$S_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1+a_n) = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n}$$

aritmet. průměr

$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10$

$2+4+6+8+10$

$4+8=12 \rightarrow 6+6$

$2+10=12$

$6+6$

$6\cdot n = 6\cdot 5$

GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

= je taková posloupnost, kde podíl dvou sousedních členů je KONSTANTNÍ a této konstantě se říká q (kvocient)

$$a_1 \overset{\cdot q}{\frown} a_2 \overset{\cdot q}{\frown} a_3 \overset{\cdot q}{\frown} a_4 \overset{\cdot q}{\frown} a_5 \;\ldots$$

$$\frac{a_2}{a_1} = q$$

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$ … vzorec pro n-tý člen

q … kvocient

n … počet členů posloupnosti

$$q \in \mathbb{R} - \{0\};\ a_n \neq 0$$

a_1

$a_2 = a_1 \cdot q$

$$\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q} \qquad \boxed{q = \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow \boxed{a_r = a_s \cdot q^{r-s}}$$

- geom. posloupnost je to že následující člen vzniká tak že předchozí člen vynásobím kvocientem q který je konstantní.

SOUČET geomet. posloup

konečný součet

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$s_5 = 2 \cdot \frac{3^5-1}{3-1} = \cancel{2} \cdot \frac{243-1}{\cancel{2}} = \underline{\underline{242}}$$

Př:

$a_1 = 2 \qquad q = 3$

$$s_5 = 2 \cdot \frac{1-3^5}{1-3} = \cancel{2} \cdot \frac{1-243}{-\cancel{2}} = 242$$

součet prvních pěti členů geom. posl. je 242.

Když koeficient je v absolutní hodnotě menší než jedna, pak můžu spočítat i nekonečný součet.

$$|q| < 1 \qquad q \in (-1,1)$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

NEKONEČNÝ SOUČET

$$\boxed{S = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}}$$

př: $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}$

$a_1 = \frac{1}{2}$

$q = \frac{1}{2}$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{1}}$$

když $|q| > 1$

$q \geq 1 \Rightarrow q = 2$

Př:

$a_1 = 2 \qquad a_1 = -2$

$a_2 = 4 \qquad a_2 = -4$

$8 \qquad -8$

$6 \qquad -6$

$-32 \Rightarrow$ součet – nekonečná

$32 \Rightarrow$ součet nekonečn

když $q \leq -1$ $\Rightarrow q = -2$

součet bude jedno $\oplus$ opodruhé $\ominus$

$a_1 = 1$

$a_2 = -2$

$a_3 = 4$

$a_4 = -8$

součet bude osciluje $\Rightarrow$ NEXISTUJE součet nekonečný!

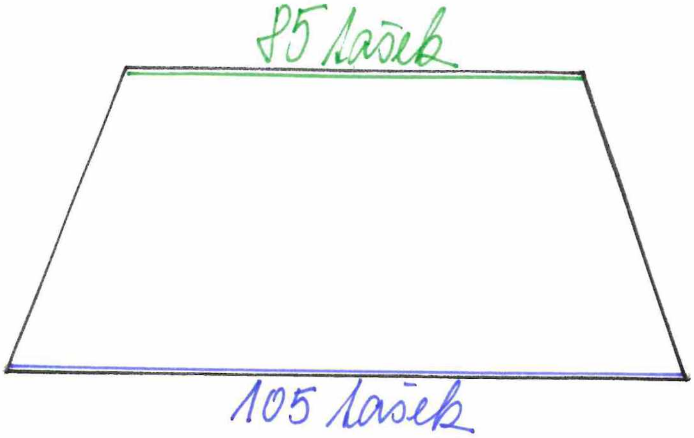
záleží kolik členů posčítám

bude se pořád [illegible]

Úlohy ke zkoušce DIDAKTIKA MATEMATIKY 2

12. Posloupnosti na střední škole.

1. Část střechy domu má tvar lichoběžníku a je třeba pokrýt taškami. Víme, že do řady u hřebene se vejde 85 tašek, do spodní řady při okapu 105 tašek. Při tom jsou tašky srovnány do řad tak, aby v každé následující řadě bylo o jednu tašku více než v řadě předchozí. Kolik je třeba tašek na pokrytí části střechy?



$a_1 = 85$

$a_n = 105$

$d = +1$

$a_n = a_1 \cdot (n-1) \cdot d$

$105 = 85 + (n-1) \cdot 1$

$105 = 85 + n - 1$

$105 = 84 + n$

$n = 105 - 84$

$\underline{\underline{n = 21}}$ řad

$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

$S_{21} = \frac{21}{2} \cdot (85 + 105)$

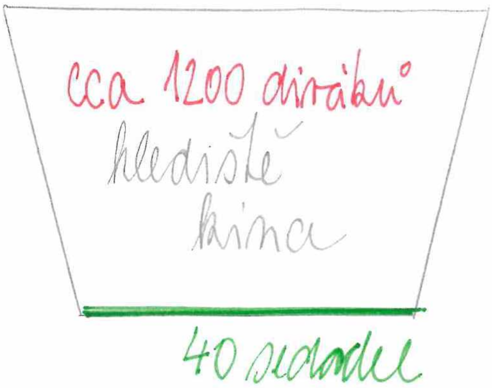
$S_{21} = \frac{21 \cdot 190}{2}$

$S_{21} = \underline{\underline{1995 \text{ tašek}}}$

SOUČET arit. posloup.

Na pokrytí části střechy je potřeba 1995 ks tašek.

2. Buduje se hlediště letního kina přibližně pro 1200 diváků. Do první řady je plánováno 40 sedadel, do každé následující o čtyři sedadla více. Kolik řad sedadel bude mít hlediště?



$S_n = 1200$ diváků (sedaček)
$a_1 = 40$
$d = +4$
$n = ?$ sedadel
$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_n = 40 + (n-1) \cdot 4$$
$$a_n = 40 + 4n - 4$$
$$a_n = 36 + 4n$$

$$1200 = \frac{n}{2} \cdot (40 + a_n)$$
$$1200 = \frac{n}{2} \cdot (40 + 36 + 4n)$$
$$2 \cdot 1200 = 40n + 36n + 4n^2$$
$$2400 = 76n + 4n^2$$
$$0 = 4n^2 + 76n - 2400$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$$

$$n_{1,2} = \frac{-76 \pm \sqrt{76^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2400)}}{2 \cdot 4}$$

$$n_{1,2} = \frac{-76 \pm \sqrt{44176}}{8}$$

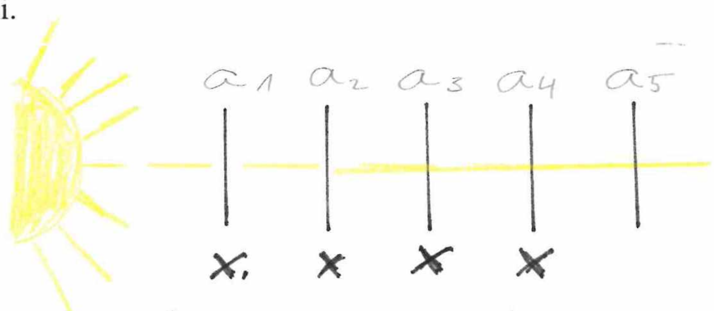
$$n_{1,2} = \frac{-76 \pm 210{,}18}{8} = \begin{cases} 16{,}77 \\ \cancel{-38{,}5} \end{cases}$$

nemá smysl

$n = 17$ řad

Hlediště bude mít 17 řad, aby se vešlo 1200 lidí!

3. Světelný paprsek ztrácí při průchodu skleněnou deskou $\frac{1}{12}$ své intenzity. Jaká je intenzita paprsku po průchodu 4 stejnými deskami.



intenzita = 1

$a_1 = 1$

$a_5 = ?$

$q = \frac{11}{12} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_5}{a_4}$

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

- budou 4 průchody
- ztrácí se $\frac{1}{12}$ intenzity ⇒

$1 - \frac{1}{12} = \frac{12}{12} - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ zůstává

⇒ $q = \frac{11}{12}$ kvocient

$a_5 = 1 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{5-1}$

$a_5 = 1 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^4 = \underline{\underline{0{,}706}}$

Intenzita paprsku po průchodu 4 skleněnými deskami je 0,706.

4. Vkladatel si uložil částku 200000 Kč na termínovaný vklad na 18 měsíců. Vypočítejte, jakou částku bude mít v peněžním ústavu, jestliže nebude vybírat úroky ani vklad. Roční úrok je 0,8 %, daň z úroků je 15 %. Úrokovací období je čtvrtletní.

4 čtvrtletí = 1 rok
1 čtvrtletí = 3 měsíce

- základ ...... 200 000 Kč
- roční úrok .... 0,8 % p.a
- daň z úroku .... 15 %
- úrokovací období čtvrtletí ..... 0,8 : 4 = 0,2 %

úrok za čtvrtletí .... 0,2 % = 0,002 ⇐ (0,2 : 100)

- daň 15 % .... $0{,}002 \cdot \underset{(15:100)}{0{,}15} = 0{,}000030$

za 3 měsíce přibude ..... (0,002 · základ − 0,0003 zákl) =
= 0,0017 z

za 18 měsíců (= 6 čtvrtletí) ⇒ 18 : 3 = 6 čtvrtletí

$a_1 = 200\,000$
$q = 1{,}0017$
$a_7 = ?$

$a_{n+1} = a_n \cdot q$

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1}$

$a_7 = 200000 \cdot (1{,}0017)^6 = \underline{\underline{202\,048{,}70 \text{ Kč}}}$

13. Planimetrie v kurzu školské matematiky

- **planimetrie** ⇒ obsahuje celou geometrii v rovině

13. Planimetrie v kurzu školské matematiky.

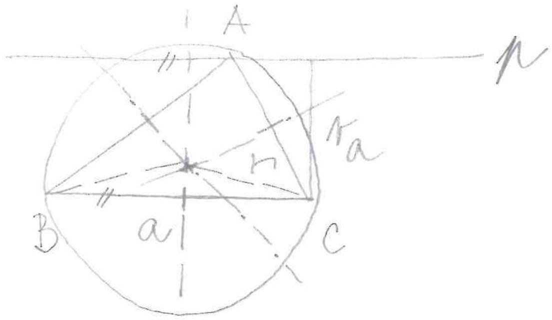
5. Řešte konstrukční úlohy. Proveďte rozbor, popis konstrukce, konstrukci a diskusi řešení vzhledem k parametrickému zadání. Velikosti zadaných prvků si vhodně zvolte tak, aby úloha měla řešení.

a) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno *a*, v_a, *r* (*r* je poloměr kružnice trojúhelníku opsané).

b) Je dána úsečka LM, |LM| = 5 cm. Sestrojte všechny trojúhelníky KLM, pro které je dále $v_k = 3\ cm$, $t_l = 5\ cm$.

c) Sestrojte obdélník ABCD, jestliže jedna jeho strana má délku 4 cm a úhlopříčky svírají úhel 80°.

a) ROZBOR

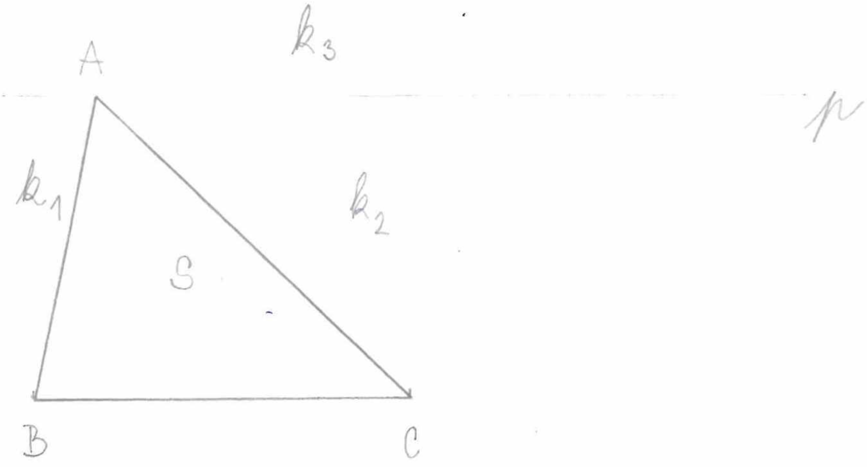


- strana a
- rovnoběžka p ve vzdálenosti v_a (2 možnosti dole a nahoře)
- osa strany a
- střed kružnice opsané je v průsečíku os stran,
- střed kružnice opsané v délce r (protíná osu)
- bod A v délce r ⇒ 2 možnosti

Postup konstrukce

1. BC; $|BC| = 5cm$
2. p; $p \parallel BC$, $|p; BC| = 4cm$
3. k_1; $k_1\ (B; r = 3cm)$
4. k_2; $k_2\ (C; r = 3cm)$
5. k_3; $k_3\ (S; r = 3cm)$
6. A; $A \in p \cap k_3$
7. $\triangle ABC$

Konstrukce

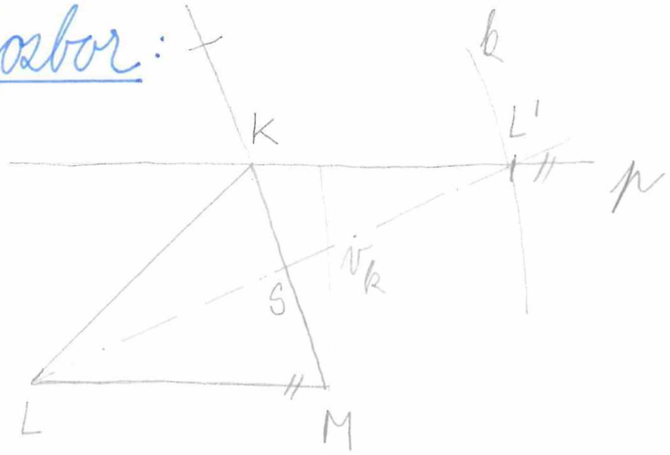


Diskuse:

úloha má dvě řešení v horní polorovině a dvě řešení v dolní polorovině ⇒ úloha má 4 řešení.

b) $\triangle KLM$, kde $|LM| = 5cm$; $v_k = 3cm$; $t_k = 5cm$

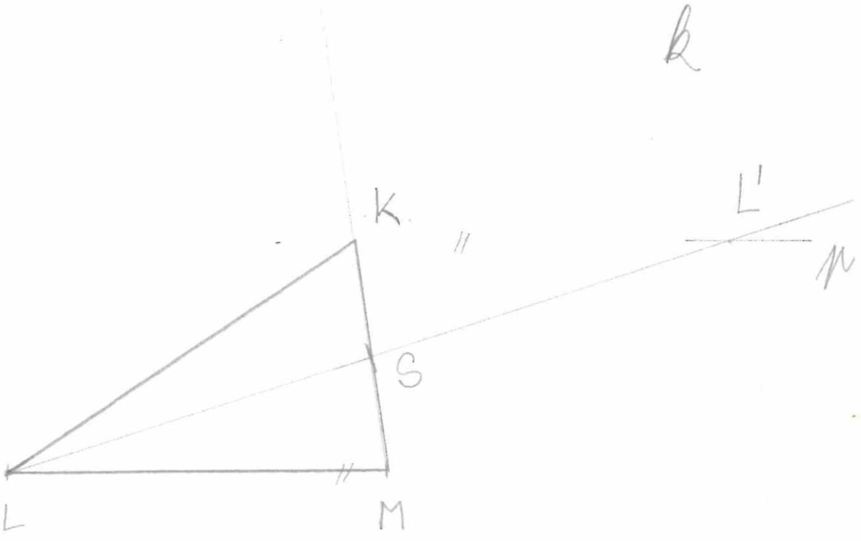
Rozbor:



