Tenkrát na Západě

Příliš bujarý bál

Do městečka Stetson City přijel jednoho letního dne roku 1895 dealer firmy Smith&Wesson a nabízel zbrusu nové revolvery včetně opasku s pouzdrem. Agent byl velmi výřečný, takže každý dospělý muž si tento výrobek zakoupil. Následující den se ovšem v městečku konal ples a jak se patřilo, všichni muži si opasky se zbraní odložili v šatně. Bál se vskutku vydařil, zábava byla nádherná, whisky tekla proudem, to však byl kámen úrazu, neboť muži si v alkoholovém opojení navzájem roztrhali šatnové lístky.[1] V důsledku této nepředloženosti si museli chlapi brát své věci ze šatny čistě náhodně, neboť vzhledem k zánovnosti zbraní byly všechny prakticky stejné a nešly od sebe rozlišit. Otázka zní následovně: je vůbec nějaká šance, že aspoň někteří muži dostali zpět svoji zbraň?

Řešení tohoto zapeklitého problému však příliš těžké není. Víme, že si kolty do šatny odložilo n mužů. Budeme hledat pravděpodobnost, že aspoň jeden muž dostane svou zbraň. Označme písmenem P_i skutečnost, že $i-$ tý muž dostal zpět svou zbraň. Hledáme pravděpodobnost sjednocení jevů, že $\bigcup P_i$, $i = 1, 2 \ldots, n$. Jelikož se jevy vzájemně nevylučují nutno použít vzorec

$$p(\bigcup P_i) = \sum p(P_i) - \sum p(P_i \cup P_j) + \sum p(P_i \cup P_j \cup P_k) - \cdots ,$$

kde všechny indexy jsou opět od jedničky po n a samozřejmě navzájem různé.

Jaká je však pravděpodobnost, že z celkového počtu právě m mužů získalo své zbraně. Počet případů možných je $n!$, počet případů příznivých pak $(n-m)!$, tedy pravděpodobnost je

$$\frac{(n-m)!}{n!}$$

Vzhledem k tomu, že skupinu o m lidech lze z celkového počtu vybrat $\binom{n}{m}$ způsoby, je $m-$ tý sčítanec ve vzorci roven

$$\binom{n}{m}\frac{(n-m)!}{n!} = \frac{1}{m!}.$$

Je tedy

$$p(\bigcup P_i) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots \pm \frac{1}{n!},$$

kde znaménko $+$ je pro liché n a znaménko $-$ pro sudé n.

Tušíme již, že je-li počet návštěvníků větší, pak pravděpodobnost toho, že každý muž dostane zpět svůj opasek se příliš měnit nebude. Pokusme se ještě získaný vztah vyjádřit jednodušeji. Vzpomeneme-li si na rozvoj elementárních funkcí pomocí mocninných řad, zajisté nám přijde na mysl, že platí

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

[1] Souvislost s obdobným případem, který se udál kdes na Moravě o několik desetiletí později, kdy si alkoholem povzbuzení zubaři navzájem vytrhli po zubu, není prokázána.

Volíme-li $x = 1$ a je-li n dostatečně velké dostaneme, pro hledanou pravděpodobnost poměrně jednoduchý výraz

$$p(\bigcup P_i) = 1 - \frac{1}{e}.$$

Snadno se zjistí, že pro $n \geq 10$ je pravděpodobnost získání své věci přibližně 63%, čímž ovšem nenabádáme čtenáře, aby nedávali pozor na šatnové lístky.

Bankéř má k dispozici 3 kostky, červenou, modrou a žlutou. Na kostkách nejsou čísla klasická, ale poněkud zvláštní. Na kostce červené jsou po dvou čísla 1,5,9, na modré 2,6,7 a na žluté 3,4,8. Pravidla hry jsou jednoduchá: Jak bankéř, tak hráč hodí kostkou různé barvy, přičemž vyhrává ten, kdo má na kostce větší číslo a vítěz si připíše bod. Vítězem se stává ten, kdo jako první dosáhne 10 bodů. Bankéř v rozporu s očekáváním nabídne hráči, aby si sám zvolil barvu kostky. Za několik týdnů bankéř dosáhl značného jmění, padlo na něj tedy podezření, že hraje falešně. Kontrola však zjistila, že kostky jsou naprosto regulérní a že tudíž bankéř je miláčkem štěstěny. Je to však pravda?