- použijeme středovou souměrnost
- střed S je středem strany KM

Postup konstrukce:

1. LM; $|LM| = 5cm$
2. p; $p \parallel LM$, $|p, LM| = 3cm$
3. k; $k\ (L, r = 10\ cm)$
4. L'; $L' \in p \cap k$
5. LL'
6. S; S je střed LL'
7. K; $K \in p \cap \overrightarrow{MS}$
8. $\triangle KLM$

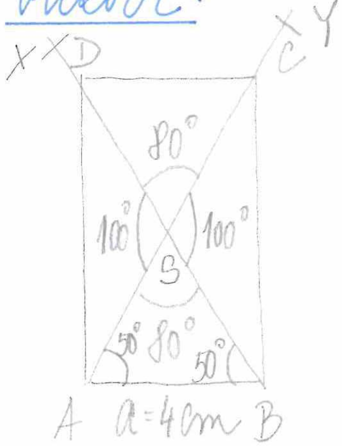


Diskuse:

Úloha má dvě řešení. Jedno v horní a jedno v dolní polorovině.

c) ▭ ABCD, jestliže jedna strana má délku 4cm a úhlopříčky svírají ∡ 80°

Rozbor:

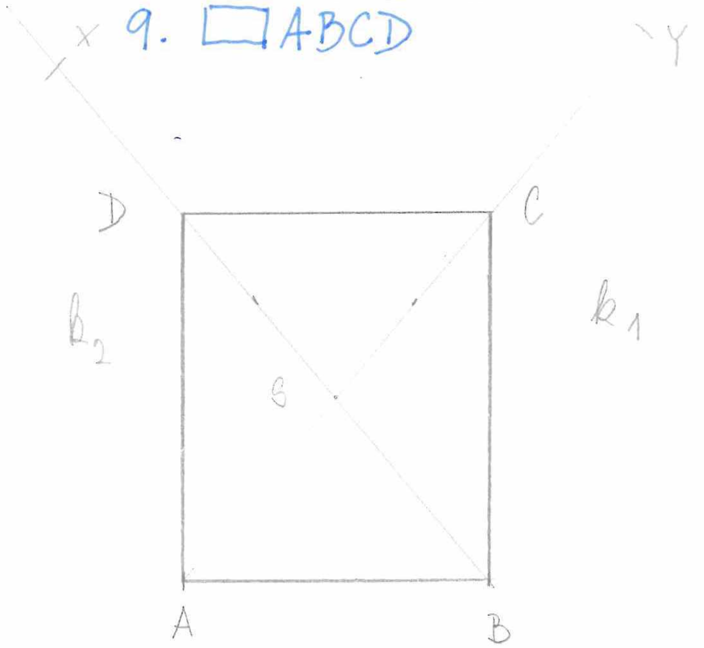


- vycházím z vlastnosti obdelníku, kdy součet všech úhlů v ▭ je roven 360°.

Postup konstrukce:

1. $AB;\ |AB| = 4\ cm$
2. $\sphericalangle ABX;\ |\sphericalangle ABX| = 50°$
3. $\sphericalangle BAY;\ |\sphericalangle BAY| = 50°$
4. $S;\ S \in \overrightarrow{AY} \cap \overrightarrow{BX}$
5. $k_1;\ k_1(S;\ |AS|)$
6. $C;\ C \in k_1 \cap \overrightarrow{AY}$
7. $k_2;\ k_2(S;\ |BS|)$
8. $D;\ D \in k_2 \cap \overrightarrow{BX}$
9. ▭ ABCD

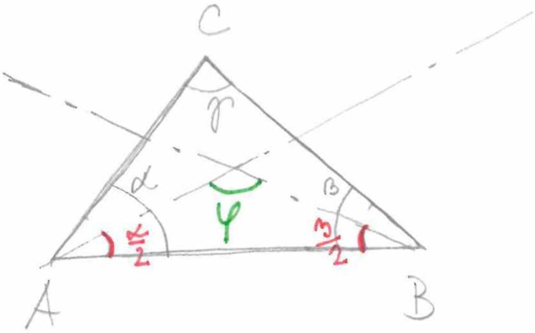
Konstrukce:



Diskuse:

úloha má 4 řešení. (1 v horní polor. + 1 ve spod. pol.)
+ když strana 4cm byla naproti úhlu 100° další dvě řešení v obou polorovinách.

6. V trojúhelníku ABC svírají osy úhlů α a β úhel $\varphi = R + \frac{\gamma}{2}$ (R=90°). Ověřte.



$\varphi = R + \frac{\gamma}{2}$ $R = 90° \Rightarrow$ platí to:

$180° = \varphi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$

$\varphi = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\alpha + \beta = 180 - \gamma \quad / :2$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180}{2} - \frac{\gamma}{2}$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$

dosadíme

$\varphi = 180° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)$

$\varphi = 90° + \frac{\gamma}{2}$

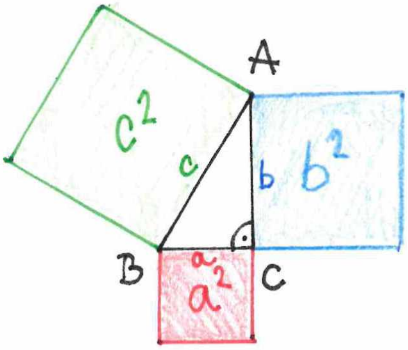
Platí to.

7. Vyslovte a několika způsoby dokažte Pythagorovu větu.

Pythagorova věta

(dáva do souvislosti délky ◺)

⇒ obsah čtverce sestrojeného nad přeponou **PRAVOÚHLÉHO** trojúhelníku se rovná součtu obahů čtverců sestrojených nad jeho odvěsnami.



Jinak řečeno:

Pro **pravoúhlý** trojúhelník ABC s přeponou o délce **c** a s odvěsnami o délce **a**, **b** platí:

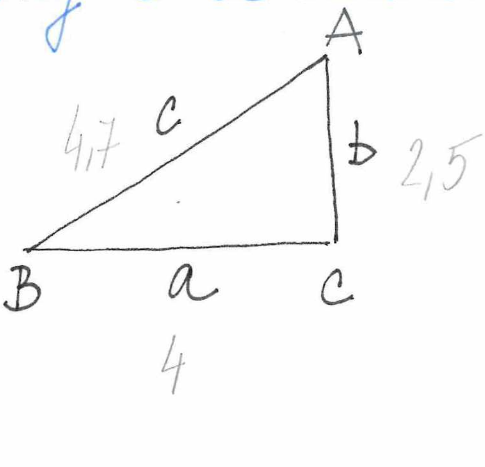
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

a, b .... odvěsny
c .... přepona

- Jak se přesvědčíme, že Pythagorova věta opravdu platí?

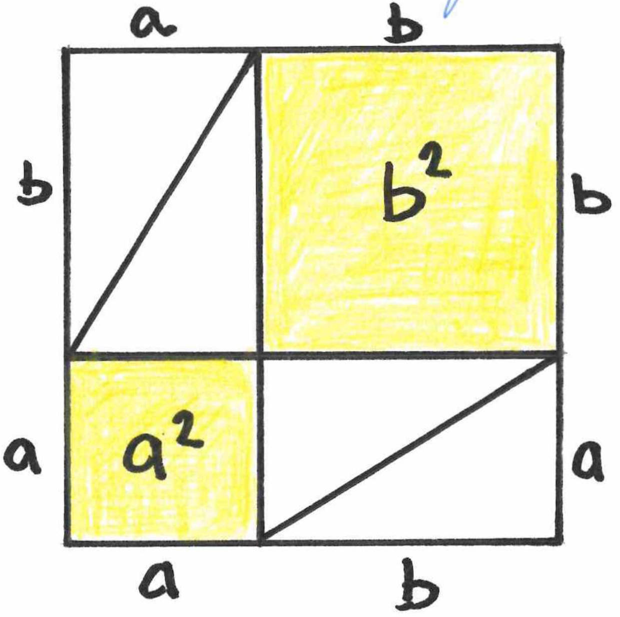
Důkaz č. 1 GRAFICKY

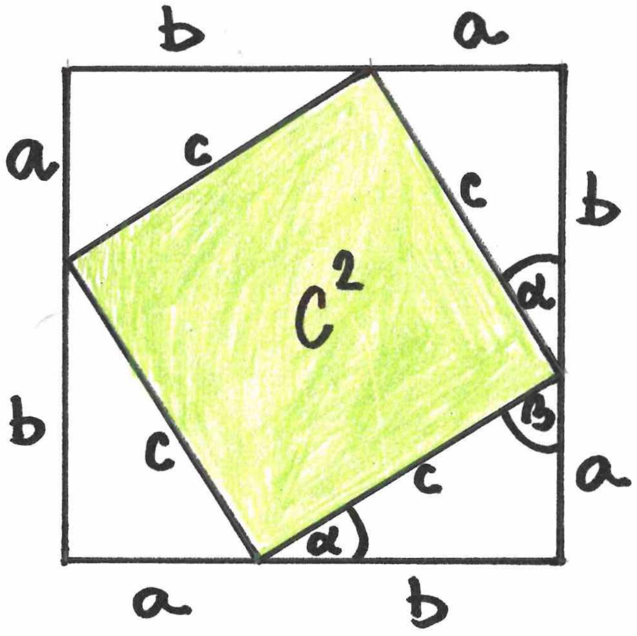
Představte si libovolný ◺ ABC s délkou přepony **c** a délkami odvěsen **a** a **b**



Sestrojíme dva shodné čtverce s délkami stran $a+b$ a do každého z nich umístíme čtyři trojúhelníky **shodné** s trojúhelníkem ABC.

Obsahy vybarvených částí musí být v obou čtvercích stejné.





V levém obrázku jsou vybarveny dva čtverce, které mají obsahy a^2 a b^2.

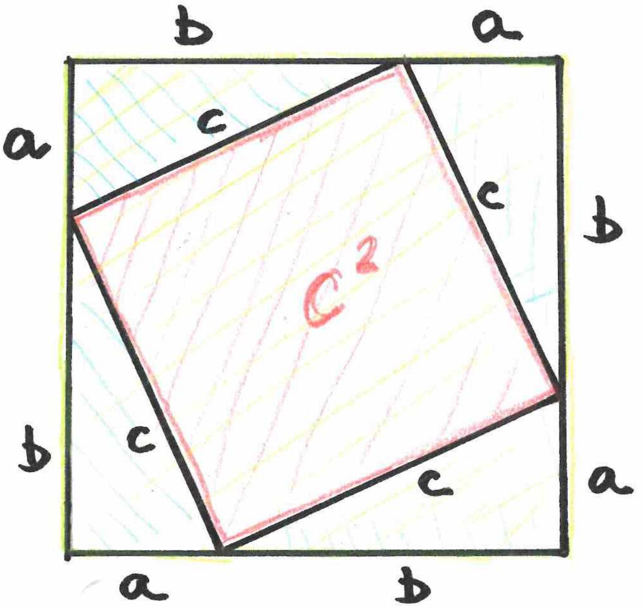
V pravém obrázku má vybarvený čtyřúhelník délky všech stran c a protože $\alpha+\beta=90°$, má všechny úhly pravé. Je to tedy také čtverec a jeho obsah je c^2.

Vybarvené části mají stejné obsahy, a proto

$$c^2=a^2+b^2.$$

c. b. d.

Důkaz č. 2 - POMOCÍ ROVNICE



$$S_{\square} = (a+b)^2$$

$$S_{\boxdot} = c^2$$

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow S = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$

$$S_{4\triangle} = 2 \cdot a \cdot b$$

$$\overset{S}{S_{\square}} = \overbrace{S_{\boxdot} + S_{4\triangle}}^{S}$$

$$(a+b)^2 = c^2 + 2a \cdot b$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \quad / -2ab$$

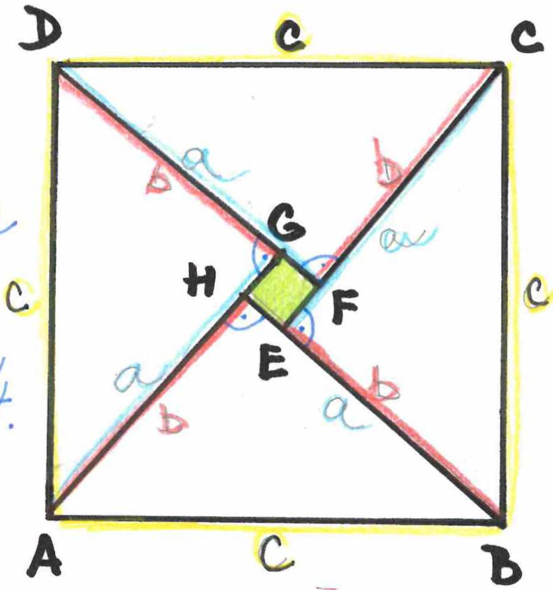
$$\underline{\underline{a^2 + b^2 = c^2}}$$

☒ c.b.d

Což bylo dokázati

Důkaz č. 3

- do čtverce o straně c vskládáme 4 pravoúhlé △
- jaký je obsah □EFGH?
- strana □EFGH má velikost rozdílu odvěsen a a b $\Rightarrow S_{\square EFGH} = (a-b)^2$
- $S_{\triangle} = \frac{a \cdot b}{2}$ je jich tam 4.



$$\Rightarrow S_{4\triangle} = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = 2a \cdot b$$

$$S_{\square ABCD} = S_{4\triangle} + S_{\square EFGH}$$

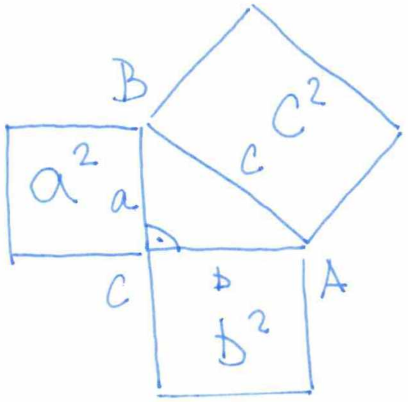
$$c^2 = 2a \cdot b + (a-b)^2$$

$$c^2 = \cancel{2a \cdot b} + a^2 - \cancel{2ab} + b^2$$

$$\underline{\underline{c^2 = a^2 + b^2}}$$

c. b. d.

OBRÁCENÁ PYTHAGOROVA VĚTA



Pokud sestrojíme čtverce nad stranami △ a platí že součet obsahů čtverců sestrojených nad menšími stranami je roven obsahu čtverce sestrojeného nad nejdelší stranou, pak je trojúhelník PRAVOÚHLÝ.

Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníku a platí pro ně $c^2 = a^2 + b^2$, pak je △ pravoúhlý a **c** je délka jeho přepony.

Př: Zjisti zda trojúhelník se stranami 1,5 dm 9 cm a 120 mm ◺ ?

x = 1,5 dm = 15 cm ⇒ přepona
y = 9 cm ⇒ odvěsna
z = 120 mm = 12 cm ⇒ odvěsna

$x^2 = y^2 + z^2$?

$15^2 = 9^2 + 12^2$

$225 = 81 + 144$

$225 = 225$

rovnost platí ⇒ △ je ◺

8. Odvoďte vzorec pro obsah kruhu: a) prostředky žáka základní školy (experiment, manipulativní činnost), b) pomocí vepisování a opisování pravidelných *n*-úhelníků kruhu, c) pomocí integrálního počtu

a) prostředky žáka ZŠ ⇒

π ≠ 3,14
≠ úhel
∡ °/rad

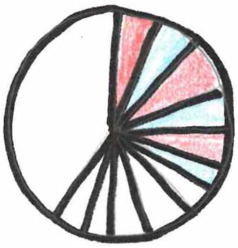
π je poměr mezi obvodem a průměrem kruhu

$\pi = \frac{o}{d} = \frac{o}{2 \cdot r}$

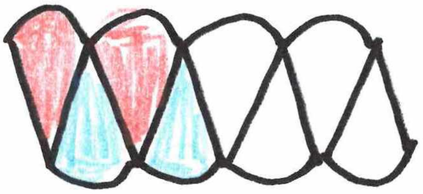
$o = 2\pi r = \pi \cdot d$

π = je nějaké číslo - magická konstanta - iracionální číslo, nelze vyjádřit jako zlomek a lze ho vyjádřit jako deset. číslo s nekonč. desetl. rozvojem, který není periodický!

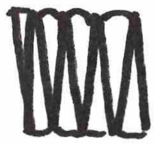
INTUITIVNÍ ODVOZENÍ



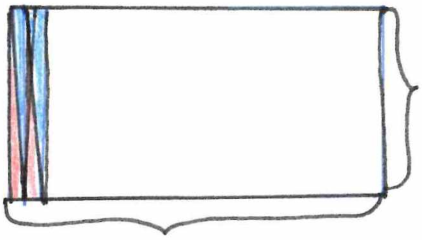
- kruh rozdělíme na spoustu malých Δ
- Trojúhelníčky vyjmu a skládám je proti sobě

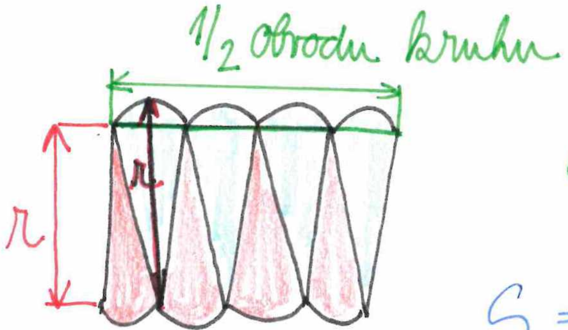


⇒ co by se dělo, kdyby jsme trojúhelníčky dělali menší

⇒  ⇒ obloučky budou menší, budou skoro rovné.

⇒ kdybychom rozdělili kruh na nekonečně mnoho Δ pak by vznikl dokonalý ▭





$o_0 = 2\pi r$

$S_0 = r \cdot 1/2\, o_0$

$S_0 = r \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi r$

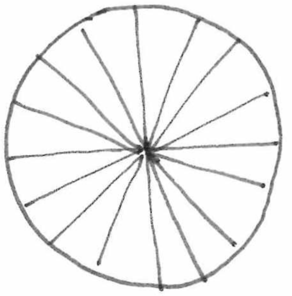
$S_0 = \pi \cdot r^2$

Obsah ◍ $\boxed{S_◍ = \pi \cdot r^2}$ ⟸

b) MATEMATICKÉ

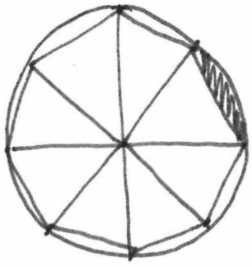
– budeme potřebovat limitní proces

kruh si rozdělím na dílky. Počet dílků Δ bude n. Počet dílků budeme zvětšovat a pošleme ho limitně do ∞.

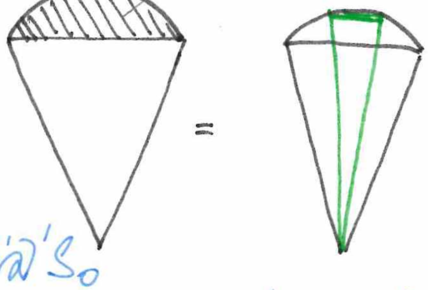


MYŠLENKA DŮKAZU:

• rozdělíme kruh na Δ a vypočítám obsah vzniklého mnohoúhelníku. ⇒ n-úhelníku



⇒ jeden Δ



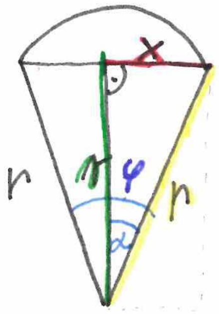
chyba ⇒ ta je tak velká jak velký je obsah toho kopečku (výseče)

1) $S_{⬡} \rightarrow$ když n bude ∞ pak se obsah $S_{⬡}$ blíží S_0

když budu zvětšovat Δ tak ta chyba bude menší!

2) $S_{◒}$ kopečku → jde k 0

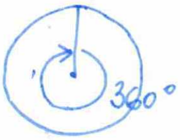
3) $S_{⬡} \lim_{n \to \infty}$



$S_\Delta = x \cdot v$

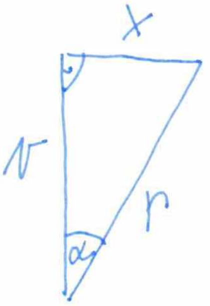
Budeme potřebovat základní limitu pro sinus.

- Celkový kruh ⇒ $2\pi = 360°$



- platí: $\varphi = \frac{360°}{n} = \frac{2\pi}{n}$ n ... počet dílků

$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \varphi = \frac{1.2\pi}{2n} = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$



pomocí goniometr. fce vypočítáme x a v.

$\frac{prot}{přep} = \sin\alpha$ $\frac{x}{r} = \sin\frac{\pi}{n} \Rightarrow x = r \cdot \sin\frac{\pi}{n}$

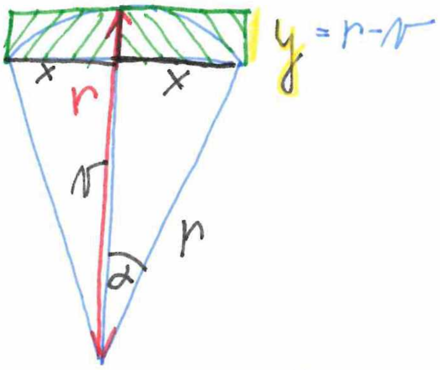
$\frac{přil}{přep} = \cos\alpha$ $\frac{v}{r} = \cos\frac{\pi}{n} \Rightarrow v = r \cdot \cos\frac{\pi}{n}$

Dosadíme do obsahu ∆ $S_\Delta = x \cdot v$

$S_\Delta = r \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot r \cdot \cos\frac{\pi}{n}$

$S_\Delta = r^2 \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{\pi}{n}$ ⇒ vyjádřili jsme obsah jednoho ∆.

$S_{⬡\,\text{n-úhelníku}} = n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{\pi}{n}$



chyba kterou zanedbáváme půjde k nule

· součet všech obsahů těch zanedb. obdélníků půjde k nule.

$$y = r - \nu$$

$$S_{▨} = 2 \cdot x \cdot y = 2x(r-\nu)$$

$$S_{◓} \leq \text{součtu } n \cdot S_{▨}$$

$$S_{◓} \leq n \cdot 2 \cdot x \cdot (r-\nu)$$

$$S_{◓} \leq n \cdot 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \left(r - r \cdot \cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$S_{◓} \leq 2n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} 2n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow \quad \left| \; \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right.$$

$$\lim_{n \to \infty} 2r^2 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} 2\pi \cdot r^2 \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}}}_{1} \cdot \underbrace{\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)}_{0} = 0$$

$$S_{\hexagon\, n\text{-úhel}} = n\cdot r^2\cdot \sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}$$

$$\lim_{n\Rightarrow\infty} S_{\hexagon\, n\text{-úhel}} = \lim_{n\Rightarrow\infty} n\cdot r^2\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}$$

$$\lim_{n\Rightarrow\infty} \pi\cdot r^2\cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1\cdot\pi}{n}}\cdot\cos\frac{\pi}{n} = \underline{\underline{\pi\cdot r^2}}$$

$\rightarrow 1$

vzorec

$$\lim_{x\Rightarrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

pro $n \Rightarrow \infty$ je 0

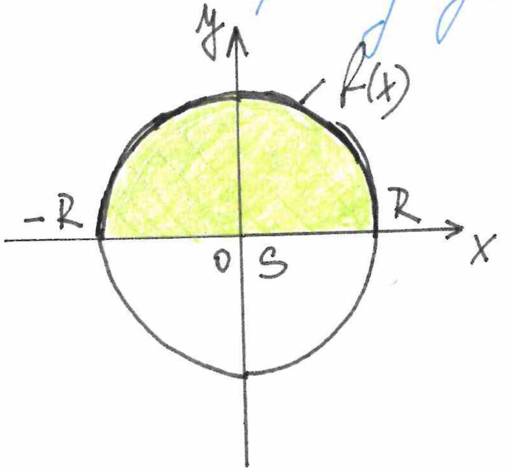
$\cos 0 = 1$

c.b.d

· SK Ji
· Pod Brno
3x Po SL Ca
V. Tosai

c) pomocí INTEGRÁLNÍHO POČTU

- kruh umístíme do soustavy souřadnic tak, aby jeho střed měl souřadnice S[0;0]



- využijeme symetrii a spočítáme obsah horní poloviny kruhu, víme, že všechny body hraniční kružnice splňují rovnici

$$x^2+y^2=R^2$$

- fci, která má za graf „horní" půlkružnici, dostaneme vyjádřením y z rce $x^2+y^2=R^2$ a pro horní polovinu vezmeme $y \geq 0$

po vyjádření =>

$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

- vyjádřili jsme y jako funkci x, proto budeme integrovat přes všechna x od −R do R

- určitý integrál je definován jako „obsah plochy pod křivkou, pod grafem funkce f(x).

proto pro $\frac{1}{2} S_{\bullet}$ platí $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} S_{\bullet} = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx$$

<u>substituce</u>: $x = R \cdot \sin t \Rightarrow dx = R \cdot \cos t \, dt$

pro meze dostaneme

$$x = -R \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = R \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

a dosadíme

$$\frac{1}{2} S_{\bullet} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - \underbrace{R^2 \cdot \sin^2 t}_{x^2}} \cdot \underbrace{R \cdot \cos t \cdot dt}_{dx} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 \cdot (1 - \sin^2 t)} \cdot R \cdot \cos t \cdot dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 \cdot \underbrace{\cos^2 t}_{\substack{\text{vzorec} \\ \sin^2 t + \cos^2 t = 1}}} \cdot R \cdot \cos t \cdot dt =$$

absolutní hod. můžeme vynechat, protože fc. kosinus nab. v inter $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ pouze klad. hod.

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cdot |\cos t| \cdot \cos t \cdot dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cdot \cos^2 \cdot t \cdot dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} \cdot dt = \frac{R^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \cdot dt$$

vzorec $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$

lze dát před $\int$ protože je to konstanta

$$\frac{1}{2}S = \frac{R^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\cdot dt \quad /\cdot 2$$

$$S = R^2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot(1+\cos 2t)\cdot dt$$

<u>integrály</u>

$$\int t^n\cdot dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \int \overset{t^0}{\overset{\shortparallel}{1}} dt = t$$

$$\int \cos(ct)\,dt = \frac{1}{c}\cdot\sin ct$$

$$\Rightarrow \int \cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\sin 2t$$

zintegrujeme: $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$

dosadíme horní mez mínus dolní mez.

$$S = R^2\cdot\left[t+\frac{1}{2}\cdot\sin 2t\right]^{\frac{\pi}{2}} = R^2\left[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\sin(-\pi)}}\right)\right]$$

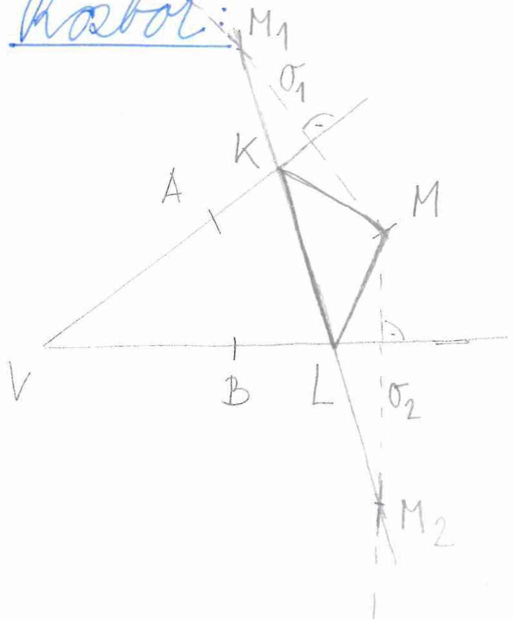
$$= R^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \pi\cdot R^2$$

14. GEOMETRICKÁ zobrazení v kurzu školské matematiky

14. Geometrická zobrazení v kurzu školské matematiky.

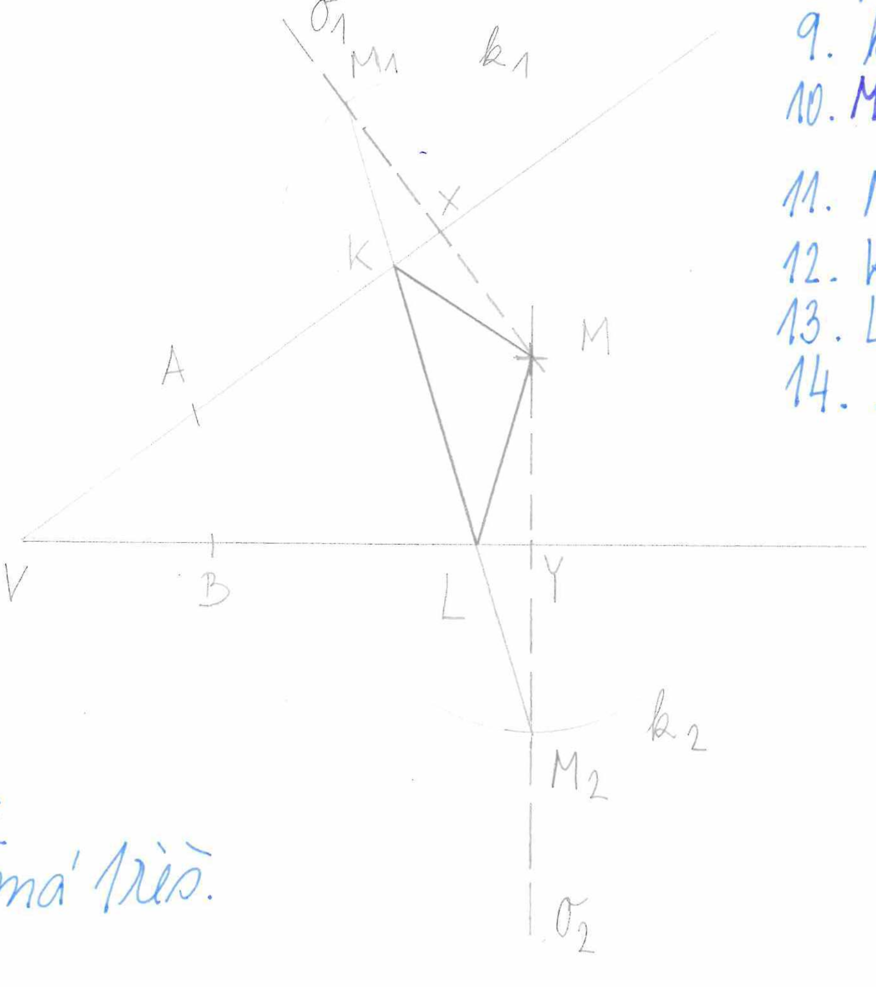
9. Je dán ostrý úhel AVB a jeho vnitřní bod M. Sestrojte trojúhelník KLM tak, aby jeho vrcholy K, L ležely po řadě na polopřímkách VA a VB a obvod trojúhelníku byl minimální.