Rozeberme si jednotlivé situace. Jaké jsou možnosti červené kostky proti modré? Jelikož kostky jsou regulérní, je pravděpodobnost padnutí libovolného čísla $\frac{1}{3}$.

č/m	2	6	7
1	m	m	m
5	č	m	m
9	č	č	č

ž/č	1	5	9
3	ž	č	č
4	ž	č	č
8	ž	č	č

m/ž	3	4	8
2	ž	ž	ž
6	m	m	ž
7	m	m	ž

Je jasné, že bankéř je pěkně fikaný. Kdo této hře rozumí, tak ví, že první volba je nevýhoda. Bankéř si prostě zvolí tu barvu, která je proti hráči výhodnější. A jelikož bude sehráno 10 až 19 her, tak je zřejmé, že se tato převaha projeví.

Tímto náš příběh ovšem ještě nekončí. Pan John Edward Goldsmith vyzval našeho bankéře na souboj s tím, že si sice ponechá právo první volby, avšak hra bude jednorázová, tedy po každém hodu vítěz obdrží od poraženého jeden dolar. Bankéř na to bez problémů přistoupil a dohodli se, že se tento souboj uskuteční v sobotu v herně Trigger Whisky saloonu. Pan Goldsmith se dostavil ve fraku a s naditou prkenicí, kdežto bankéř měl u sebe pouhých dvacet dolarů, neboť ostatní peníze již investoval. Přesto se lidem, kteří šli na ranní mši naskytl zajímavý pohled, neboť viděli, jak se ulicemi pohybuje postava oděná jen v trenýrkách a v klobouku, v níž byl při bližším pohledu seznán pan Goldsmith. Tomu nemohli obyvatelé Stetson City ani uvěřit, ani porozumět, my se však o vysvětlení pokusíme.

Peníze pana Goldsmitha označíme A a pravděpodobnost jeho výhry p. Bankéřovu částku označme B a pravděpodobnost jeho výhry je $q = 1-p$. Celkový objem peněz je $N = A + B$. Označme dále pravděpodobnost zruinování hráče z počátečního vztahu i jako x_i, kde i je částka, kterou máte v tom okamžiku k dispozici. Dejme tomu, že $N = 5$ a budeme se nacházet ve stavu 2. Pak máme

$$x_2 = px_3 + qx_1,$$

což se dá psát také jako

$$(p+q)x_2 = px_3 + qx_1,$$

dále je

$$p(x_2 - x_3) = q(x_1 - x_3)$$

a konečně

$$x_1 - x_2 = r(x_2 - x_3),$$

kde $r = \frac{p}{q}$. Tyto rovnice napíšeme pro každý vnitřní vztah. Jelikož je $x_0 = 1$ a $x_5 = 0$, lze tyto rovnice zjednodušit

$$x_4 = 1x_4$$

$$x_3 - x_4 = rx_4$$

$$x_2 - x_3 = r^2 x_4$$

$$x_1 - x_2 = r^3 x_4$$

$$x_0 - x_1 = r^4 x_4$$

Jejich sečtením obdržíme

$$x_0 = (1 + r + r^2 + r^3 + r^4)x_4$$

Vynásobíme-li obě strany rovnice výrazem $1 - r$, obdržíme

$$x_4 = \frac{1-r}{1-r^5}$$

Součet prvních dvou rovnic dává $x_3 = (1+r)x_4$, ze součtu prvních tří rovnic dostaneme x_2 a ze součtu prvních čtyř rovnic x_1. Konečné řešení je tedy

$$x_1 = \frac{1-r^4}{1-r^5}, x_2 = \frac{1-r^3}{1-r^5} x_3 = \frac{1-r^2}{1-r^5}, x_4 = \frac{1-r}{1-r^5}$$

Stejným způsobem můžeme postupovat pro libovolné N, takže dostaneme obecný vzorec

$$x_A = \frac{1-r^B}{1-r^N}$$

Upozorňujeme, že tento příklad není vhodný pro osoby mladší patnácti let a pro lidi s chatrnou nervovou soustavou. Nejdříve si představíme zúčastněné osoby. Začneme dámou. Je to Winnifred Jennings, stáří 19 let, míry 92-60-91, nejkrásnější dívka ve Stetson City a okolí. Jelikož má bohaté rodiče, lze očekávat i pěkné věno. Tato dívka je sice příčinou dalších událostí, ale jelikož se v jich aktivně neúčastní, nebudeme ji nijkak označovat. Dalším je John Adams, male, věk 24 let, syn J. R. Adamse, jednoho z nejbohatších farmářů Arizony. Vzplanul láskou k Winnifred. Je konzument Kollalokovy limonády. Označíme ho písmenem A, pravděpodobnost, že trefí je $p(A) = 1$. Další zúčastněnou osobou je Dough Badman jr., věk 29 let.