Rozbor:



Postup konstrukce

1. $\sphericalangle AVB$; $\sphericalangle AVB$ je ostrý
2. M; M je vnitř. bodem $\sphericalangle AVB$
3. σ_1; $\sigma_1 \perp \overrightarrow{VA}$;
4. X; $X \in \overrightarrow{VA} \cap \sigma_1$
5. σ_2; $\sigma_2 \perp \overrightarrow{VB}$
6. Y; $Y \in \overrightarrow{VB} \cap \sigma_2$
7. k_1; $k_1(X, |MX|)$
8. M_1; $M_1 \in k_1 \cap \sigma_1$
9. k_2; $k_2(Y, |MY|)$
10. M_2; $M_2 \in k_2 \cap \sigma_2$
11. M_1M_2
12. K; $K \in M_1M_2 \cap \overrightarrow{VA}$
13. L; $L \in M_1M_2 \cap \overrightarrow{VB}$
14. $\triangle KLM$

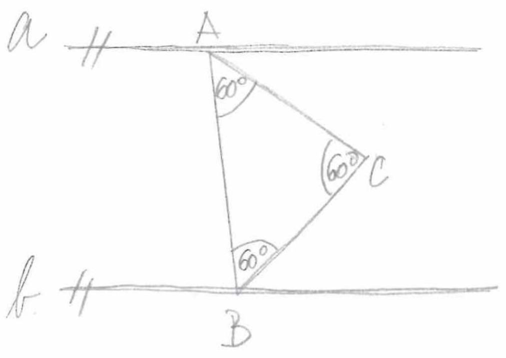


Diskuse:

úloha má 1 řeš.

10. Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky a, b a bod C, který je vnitřním bodem pásu určeného přímkami a, b. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC takové, že $A \in a$ a $B \in b$.

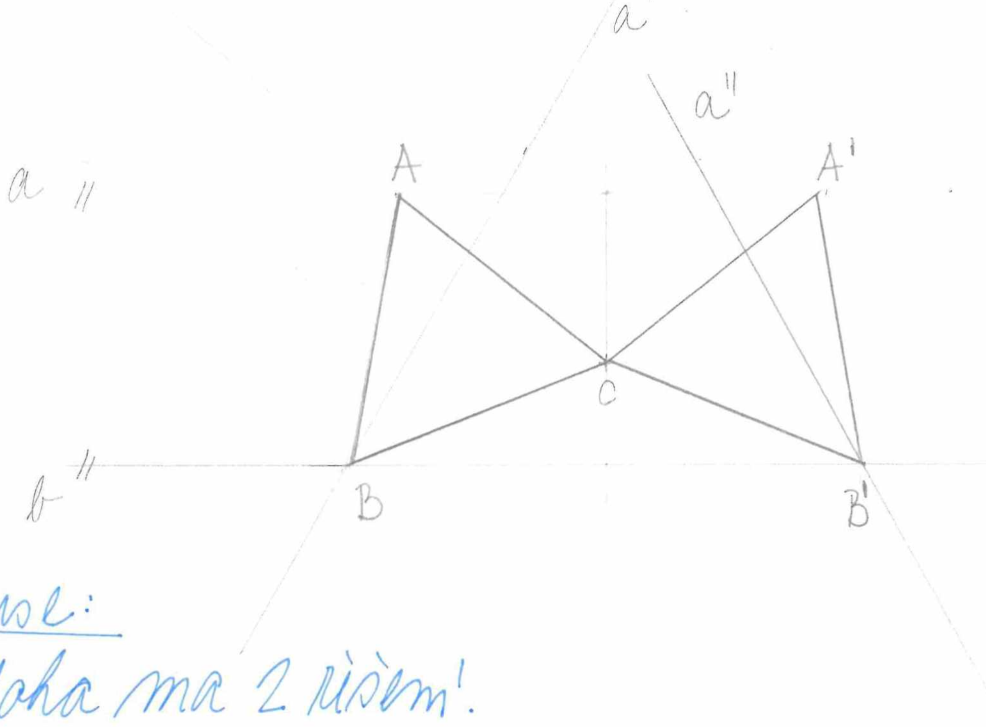
Rozbor:



- využijeme otočení kdy A, B jsou vrcholy rovnoramenného Δ $\Rightarrow |AC| = |BC|$, $|\sphericalangle ACB| = 60°$
- bod A se zobrazí na B v otočení $R(C, \pm 60°) \Rightarrow$ zobrazíme v otočení a tam kde se protne s ~~b~~ bude B
- rovnor. Δ má všechny vnitř. úhly $\alpha = \beta = \gamma$
- $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Postup konstrukce:

1. a; $\leftrightarrow a$
2. b; $\leftrightarrow b \parallel \leftrightarrow a$
3. C; C je v prostoru mezi $\leftrightarrow a$ $\leftrightarrow b$
4. a'; $R(C, 60°): a \to a'$
5. B; $B \in a' \cap b$
6. A; $R(C, -60°): B \to A$
7. $\Delta A'BC$
8. a''; $R(C, -60°): a \to a''$
9. B'; $B' \in a'' \cap b$
10. A'; $R(C, 60°): B' \to A'$
11. $\Delta A'B'C$

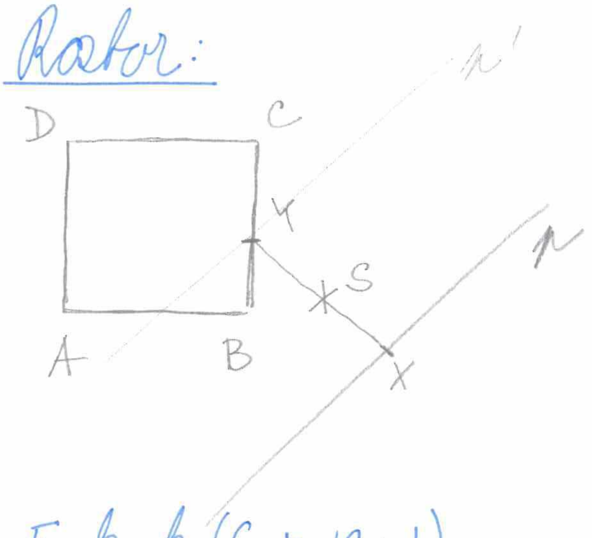


Diskuse:

Úloha má 2 řešení!

11. Je dán čtverec $ABCD$, přímka p a bod S, $S \notin p$. Sestrojte úsečku XY tak, aby bod S byl jejím středem, bod X náležel přímce p a bod Y náležel obvodu čtverce $ABCD$.

Rozbor:

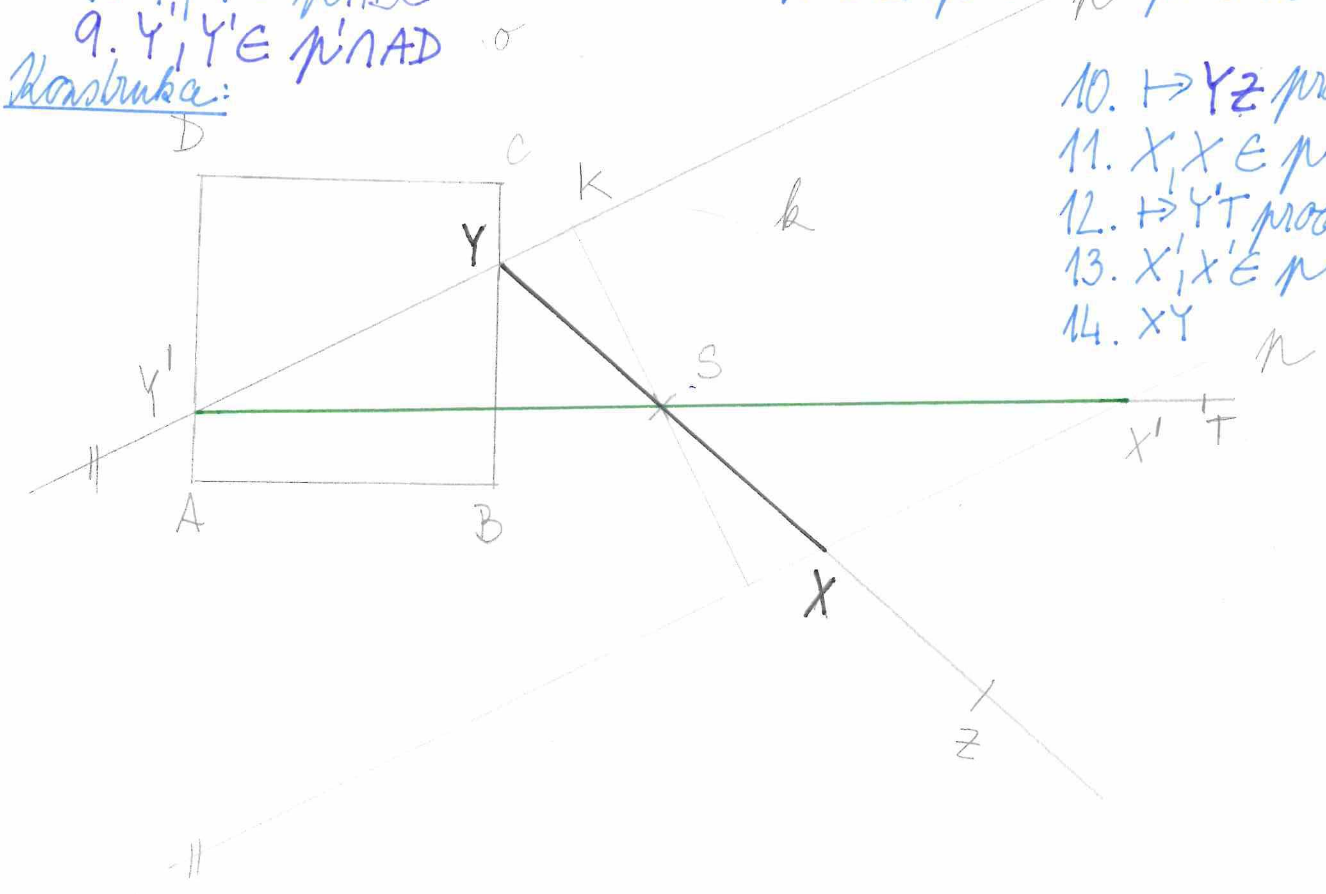


- využijeme středovou souměrnost
- bod Y je bodem přímky p', která je obrazem přímky p v souměrnosti podle bodu S

Postup konstrukce:

1. □ ABCD
2. ↔ p
3. S
4. o ⊥ p a prochází bodem S
5. k, k(S, r=|Sp|)
6. K, K ∈ k ∩ o
7. p', p' ∥ p, p' proch. K
8. Y, Y ∈ p' ∩ BC
9. Y', Y' ∈ p' ∩ AD
10. ↦ YZ proch. S
11. X, X ∈ p ∩ ↦YZ
12. ↦ Y'T proch. S
13. X', X' ∈ p ∩ ↦Y'T
14. XY 15. Y'X'

Konstrukce:

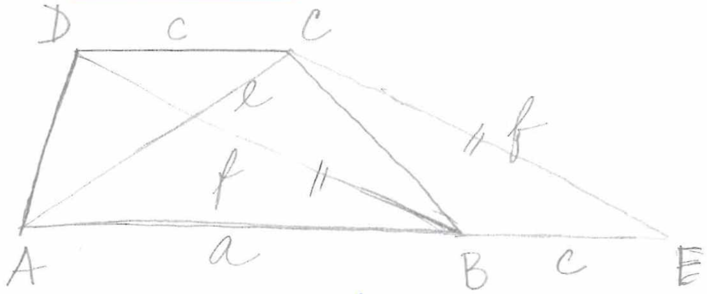


Diskuse: úloha má 2 řešení.

12. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základen a, c a obou jeho úhlopříček e, f.

Rozbor:

- využijeme posunutí, kdy posuneme úhlopř. f ↗(DC)



zvolíme si rozměr lich.:

$a = 8$ cm

$f = 9$ cm

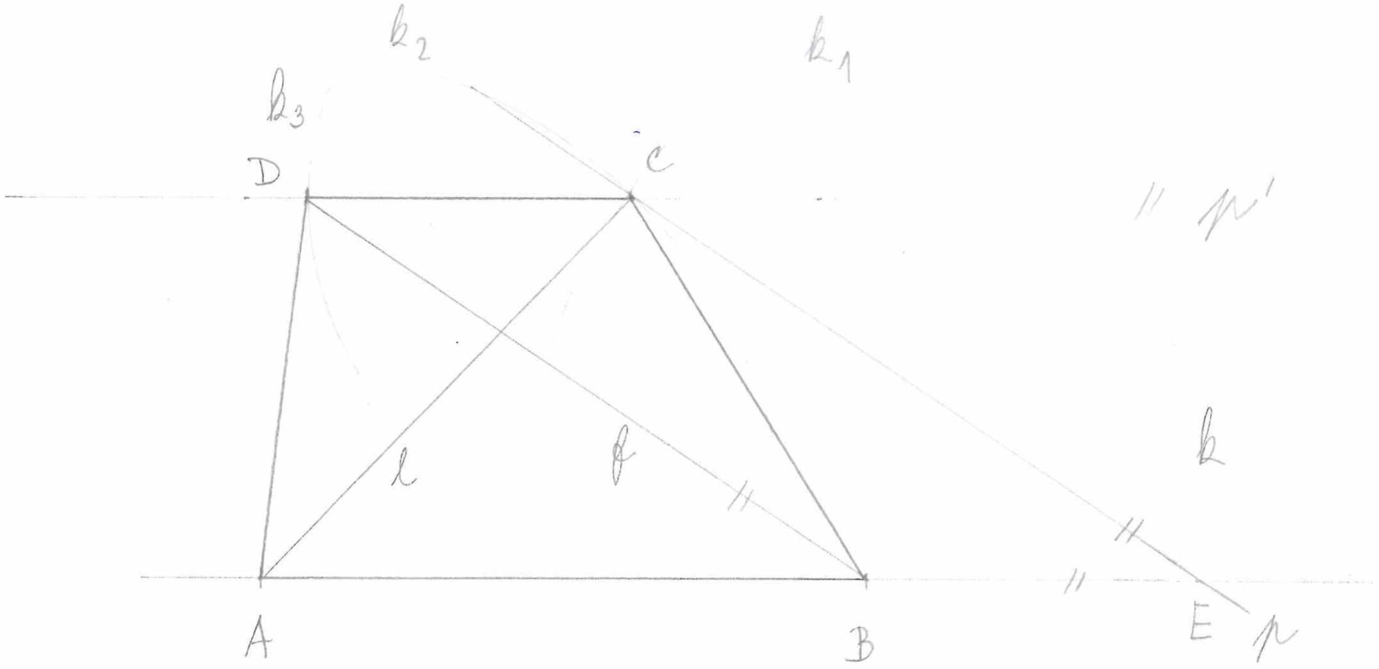
$e - 7$ cm

$c = 4{,}4$ cm

Postup konstrukce:

1. ↔ p
2. AB; |AB| = 8cm
3. k; k (r = c = 4,4cm)
4. E; E ∈ p ∩ k
5. k_1; k_1 (r = f = 9cm)
6. k_2; k_2 (r = e = 7cm)
7. C; C ∈ $k_1 \cap k_2$
8. p′; p′ ∥ p ∈ C
9. k_3; k_3 (r = c = 4,4cm)
10. D; D ∈ $k_3 \cap p'$
11. ⏢ ABCD

Konstrukce:



Diskuse:

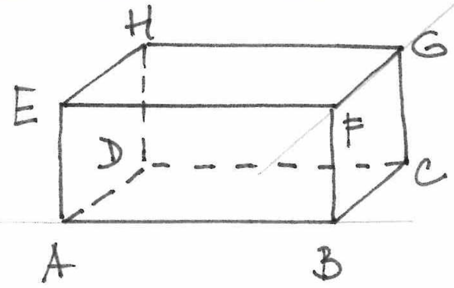
Úloha má 1 řeš.

15. Stereometrie v kurzu školské mat.

15. Stereometrie v kurzu školské matematiky.

13. Ověřte, že objem tělesa, které vznikne rotací pravidelného šestiúhelníku kolem jeho strany, je roven objemu koule, jejíž průměr je trojnásobkem strany šestiúhelníku.

Stereometrie se zabývá 3D prostorem, řezy.



Poloha 2 přímek ve 3D

- rovnoběžné, //
- různoběžné, X
- mimoběžné ↔AB /\ ↔GF
- splývající

Poloha 2 rovin ve 3D

- různoběžné
- rovnoběžné
- splývají

Poloha přímky a roviny ve 3D

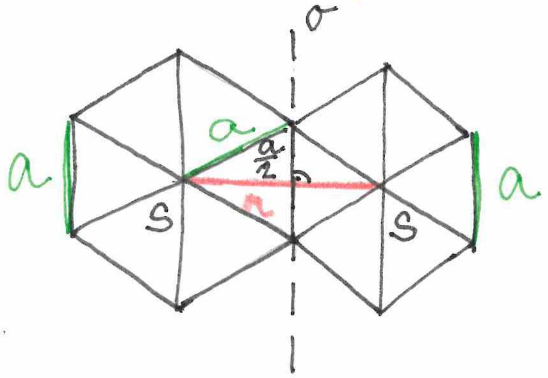
- rovnoběžné,
- různoběžné,
- přímka leží v rovině

Určení roviny

- 3 různé body (neleží na stej přímce) A, B
- bod a přímka B, ↔CG
- různoběžné přímky ↔CG; ↔DC
- 2 rovnoběžné přímky ↔EH; ↔FG

rovinu značíme ABF; DCG .....

13) Objem tělesa vzniklého rotací šestiúhelníku kolem strany a = objem koule o průměru 3a.



poloměr kružnice, kterou opíše střed S šestiúhelníku

$$r^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$r = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

- Objem celého útvaru vypočítáme, jako kdyby se jednalo o hranol, jehož podstava je pravid. šestiúhelník. Jeho výška se rovná délce kružnice, kterou opíše střed šestiúhelníku při rotaci kolem své strany.

výška hranolu = délce kružnice

$$o = 2\pi r = 2\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a = \pi\sqrt{3}\cdot a$$

$$o = \pi\cdot\sqrt{3}\cdot a$$

- obsah podstavy = obsah šestiúhelníku

$$S = 6\cdot S_{\triangle} = 6\,\frac{a\cdot r}{2} = 3ar = 3a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot a^2$$

$$S = \frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot a^2}{2}$$

- objem rotač tělesa = objem hranolu

$$V = S \cdot v = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \cdot a = \frac{9}{2} \pi \cdot a^3$$

$$V = \frac{9}{2} \cdot \pi \cdot a^3$$

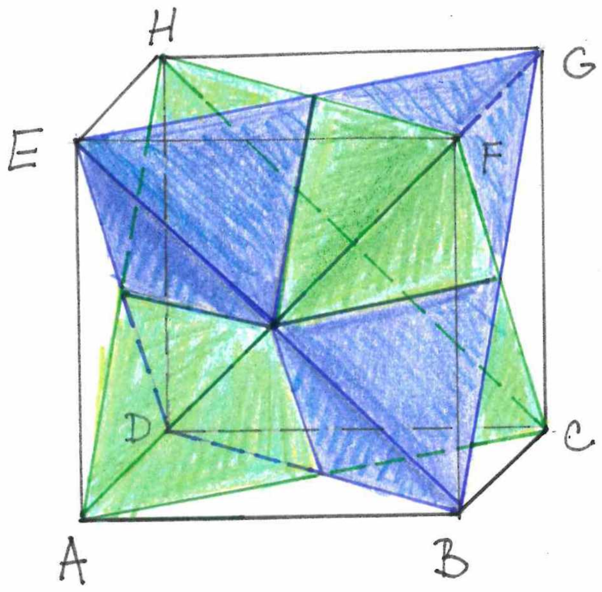
- objem KOULE $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$$d = 3 \cdot a \Rightarrow r = \frac{3}{2} a$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{3}{2} a\right)^3 = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \pi \cdot \frac{\cancel{27} a^3}{\cancel{8}} = \frac{9}{2} \pi \cdot a^3$$

$$V = \frac{9}{2} \cdot \pi \cdot a^3$$

14. Je dány krychle ABCDEFGH. Těleso, které vznikne sjednocením čtyřstěnů ACFH a BDEG se nazývá Keplerův mnohostěn. Určete počet vrcholů, hran a stěn tohoto tělesa.



Keplerův mnohostěn vznikne sjednocením čtyřstěnů ACFH a BDEG.

Kolik má vrcholů?
Kolik má stěn a hran?

Z obrázku vidíme, že má 8 vrcholů.

- stran ?

původní ACFH = 4 stěny
BDEG = 4 stěny

nové strany u vrcholů 3 · 4

celkem 4+4+3·4 = 20 stran

[illegible]

- stěn ?

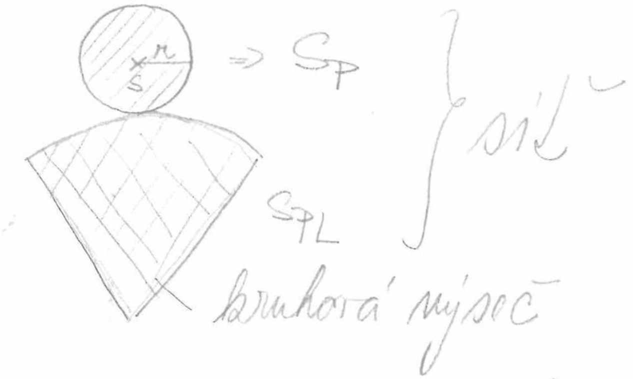
vrcholů 8 · viditelné stěny (viz obrázek) = 8 · 3 = 24 stěn

Odpověď: 8 vrcholů, 20 stran a 24 stěn

15. Odvoďte vzorec pro povrch kužele: a) prostředky žáka ZŠ, b) pomocí integrálního počtu.

a) PROSTŘEDKY žáka ZŠ

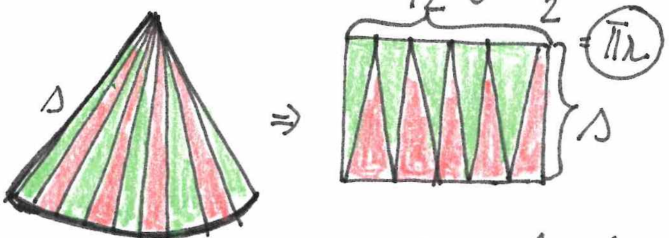
S_p .... obsah podstavy
S_{pL} .... obsah pláště



$$S_{\Delta} = S_p + S_{pL}$$

$$S_p = \pi \cdot r^2$$

$$S_{pL} = \pi \cdot r \cdot s$$



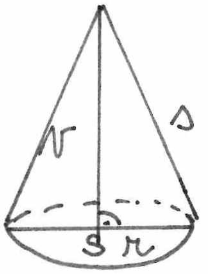
$\sigma = 2 \cdot \pi \cdot r$ ⇒ obvod kruhu

$$S_{\Delta} = S_p + S_{pL}$$

$$S_{\Delta} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$

$$\underline{\underline{S_{\Delta} = \pi \cdot r\,(r + s)}}$$

b) POMOCÍ INTEGRÁLNÍHO POČTU



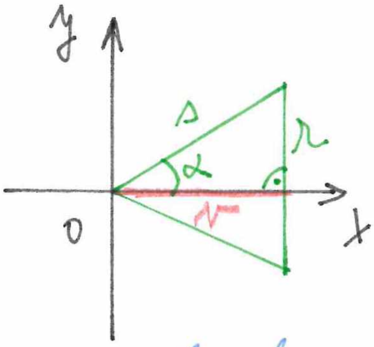
$S_\Delta = S_p + S_{PL}$

$S_p = \pi \cdot r^2$ (obsah kruhu)

S_p ... obsah podstavy

S_{PL} ... obsah pláště

S_{PL} .... ?



- rotační kužel vznikne, když přímka s začne rotovat kolem osy x

- přímka s prochází bodem [0;0], proto její rovnice má tvar

$$y = k \cdot x$$

k ... směrnice přímky

a proto platí $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{v}$

přímka s prochází i bodem [v; r] jeho souřadnice

$$y = k \cdot x$$
$$y = \frac{r}{v} \cdot x$$

- z rovnice přímky nejprve určíme 1. derivaci

$$y' = \frac{r}{v}$$

a spočítáme

$s^2 = v^2 + r^2$ P.V.

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{r^2}{v^2}} = \sqrt{\frac{v^2+r^2}{v^2}} = \sqrt{\frac{s^2}{v^2}} = \frac{s}{v}$$

- <u>pro obsah **pláště** platí:</u>

$$S_{PL} = 2\pi \cdot \int_0^v \frac{r}{v} x \cdot \frac{s}{v}\, dx = 2\pi \left[\frac{r}{v} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{s}{v} \right]_0^v =$$

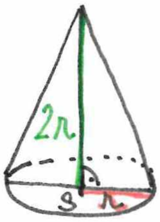
$$= 2\pi \cdot \left(\frac{r}{v} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \frac{s}{v} - 0 \right) = 2\pi \cdot \frac{r \cdot s}{2} = \underline{\underline{\pi \cdot r \cdot s}}$$

- <u>Obsah kužele:</u>

$$S_\Delta = S_{PL} + S_P = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot r \cdot (r+s)$$

$$\underline{\underline{S_\Delta = \pi \cdot r \cdot (r+s)}}$$

16. Vypočítejte poměr objemů těles: Kužele o poloměru podstavy *r* a výšce *2r*, koule o poloměru *r* a válce o poloměru podstavy *r* a výšce *2r*.



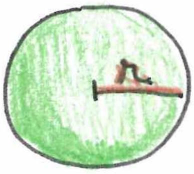
KUŽEL:

r ... polomer

$v = 2\cdot r$ ... výška kuž.

$V_{\triangle} = \frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot v = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot 2\cdot r = \frac{2}{3}\pi\cdot r^3$

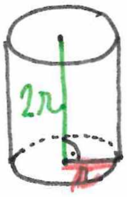
$V_{\triangle} = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3$



KOULE:

r ... polomer

$V_{\bullet} = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$



VÁLEC:

r ... polomer

$v = 2\cdot r$ ... výška válca

$V_{\boxminus} = \pi\cdot r^2\cdot v$

$V_{\boxminus} = \pi\cdot r^2\cdot 2\cdot r = 2\pi\cdot r^3 \Rightarrow$ rozšírim $\frac{3}{3} = 1$

$V_{\boxminus} = \frac{6}{3}\pi\cdot r^3$

POMĚR:

$V_{\triangle} : V_{\bullet} : V_{\boxminus}$

$\frac{2}{3}\cancel{\pi\cdot r^3} : \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 : \frac{6}{3}\cancel{\pi\cdot r^3}$

$\frac{2}{3} : \frac{4}{3} : \frac{6}{3} \quad \Big| \cdot 3$

$\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}} : 3\cdot\frac{4}{\cancel{3}} : 3\cdot\frac{6}{\cancel{3}}$

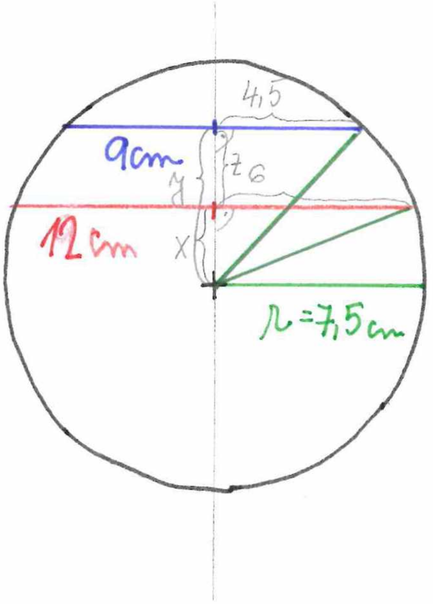
$2 : 4 : 6 \quad \Big| : 2 \quad \Rightarrow \quad 1 : 2 : 3$

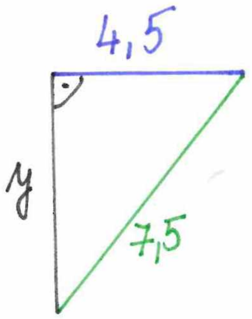
16. TRIGONOMETRIE obecného a pravoúhl. trojúhelníka.

- je mat. obor zabývající se Δ
- součet všech úhlů v Δ je 180° ⇒ $\alpha+\beta+\gamma=180°$

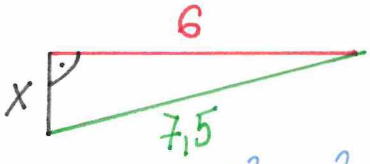
16. Trigonometrie obecného a pravoúhlého trojúhelníka.