Ačkoliv je synem majitele Trigger Whisky saloonu, tento nápoj popíjí střídmě a z pěti pokusů zasáhne cíl čtyřikrát. Také on ztratil hlavu pro Winnifred. Označíme ho písmenem B, pravděpodobnost, že zasáhne cíl je $p(B) = 0,8$. Konečně zde je Alfred Clarke, věk 21 let, který je zaměstnán jako honák krav (cowboy) u H. G. Morrisona, největšího konkurenta J. R. Adamse. Střelbu netrénuje, jednou se trefí, podruhé mine. I jemu Winnifred zlomila srdce. Bude označen písmenem C, pravděpodobnost zásahu je $p(C) = 0,5$. Kromě lásky k Winnifred mají tito pánové společné i to, že skvěle ovládají taktiku a strategii boje.

Všichni tři se rozhodli, že jako správní muži svedou o milovanou dívku trojsouboj (truel), jehož vítěz se s Winnifred ožení. Souboj bude probíhat tak, že všichni budou postupně střílet podle vylosovaného pořadí tak dlouho, až na bojišti zústane jedediný muž, který se tak stane vítězem. K velkému překvapení na bojišti zůstal ten nejslabší z nich. Sekundanti potvrdili, že souboj proběhl naprosto férově.

je tedy čas, abychom zjistili, zda bylo překvapení obyvatel Stetson City oprávněné. Jak už jsme řekli, střelci stříleli ve vylosovaném pořadí, bylo tady šest možností, a to ABC, ACB, BAC, BCA, CAB a CBA. Jak již bylo zmíněno, všichni byli takticky vyspělí. Střelec A musí nejdříve vyřadit střelce B, naopak B bude věnovat svou pozornost nejdříve A. C naopak nesmí do souboje zasáhnout, dokud jeden z jeho soupeřů neodpadne. Tím to se ovšem situace zjednoduší, neboť můžeme uvažovat jen dva případy.

Začíná-li A, je situace velmi jednoduchá. B se vydá nejbližším směrem k pohřebnímu ústavu. C buď s padesáti procentní úspěšností získá Winnifred nebo se se stejnou pravděpodobností vydá za B. Začíná-li B, je situace o něco složitější. Buď s pravděpodobností 0,á skolí A a pak bude bojovat bojovat o život s C. Tento souboj z matematického hlediska nemusí skončit, avšak lidský život má konečnou délku, takže bude v každém případě ukončen přirozenou smrtí jednoho z nich. Musíme také vzít v potaz skutečnost, že by ani trpělivost Winnifred by nebyla nekonečná a provdala by se za někoho úplně jiného. Do třetice musíme uvážit i fakt, že zásoby surovin pro výrobu střeliva a zbraní nejsou nevyčerpatelné. Resumé je tedy následující. A zvítězí jen v případě, že ho nezasáhne žádný ze soupeřů, jeho šance je tedy $0,2.0,5 = 0,1$. Šance B je

$$0,8.0,5.0,8 + 0,8.0,5.0,2.0,5.0,8 + \dots$$

Obdržíme tudíž nekonečnou geometrickou řadu, $a_1 = 0,32$ a $q = 0,1$, jejíž součet je $\frac{32}{90}$. No a na šanci C použijeme jev opačný, tedy$1 - 0,1 - \frac{32}{90} = \frac{49}{90}$.

Resumé je následující. A zvítězí s pravděpodobností $P = \frac{1}{2}(0,5 + 0,1) = \frac{27}{90}$, B má pravděpodobnost vítězství $P = \frac{1}{2}(0 + \frac{32}{90}) = \frac{16}{90}$ a C má pravděpodobnost $P = \frac{1}{2}(0,5 + \frac{49}{90}) = \frac{47}{90}$. Je třeba si uvědomit, že vzhledem k taktice C se nejedná o trojboj, nýbrž oba lepší střelci nejprve absolvují předkolo, s jehož vítězem se utká C s výhodou prvního výstřelu. Jeho šance je minimálně stejně velká jako je pravděpodobnost, že zasáhne cíl.