17. V kružnici s poloměrem 7,5 *cm* jsou sestrojeny dvě rovnoběžné tětivy, jejichž délky jsou 9 *cm* a 12 *cm*. Vypočítejte vzdálenost těchto tětiv.





$$7{,}5^2 = 4{,}5^2 + y^2$$
$$y^2 = 7{,}5^2 - 4{,}5^2$$
$$y = \sqrt{56{,}25 - 20{,}25}$$
$$y = \sqrt{36}$$
$$\underline{\underline{y = 6\ cm}}$$

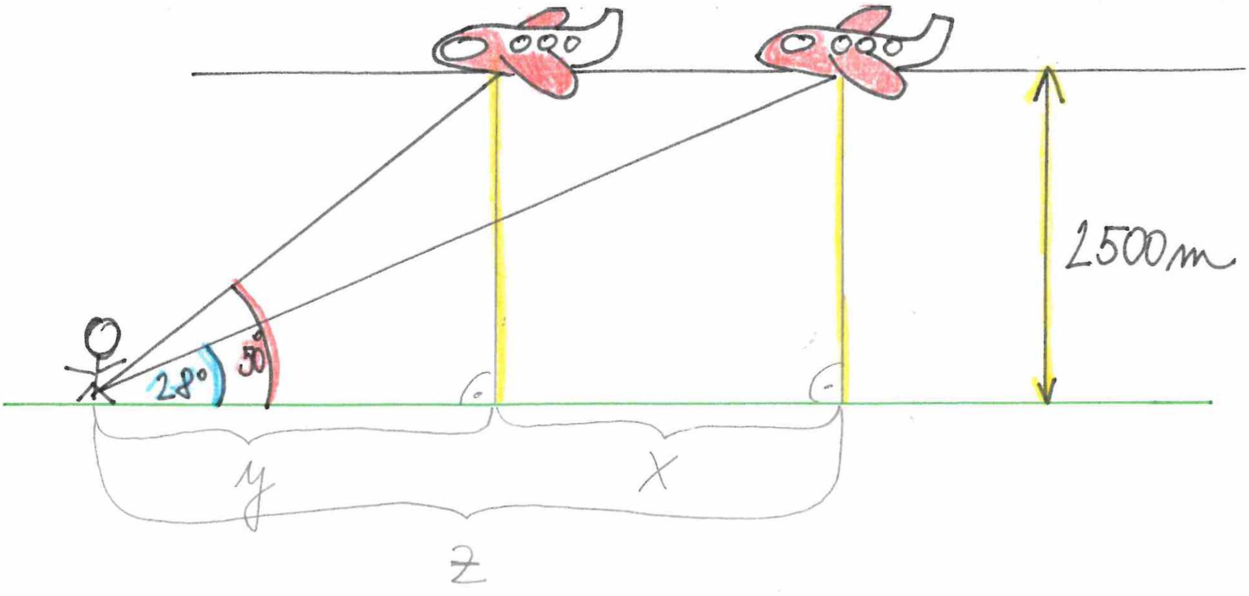


$$6^2 + x^2 = 7{,}5^2$$
$$x^2 = 7{,}5^2 - 6^2$$
$$x = \sqrt{56{,}25 - 36}$$
$$x = \sqrt{20{,}25}$$
$$\underline{\underline{x = 4{,}5\ cm}}$$

vzdálenost mezi tětivami je z

$$z = y - x$$
$$z = 6 - 4{,}5$$
$$\underline{\underline{z = 1{,}5\ cm}}$$

18. Letadlo letí ve výšce 2500 m k pozorovatelně. V okamžiku prvního měření bylo vidět pod výškovým úhlem 28°, při druhém měření pod výškovým úhlem 50°. Určete vzdálenost, kterou proletělo mezi oběma měřeními.



Když známe v △ úhel a protilehlou stranu a potřebujeme vypočítat přilehlou použijeme ⇒ tangens

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}}$$

1) $\operatorname{tg} 28° = \frac{2500}{z}$

$z = \frac{2500}{\operatorname{tg} 28°} = \frac{2500}{0,53} \doteq 4717\ m$

2) $\operatorname{tg} 50° = \frac{2500}{y}$

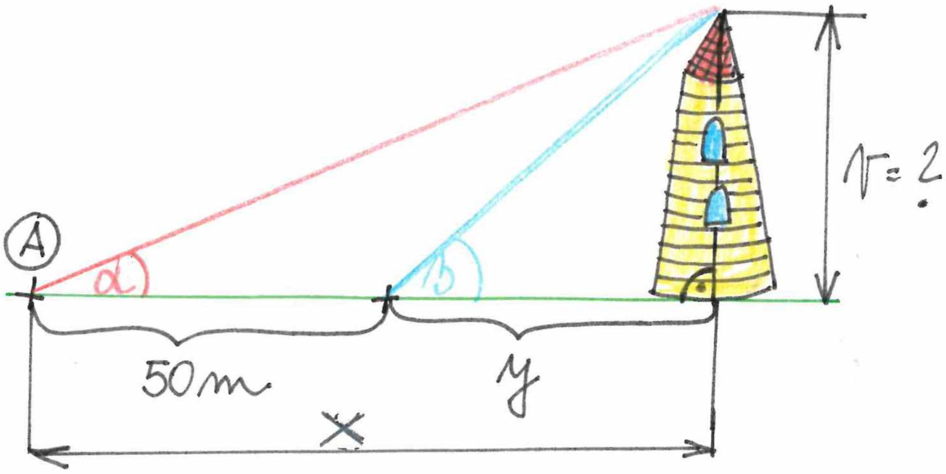
$y = \frac{2500}{\operatorname{tg} 50°} = \frac{2500}{1,19} \doteq 2100\ m$

Vzdálenost mezi oběma měřeními je x

$x = z - y$

$x = 4717 - 2100 = \underline{\underline{2617\ m}}$

19. Vrchol věže stojící na rovině vidíme z určitého místa A ve výškovém úhlu $\alpha = 39°25'$. Přijdeme-li směrem k jeho patě o 50 m blíž na místo B, vidíme z něho vrchol věže ve výškovém úhlu $\beta = 58°42'$. Jak vysoká je věž?



$\alpha = 39°25' = 39,4167°$ $\qquad 1° = 60' \Rightarrow 25' : 60' \doteq 0,417°$

$\beta = 58°42' = 58,7°$ $\qquad 42' : 60' - 0,7°$

1) $tg\,\alpha = \frac{prot.}{přil.} = \frac{v}{x}$

$v = tg\,\alpha \cdot x = tg\,39,4167° \cdot x \doteq 0,822 \cdot x$

$v = 0,822 \cdot x$ $\quad$ kde x lze vyjádřit jako $x = 50 + y$

$v = 0,822 \cdot (50 + y)$

$\underline{v = 41,1 + 0,822y}$

2) $tg\,\beta = \frac{v}{y} \Rightarrow v = y \cdot tg\,\beta$

$v = y \cdot tg\,58,7°$

$\underline{v = 1,645 \cdot y}$ $\quad \Rightarrow v = 1,645 \cdot 49,94$

$v \doteq \underline{82,15\ m}$

Jestliže $v = v$ pak dosadím

$41,1 + 0,822y = 1,645 \cdot y \quad / -0,822y$

$0,823y = 41,1 \quad /: 0,823$

$y = \underline{49,94\ m}$ $\quad \Rightarrow$ vypočítáme výšku v

Věž je vysoká 82,15 m.

20. Sestrojte úsečku velikosti $x = \sqrt{13}$ užitím

a) Pythagorovy věty,

b) Euklidovy věty o odvěsně,

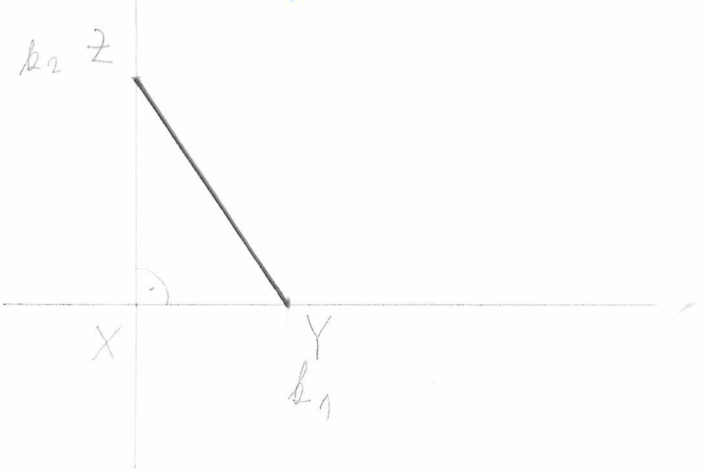
c) Euklidovy věty o výšce.

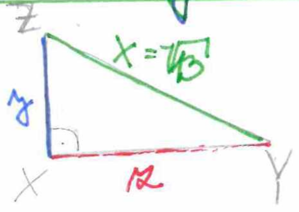
a) PYTHAGOROVY VĚTY

$x = \sqrt{13}$; $y = 3$; $z = 2$

$x = \sqrt{13}$

• $\boxed{x^2 = y^2 + z^2}$





$x = \sqrt{y^2 + z^2}$

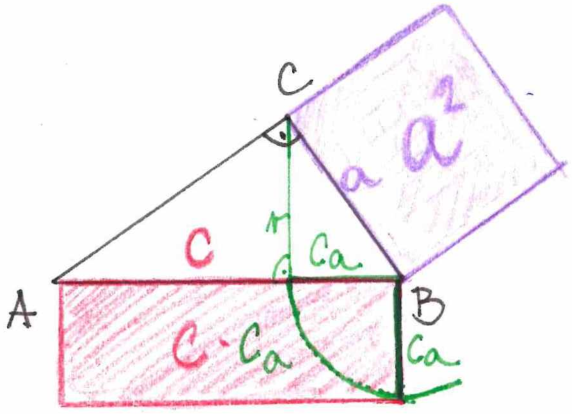
$x = \sqrt{3^2 + 2^2}$

$x = \sqrt{\underbrace{9 + 4}}$

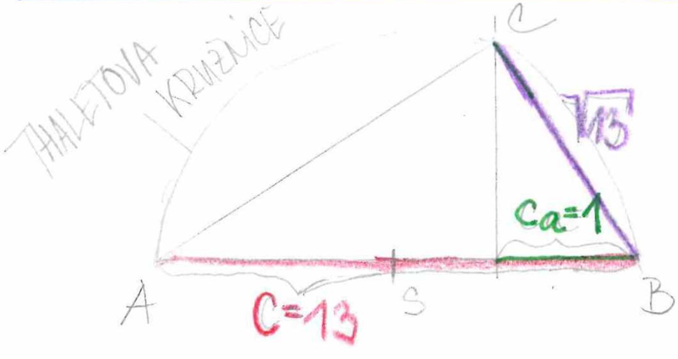
$x = \sqrt{13}$ ✓

b) EUKLIDOVY VĚTY o odvěsně

• $\boxed{a^2 = c \cdot c_a}$



- obsah čtverce sestroj. nad odvěsnou △ se rovná obsahu ▭, jehož strany jsou přepona (c) a úsek na přeponě k odvěsně přilehlé (ca)



$a = \sqrt{c \cdot c_a}$

$a = \sqrt{13 \cdot 1}$

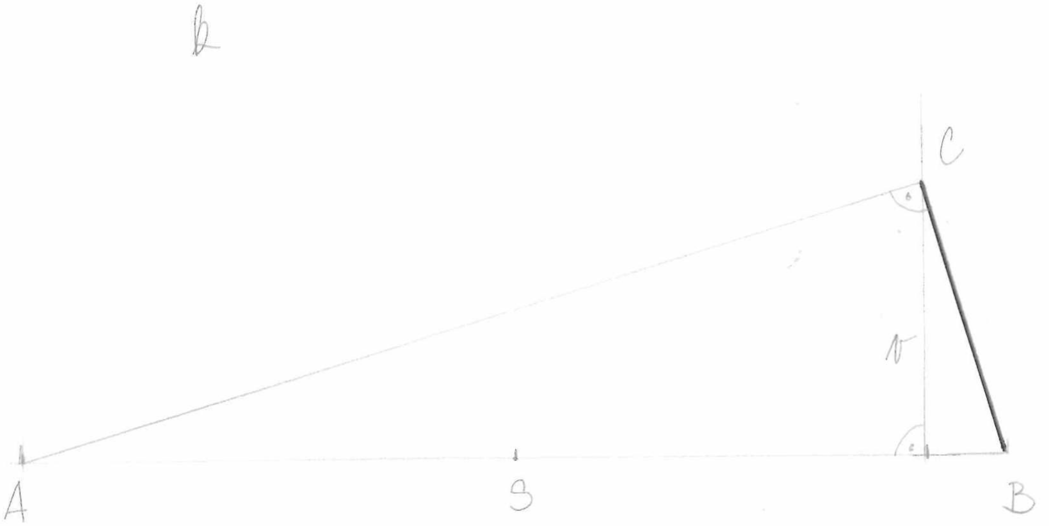
$a = \sqrt{13}$ ✓

$\Rightarrow$ $c = 13$

$c_a = 1$

$\Rightarrow$

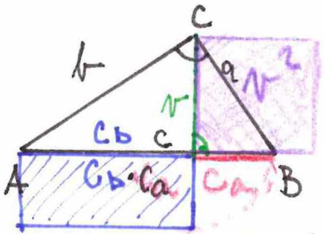
$c = 13$; $c_a = 1$ THALET. KRUŽNICE



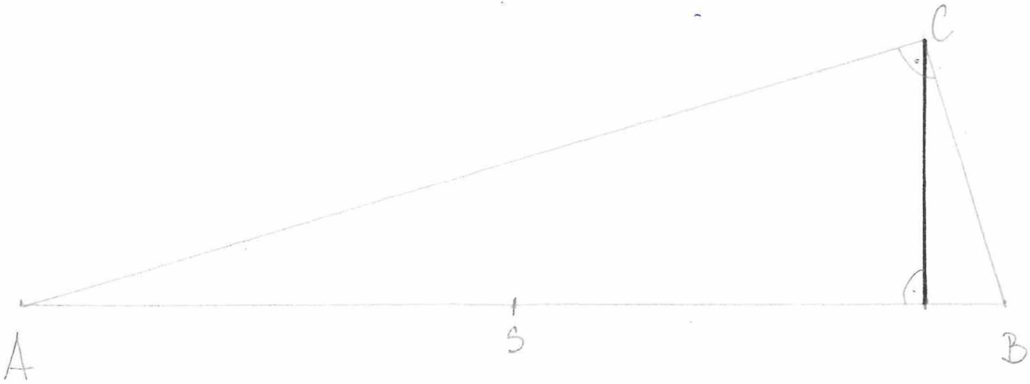
c) EUKLIDOVA VĚTA o výšce

$$\boxed{v^2 = c_a \cdot c_b}$$

$c_a = 1$; $c_b = 13$; THALET. KRUŽ.



- obsah čtverce sestroj. nad výškou ◺ se rovná obsahu pravoúhelník jehož strany jsou úsečky na přeponě k odvěsnám přilehlé ($c_a \cdot c_b$)



$v^2 = c_a \cdot c_b$

$v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$

$v = \sqrt{1 \cdot 13}$

$v = \sqrt{13}$ ✓

17. ANALYTICKÁ geometrie lineárních útvarů a kuželoseček na SŠ

17. Analytická geometrie lineárních útvarů a kuželoseček na střední škole.

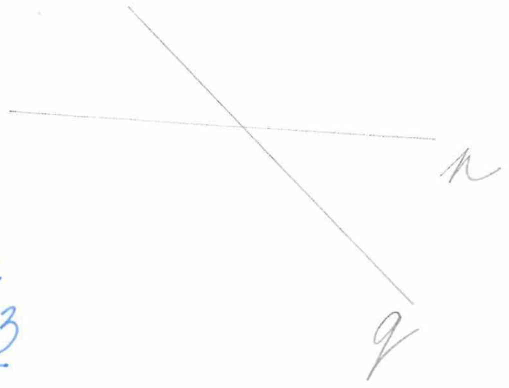
21. Určete průsečík přímek p, q:

$$p: 2x - y - 3 = 0,\ q: x = -5 + 3t, y = -3 + t, t \in R.$$

$p: 2x - y - 3 = 0$

$q: x = -5 + 3t$

$y = -3 + t \qquad t \in R$



• vyjádříme si $t \Rightarrow y = -3 + t$

$\underline{t = y + 3}$

průsečík $p \cap q$

$q: x = -5 + 3t$

$x = -5 + 3 \cdot (y + 3)$

$x = -5 + 3y + 9$

$0 = x - 3y - 4$

dosadím

soustava rovnic $p: 2x - y - 3 = 0$

$q: \underline{x - 3y - 4 = 0} \Rightarrow x = 3y + 4$

$p: 2 \cdot (3y + 4) - y - 3 = 0$

$6y + 8 - y - 3 = 0$

$5y = -5 \quad /:5$

$\underline{y = -1}$

$q: x = 3y + 4$

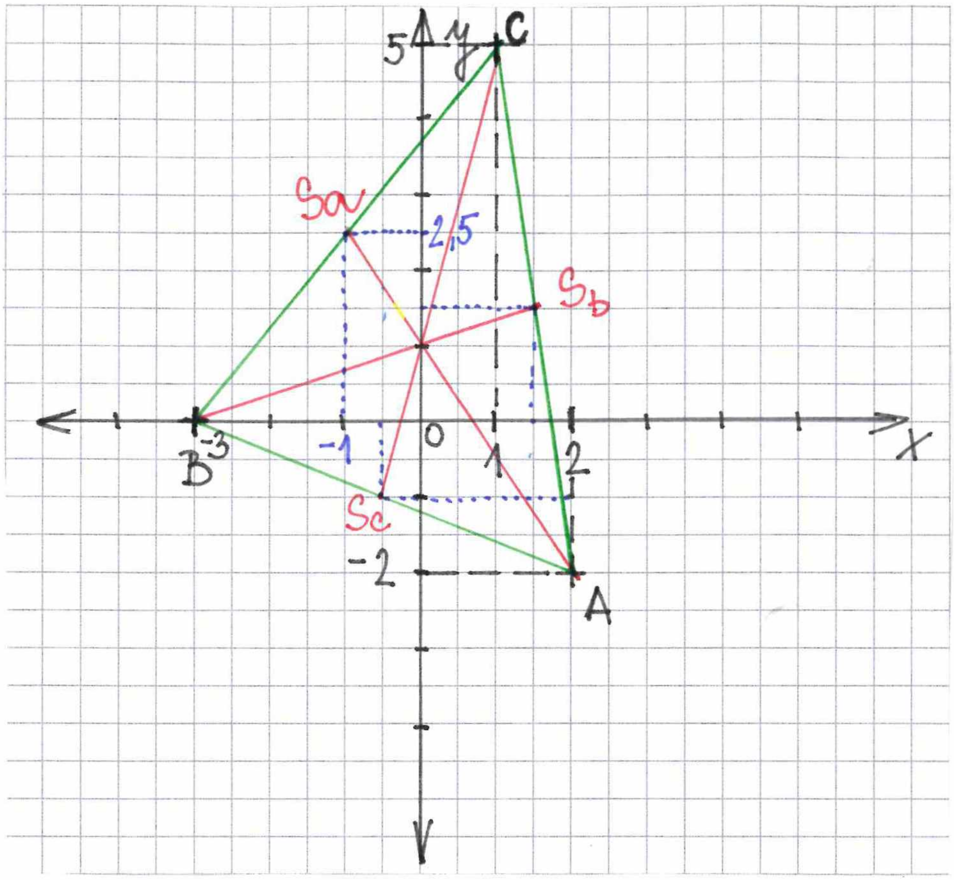
$x = 3 \cdot (-1) + 4$

$x = -3 + 4$

$\underline{\underline{x = 1}}$

Souřadnice PRŮSEČÍKU jsou $[1; -1]$

22. Jsou dány body $A[2; -2]$, $B[-3; 0]$, $C[1; 5]$. Napište obecné rovnice všech těžnic trojúhelníku ABC, vypočítejte těžiště trojúhelníku jako průsečík dvou z nich a ověřte, že těžištěm prochází i třetí těžnice.



- Těžnice Δ je úsečka, která spojuje vrchol Δ se středem protěj. strany. Jejich průsečík tvoří těžiště.
- rovnice všech těžnic
- rovnice těžiště

- $Sa\,[sa_x ; sa_y]$ je to střed BC

$$\left.\begin{aligned} sa_x &= \frac{b_x + c_x}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1 \\ sa_y &= \frac{b_y + c_y}{2} = \frac{0+5}{2} = 2,5 \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{Sa\,[-1; 2,5]}}$$

- ta .... těžnice na stranu a je dána body A a Sa

$$\vec{u} = \overrightarrow{ASa} = Sa - A = (-3; 4,5) \text{ směrový vektor}$$

$$ta: \quad \underline{X = A + t\cdot\vec{u}} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$x = 2 - 3t$$

$$\underline{y = -2 + 4,5t} \quad |\cdot 2$$

$$3x = 6 - 9t$$

$$\underline{2y = -4 + 9t} \qquad \Rightarrow \quad \underline{ta: 3x + 2y - 2 = 0}$$

- $S_b\,[s_{bx}\,;\,s_{by}]$ je střed AC

$$\left.\begin{aligned} s_{bx} &= \frac{a_x + c_x}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \\ s_{by} &= \frac{a_y + c_y}{2} = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \end{aligned}\right\}\ \underline{\underline{S_b[\,1{,}5\,;\,1{,}5\,]}}$$

- t_b ... těžnice na stranu b je dána body B a S_b

$\vec{v} = \overrightarrow{BS_b} = S_b - B = (4{,}5\,;\,1{,}5)$ ... směrový vektor

t_b: $\underline{X = B + t\cdot\vec{v}\ ;\quad t \in R}$

$$\begin{aligned} x &= -3 + 4{,}5t \\ y &= 0 + 1{,}5t \quad /\cdot(-3) \\ \hline x &= -3 + 4{,}5t \\ -3y &= -\ 4{,}5t \\ \hline \end{aligned}$$

t_b: $\underline{\underline{x - 3y + 3 = 0}}$

- $S_c\,[\,s_{cx}\,;\,s_{cy}]$ je střed AB

$$\left.\begin{aligned} s_{cx} &= \frac{a_x + b_x}{2} = \frac{2+(-3)}{2} = \frac{2-3}{2} = \frac{-1}{2} = -0{,}5 \\ s_{cy} &= \frac{a_y + b_y}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 \end{aligned}\right\}\ \underline{\underline{S_c[-0{,}5\,;-1}}$$

t_c .... těžnice na stranu c je dána body C a S_c

$\vec{w} = \overrightarrow{C\cdot S_c} = S_c - C = (-1{,}5\,;\,-6)$ .... směrový vektor

$$t_c: \quad \underline{X = C + t\cdot\vec{w},} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$x = 1 - 1{,}5t \quad /\cdot(-4)$$
$$y = 5 - 6t$$

$$-4x = -4 + 6t$$
$$y = 5 - 6t$$

$$-4x + y - 1 = 0$$

$$t_c: \quad \underline{\underline{4x - y + 1 = 0}}$$

Těžiště $\bigcirc\!\!\!\!\!T$ je průsečíkem těžnic t_a, t_b, t_c

$$t_a: 3x + 2y - 2 = 0$$
$$t_b: x - 3y + 3 = 0 \Rightarrow x = 3y - 3$$

$$3(3y-3) + 2y - 2 = 0$$
$$9y - 9 + 2y - 2 = 0$$
$$11y - 11 = 0$$
$$y = 1$$

$$x = 3\cdot 1 - 3$$
$$x = 0$$

$$\underline{\underline{T[0;1]}}$$

Ověříme že těžištěm prochází i třetí těžnice t_c.

$$t_c: 4x - y + 1 = 0$$

- dosadíme souřadnice těžiště $T[0;1]$

$$4\cdot 0 - 1 + 1 = 0$$
$$0 = 0$$

✓ platí

23. Napište rovnici kružnice, která má střed na ose y a prochází body $A[2;\ a_2]$, $B[-4;\ b_2]$ ležící na přímce $p: x - 2y - 6 = 0$.

1) Dopočítame souradnica:

$A \in p$

$$p: x-2y-6=0$$
$$2-2\cdot a_2-6=0$$
$$-2a_2=4$$
$$a_2=-2$$

$A[2;-2]$

$B \in p$

$$p: x-2y-6=0$$
$$-4-2\cdot b_2-6=0$$
$$-2b_2=10$$
$$b_2=-5$$

$B[-4;-5]$

2) středová rovnice kružnica k

$$k: (x-s_x)^2+(y-s_y)^2=r^2$$

$S[s_x, s_y]$ ... střed

$S[0; s_y]$ ... leží na ose y

r ... poloměr kruž.

$$A \in k: (2-0)^2+(-2-s_y)^2=r^2$$
$$4+4+4s_y+s_y^2=r^2$$
$$s_y^2+4s_y+8=r^2$$

$$B \in k: (-4-0)^2+(-5-s_y)^2=r^2$$
$$16+25+10s_y+s_y^2=r^2$$
$$s_y^2+10s_y+41=r^2$$

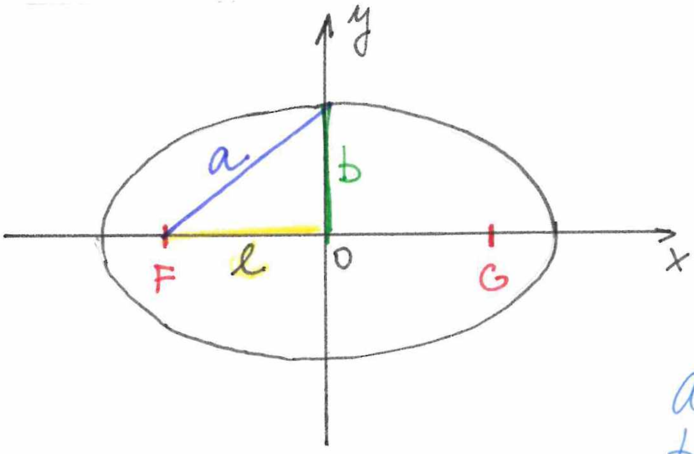
$$r^2=r^2$$
$$\cancel{s_y^2}+4s_y+8=\cancel{s_y^2}+10s_y+41$$
$$0=6s_y+33$$
$$s_y=-\frac{33}{6}=-\frac{11}{2}$$

dosadíme do $s_y^2+4s_y+8=r^2$

$$\left(-\frac{11}{2}\right)^2+4\cdot\left(-\frac{11}{2}\right)+8=r^2$$
$$\frac{121}{4}+(-22)+8=4r^2 \quad /\cdot 4$$
$$121-88+32=4r^2$$
$$r^2=\frac{65}{4}$$

$$k: x^2+\left(y+\frac{11}{2}\right)=\frac{65}{4}$$

24. Určete průsečíky přímky dané rovnicí $4x + 5y = 140$ s elipsou, která má rovnici $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{400} = 1$, a napište rovnice tečen elipsy v těchto průsečících.



pro $S[0;0]$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a .... hlavní poloosa
b .... vedlejší poloosa
e ... excentricita

F, G ..... ohniska

$p: 4x + 5y = 140$
elipsa: $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{400} = 1$

} soustava souřadnic ⇒ průsečíky

$5y = 140 - 4x \quad /:5$

$y = \frac{140}{5} - \frac{4}{5}x \Rightarrow \underline{y = -\frac{4}{5}x + 28}$ dosadíme do druhé rovnice elip.

$$\frac{x^2}{625} + \frac{(28 - \frac{4}{5}x)^2}{400} = 1$$

$$\frac{x^2}{625} + \frac{784 - \frac{224}{5}x + \frac{16}{25}x^2}{400} = 1 \quad /\cdot 10\,000$$

$$16x^2 + 25\left(784 - \frac{224}{5}x + \frac{16}{25}x^2\right) = 10000$$

$$16x^2 + 19600 - 1120x + 16x^2 = 10\,000$$

$$32x^2 - 1120x + 9600 = 0 \quad /:32$$

$$\underline{x^2 - 35x + 300 = 0}$$

- pomocí diskriminantu zjistíme $x_1; x_2$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{(-35)^2-4\cdot 1\cdot 300}}{2\cdot 1} = \frac{35 \pm \sqrt{1225-1200}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{35 \pm 5}{2} = \begin{cases} \underline{x_1 = 20} \\ \underline{x_2 = 15} \end{cases}$$

Dosadím: a dopoč. y

$$x_1 = 20 \Rightarrow y_1 = \frac{-4\cdot 20}{5} + 28 = 12 \qquad \underline{\underline{T_1[20; 12]}}$$

$$x_2 = 15 \Rightarrow y_2 = \frac{-4\cdot 15}{5} + 28 = 16 \qquad \underline{\underline{T_2[15; 16]}}$$

tečna v $T[x_0; y_0]$, jestliže elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x_0\cdot x}{a^2} + \frac{y_0\cdot y}{b^2} = 1$$

$$t_{T_1}: \quad \frac{20\cdot x}{625} + \frac{12\cdot y}{400} = 1 \,/\cdot 10000$$

$$320x + 300y = 10\,000 \,/:20$$

$$\underline{\underline{16x + 15y - 500 = 0}}$$

$$t_{T_2}: \quad \frac{15\cdot x}{625} + \frac{16y}{400} = 1 \,/\cdot 10000$$

$$240x + 400y = 10000$$

$$\underline{\underline{3x + 5y - 125 = 0}}$$

18. KOMBINATORIKA na ZŠ a SŠ

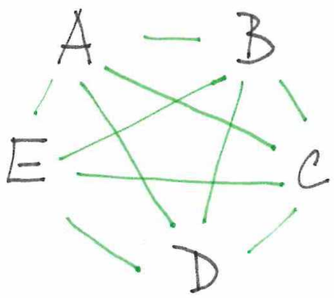
kombinatorika – je to, že zkoumáme počet způsobů jak se dá realizovat nějaká věc.

18. Kombinatorika na základní a střední škole.

Úlohy řešte: a) prostředky žáka ZŠ (grafické znázornění, užití pravidla součtu a součinu),
b) prostředky žáka SŠ (užití vzorců).

25. Pět dětí, Adam, Bára, Cilka, David, Eda, hrají tenis každý s každým. Kolik zápasů celkem sehrají?

a) PROSTŘEDKY ŽÁKA ZŠ:



Celkem sehrají 10 zápasů

b) PROSTŘEDKY ŽÁKA SŠ:

- kombinace „bez opakování" – vybíráme z množiny o n prvcích skupiny o k prvcích, ve kterých se žádný prvek neopakuje a nezáleží na pořadí výběru.

$K(k; n)$

platí $K(k, n) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad ; \binom{n}{1} = n \quad ; \binom{n}{0} = 1 \quad ; \binom{n}{n} = 1$$

celkem ..... 5 dětí
vybíráme dvojice

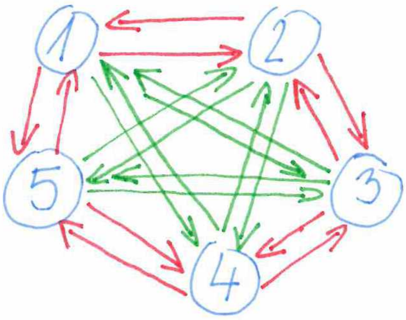
$$K(k;n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} =$$

$$= \frac{5\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{3}\cdot 2\cdot \cancel{1}} = \frac{10}{1} = \underline{\underline{10}}$$

Celkem sehrají 10 zápasů.

26. Pět dětí posílá zprávu SMS každý každému. Kolik SMS si celkem pošlou?

a) PROSTŘEDKY žáka ZŠ



10 červ
10 zel } celkem $10+10=\underline{\underline{20}}$

Celkem si pošlou 20 SMS.

b) PROSTŘEDKY žáka SŠ

celkem .... 5 dětí
každý každému ⇒ každá dvojice bude 2x

n 5
k .... 2 → bude 2x

$$K(k;n) - 2\cdot\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow 2\cdot\binom{5}{2} = 2\cdot\frac{5!}{2!(\underbrace{5!-2!}_{3!})} = 2\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 2\cdot 10$$

$$= \underline{\underline{20}}$$

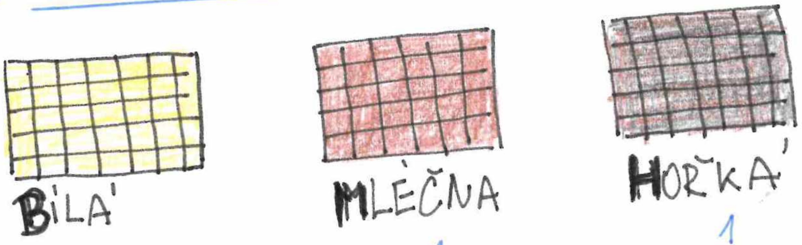
Celkem si pošlou 20 SMS.

27. U stánku prodávají tři druhy čokolád a my máme koupit pět čokolád. Kolik máme možností nákupu?

a) PROSTŘEDKY žáka ZŠ

– kupujeme 5 čokolád

Kolik máme možnosti?



1 1 1

BBBBB MMMMM HHHHH ⇒ JEDNO DRUHOVÉ

DVOU DRUHOVÉ

BBBBM
BBBMM
BBMMM
BMMMM } 4

BBBMH
BBMMH
BMMMH } 3

MMMMH
MMMHH
MMHHH
MHHHH } 4

HHHHB
HHHBB
HHBBB
HBBBB } 4

TŘÍ DRUHOVÉ

BBBMH
BBMMH
BMMMH } 3

BBMHH
BBMHH } 2

BMHHHH → 1

1 druh čokol = 3
2 druhy čokol = 3·4 = 12
3 druhy čokol = 3+2+1 = 6
celkem = 3+12+6 = 21

Celkem máme 21 možností.

b) PROSTŘEDKY žáka SŠ

- kombinace **s opakováním** - vybírám z množiny **n** prvků skupiny o **k** prvcích, prvky se mohou **opakovat** a nezáleží na pořadí výběru.

$K'(k;n)$ platí $K'(k;n) = \binom{n+k-1}{k}$

máme: 3 druhy čok. a vybíráme 5 čokol.

$k \dots 5$
$n \dots 3$

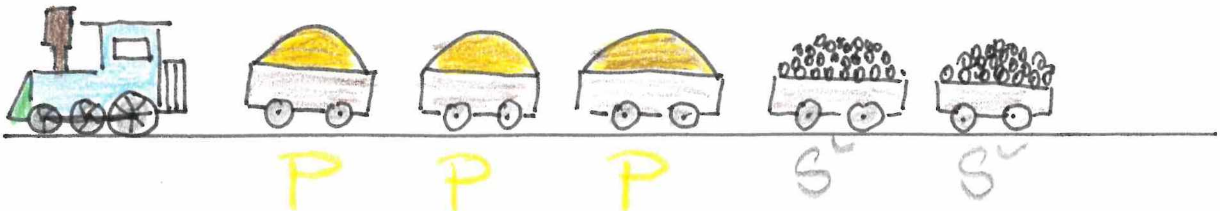
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$K'(5,3) = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} =$$

$$= \frac{7\cdot\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = \frac{7\cdot3}{1} = \underline{\underline{21}}$$

Celkem máme 21 možností.

28. Kolika způsoby můžeme za lokomotivu zařadit pět vagónů, z toho jsou tři vagony s pískem a dva vagony se štěrkem.



a) PROSTŘEDKY žáka ZŠ

PPPŠŠ
PPŠPŠ
PŠPPŠ
ŠPPPŠ
ŠPPŠP
ŠPŠPP
ŠŠPPP
PŠŠPP
PŠPŠP
PPŠŠP

celkem 10 možností

b) PROSTŘEDKY žáka SŠ

- permutace s OPAKOVÁNÍM – nevybíráme jen řadíme, záleží na pořadí, prvky se opakují. n skupin & počet prvků ve skupině k_i, $i \in 1,\dots,n$

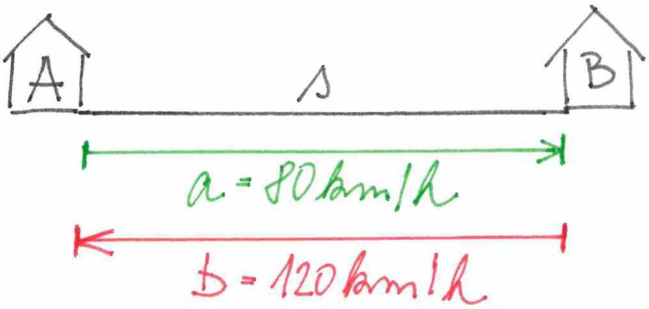
$$P'(k_1, k_2, \dots k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1!\,k_2!\,\dots\,k_n!}$$

$$P'(3;2) = \frac{(3+2)!}{3!\,2!} = \frac{5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = \underline{\underline{10}}$$

19. PRAVDĚPODOBNOST a STATISTIKA

19. Pravděpodobnost a statistika ve školské matematice.

29. Určete průměrnou rychlost automobilu, které jede z místa A do místa B stálou rychlostí *a* = 80 *km/h* a zpět z místa B do místa A stálou rychlostí *b* = 120 *km/h*.



$v_\varnothing = ?$

$s = v \cdot t$

$v = s / t$

$t = s / v$

$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s}{80}$

$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s}{120}$

$$v_\varnothing = \frac{2 \cdot s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{80} + \frac{s}{120}} = \frac{2s}{\frac{3s+2s}{240}} = \frac{2s}{\frac{5s}{240}}$$

$$v_\varnothing = \frac{\overset{48}{\cancel{240}} \cdot 2\cancel{s}}{\cancel{5}\cancel{s}} = \underline{\underline{96 \text{ km/h}}}$$

30. Dva kamarádi Adam a Petr závodili, kdo je lepší střelec ze vzduchovky. Každý měl celkem 5 pokusů. Adam střelil: 6, 7, 4, 5, 3. Petr střelil: 10, 3, 1, 5, 6. Rozhodněte, kdo vyhrál.

Adam střílil 6, 7, 4, 5, 3

Petr střílil 10, 3, 1, 5, 6

Kdo vyhrál?

• Důležitá otázka jaké jsou PRAVIDLA?

1) SOUČET BODŮ:

Adam $= 6+7+4+5+3 = 25$

Petr $= 10+3+1+5+6 = 25$

} stejný počet!

2) KDYŽ ŠKRTNEME nejlepší a nejhorší pokus

Adam $= 6+\cancel{7}+4+5+\cancel{3} = 15$

Petr $= \cancel{10}+3+\cancel{1}+5+6 = 14$

} vyhrál Adam

3) ARITMETICKÝ PRŮMĚR ⇒ nepoužijeme vážený prů: protože váhy bodů jsou stejné! Jinak bychom použili vážený průměr.

$$\bar{X}_A = \frac{6+7+4+5+3}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\bar{X}_P = \frac{10+3+1+5+6}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

Rozptyl - vyjadřuje variabilitu rozdělení souboru hodnot kolem její střední hodnoty (arit. průměr zde)

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - E(x)\right)^2$$

Adam:

$$S_A^2 = \frac{1 \cdot (6-5)^2+(7-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(3-5)^2}{5} = \frac{1+4+1+0+4}{5} = \underline{\underline{2}}$$

Petr:

$$S_P^2 = \frac{1\cdot(10-5)^2+(3-5)^2+(1-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2}{5} = \frac{25+4+16+0+1}{5} = \underline{\underline{9,2}}$$

- směrodatná odchylka = říká nám nakolik se od sebe navzájem liší jednotlivé hodnoty souboru

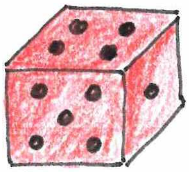
$$S = \sqrt{S^2}$$

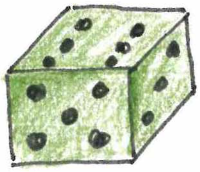
$$S_A = \sqrt{S_A^2} = \sqrt{2} \doteq \boxed{1,41}$$

$$S_P = \sqrt{S_P^2} = \sqrt{9,2} \doteq 3,23$$

Lepší střelec a tím i vyhrál je Adam, protože se jeho hodnoty pohybují blíže kolem průměru.

31. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma rozlišitelnými hracími kostkami padne součet 8?





$P = \frac{m}{n}$, m .. počet příznivých výsledků

n ... počet možných výsledků

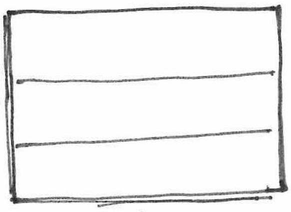
2	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
3	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
4	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
5	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
6	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
7	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6
		8	9	10	11	12

$P = \frac{5}{\underset{6 \cdot 6}{36}} \doteq \underline{\underline{0,14}}$

32. Státní vlajka se skládá ze tří vodorovných pruhů. K dispozici jsou barvy: bílá, červená, modrá, zelená, žlutá. Jaká je pravděpodobnost, že

a) při losování vlajek si vybereme tu vlajku, která má modrý pruh uprostřed

b) při losování si vybereme vlajku, která má modrý pruh



vlajka

k dispozici barvy:

☐	🟥	🟦	🟩	🟨
B	Č	M	Z	ŽV

a) pravděpodobnost, že vlajka má modrý pruh uprostřed?$_2$

$P(a) = \frac{m(a)}{n}$ kde ... a ... je jev

n ... počet možných výsled

⇒ vybíráme 3 barvy z 5 barev,
záleží na pořadí, NEOPAKUJÍ SE ⇒
„VARIACE bez opakování"

$$V(k;n) = n\cdot(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$n = V(3;5) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = \underline{\underline{60}}$$

60 možností

m(a) ... počet příznivých výsledků = modrá uprostřed, zbytek vybírám 2 barvy ze 4 zbylých.

$$m(a) = V(2;4) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = \underline{\underline{12 \text{ možnost}}}$$

$$P(a) = \frac{m(a)}{n} = \frac{12}{60} = \underline{\underline{0,2}}$$

b) pravděpodobnost, že vybereme vlajku, která má modrý pruh?

$$P(b) = \frac{m(b)}{n}$$

b .... jev
n ... počet možností z příkl. a) ⇒ 60

m(b) ... modrá je nahoře, uprostřed nebo dole ⇒

$m(b) = 3\cdot m(a) = 3\cdot 12 = 36$ ... pravidlo součtu (nahoře + uprostřed + dole)

$$P(b) = \frac{36}{60} = \underline{\underline{0,6}}$$

20. Historie matematiky, možnosti využití historických poznámek k motivaci učiva.

33. Diofantův epitaf:

Zde tento náhrobek přikrývá Diofanta – zázrak na pohled! Aritmetickým uměním sděluje kámen jeho věk. Šestinu života popřál mu Bůh být chlapcem, když pak dvanáctina uplynula, nechal mu vyrašit vous. Ještě sedmina, tu rozžehl mu svatební pochodeň, a pět let nato mu dal synáčka. Běda nešťastné dítě! Dosáhlo teprve poloviny otcova věku, když přijal ho Hádes, ten strašný. Ještě čtyři roky snášel Diofantos bolest, žije vědě. A nyní řekni věk, kterého dosáhl.

$\frac{1}{6}$ života .... chlapec

$\frac{1}{6} + \frac{1}{12}$ ..... vousy

$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7}$ .... svatba

$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + 5$ .... syn ... zemřel, když mu bylo $\frac{1}{2}$ věku otce

+4 roky života po synovi smrti

celkem .... x let

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

$$9 + \frac{9x}{12} + \frac{x}{7} = x \quad / \cdot 84$$

$$84 \cdot 9 + 84 \cdot \frac{9x}{12} + 84 \cdot \frac{x}{7} = 84x$$

$$756 + 7 \cdot 9x + 12x = 84x$$

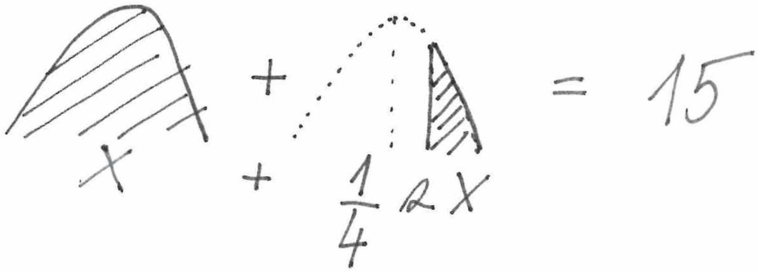
$$756 + 63x + 12x = 84x \quad / -63x, -12x$$

$$756 = 9x \quad / 756$$

$$x = \underline{\underline{84}}$$

Diofanta se dožil 84 let.

34. Rhindův papyrus, starověký Egypt, přibližně 1650 př. n. l.: *Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15.* V papyru jsou úlohy řešeny metodou falešného (chybného) předpokladu.



- $x + \frac{x}{4} = 15 \quad / \cdot 4$

  $4x + x = 4 \cdot 15$

  $5x = 60 \quad / : 5$

  $\underline{\underline{x = 12}}$

- metoda falešného (chybného) předpokladu:

  $x + \frac{x}{4} = 15$

  $x = 4 \quad 4 + \frac{4}{4} = 5 \quad \big) \cdot 3$

  $x = 3 \cdot 4 = \underline{\underline{12}} \quad 12 + \frac{12}{4} = 15$ ✓

- $x = 20 \quad 20 + \frac{20}{4} = 20 + 5 = 25$

  $x = 24 \quad 24 + \frac{24}{4} = 24 + 6 = 30$ což je 2x víc než 15

  $\vdots$

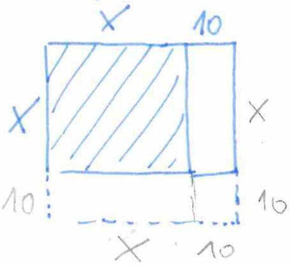
  $\underline{\underline{x = 12}} \quad 12 + \frac{12}{4} = 12 + 3 = 15$ ✓

35. Geometrickými prostředky řešte (geometrická algebra Řeků):

a) $x^2 + 10x = 39$,

b) $x^2 + 8x = 65$.

a) $x^2 + 10x = 39$ doplněním na čtverec



$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$
$$(x+5)^2 = 64$$
$$x + 5 = \sqrt{64} \quad /$$
$$x + 5 = 8 \quad /-5$$
$$\underline{\underline{x = 3}}$$

Pozn: jen kladné výsledky

b) $x^2 + 8x = 65$

$$x^2 + 8x + 16 = 65 + 16$$
$$(x+4)^2 = 81 \quad /\sqrt{\ }$$
$$x + 4 = \sqrt{81}$$
$$x + 4 = 9 \quad /-4$$
$$\underline{\underline{x = 5}}$$

36. Bhaskary, staroindický matematik, 12. stol.:

Najděte číslo, pro které platí: Když číslo vynásobíme třemi, tento součin zvětšíte o tři čtvrtiny tohoto součinu, pak to vydělíte sedmi, zmenšíte o jednu třetinu podílu, co vám vyjde, vynásobíte samo sebou, zmenšíte o 52, výsledek odmocníte, přičtete 8 a nakonec dělíte deseti a vyjde vám číslo 2.

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{3x + \frac{3}{4} \cdot 3x}{7} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 - 52 + 8}}{10} = 2 \quad / \cdot 10, -8$$

$$\sqrt{\left(\frac{3x + \frac{9x}{4}}{7} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 - 52} = 12 \quad /^2$$

$$\left(\frac{\overset{3}{\cancel{21}}x}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \frac{1}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\right)^2 - 52 = 144$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 52 = 144 \quad / +52$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 196 \quad /$$

$$\frac{x}{2} = \sqrt{196} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = 14 \quad / \cdot 2$$

$$\underline{\underline{x = 28}}$$