Analytická geometrie 1 – vektory

Petra Bušková

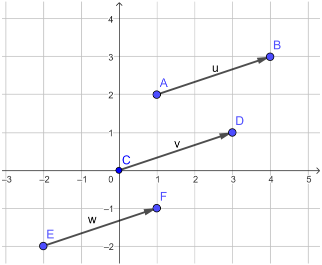
Podzim 2023

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU
Národní plán obnovy
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Vektor

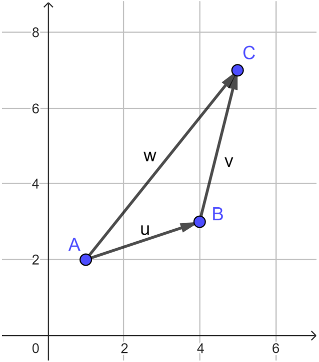
- množina všech orientovaných úseček, které mají stejnou **velikost** a stejný **směr**
- značíme malým písmenem s šipkou ($\vec{u}$) nebo tučným malým písmenem ($\mathbf{u}$)
- **nulový vektor** je množina všech nulových orientovaných úseček, značíme $\vec{o}$ (resp. $\mathbf{o}$)
- vektor $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ je určen počátečním bodem $A[a_1, a_2]$ a koncovým bodem $B[b_1, b_2]$



Platí $\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF}$

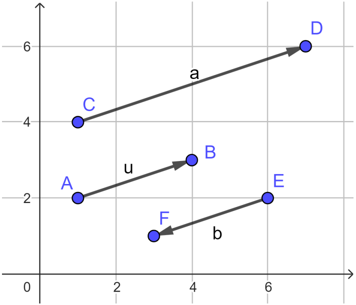
Sčítání vektorů

- sčítáme vždy odpovídající si souřadnice
  $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2), \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\vec{u} = B - A, \vec{v} = C - B, \vec{u} + \vec{v} = B - A + C - B = C - A = \vec{w}$



Násobení vektoru skalárem (číslem)

- násobíme každou souřadnici vektoru
  $\vec{u} = (u_1, u_2), k \in \mathbf{R}, k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$
- pro $k = -1$ získáváme vektor **opačný**
  $\vec{u} = (u_1, u_2), -\vec{u} = (-u_1, -u_2)$



$\vec{a} = 2\vec{u}, \vec{b} = -\vec{u}$

Lineární kombinace vektorů

Vektor $\vec{u}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}, \vec{b}$, jestliže jej můžeme zapsat ve tvaru $\vec{u} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b}$, kde $k, l \in \mathbf{R}$.

Příklad 1

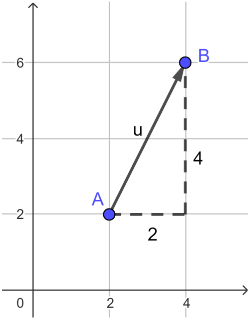
Zjistěte, zda je vektor $\vec{u} = (-2, 4, -6)$ lineární kombinací vektorů $\vec{a} = (1, 3, -2), \vec{b} = (2, 1, 1)$.

Příklad 2

Zapište vektor $\vec{u} = (7, -5)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{a} = (-1, -1), \vec{b} = (3, -1)$.

Velikost vektoru

Velikost vektoru $\vec{u}$ s počátečním bodem A a koncovým bodem B je rovna velikosti úsečky AB. Značíme $|\vec{u}|$.
Je-li $|\vec{u}| = 1$, nazýváme vektor $\vec{u}$ vektorem **jednotkovým**.



Pro vektor na obrázku platí
$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

$\vec{u} = (u_1, u_2), |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Skalární součin

Skalární součin dvou vektorů (značíme $\cdot$) je roven reálnému číslu.

$\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

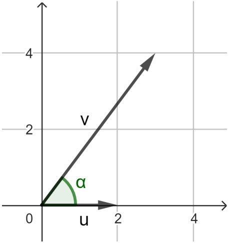
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Příklad 3

Nalezněte hodnotu parametru $a \in \mathbf{R}$ aby platilo, že skalární součin vektorů $\vec{u} = (7, -5, 2)$, $\vec{v} = (1, a, -1)$ je roven 1.

Úhel vektorů

Úhel dvou vektorů je vždy menší ze dvou úhlů, které svírají dané vektory (tedy nejvýše 180°).
Při odvození vzorce pro výpočet úhlu dvou vektorů posuneme tyto vektory do stejného počátečního bodu, a to do počátku souřadnic. Soustavu souřadnic pootočíme tak, aby jeden z vektorů ležel na kladné poloose x.
V takovém případě můžeme souřadnice vektorů popsat následovně:



$$\vec{u} = (|\vec{u}|, 0), \vec{v} = (|\vec{v}| \cdot \cos\alpha, |\vec{v}| \cdot \sin\alpha)$$

Vypočítáme skalární součin a upravíme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha + 0 \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Z vlastností funkce kosinus plyne, že dva vektory jsou na sebe **kolmé** právě tehdy, když je jejich **skalární součin roven nule**.

Příklady

Příklad 4

Nalezněte hodnotu parametru $a \in \mathbf{R}$ aby platilo, že vektory $\vec{u} = (3, 4, a)$, $\vec{v} = (-5, 2, 3)$ jsou na sebe kolmé.

Příklad 5

Určete pomocí vektorů velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, jestliže $A[1, 1]$, $B[2, -1]$, $C[3, 2]$.

Příklad 6

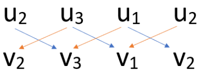
Určete pomocí skalárního součinu nějaký vektor $\vec{w}$, který je kolmý k oběma vektorům $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (3, 1, 1)$.

Vektorový součin

- výsledkem vektorového součinu (značíme $\times$) je vektor
- pro vektory ležící na jedné přímce je výsledkem nulový vektor
- pro vektory neležící na jedné přímce je výsledkem vektor, který je k oběma původním vektorům kolmý

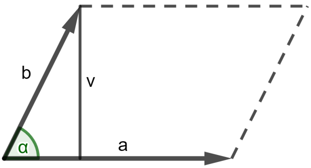
Pro $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ platí následující vlastnosti:
$|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$, kde α je úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$
$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{w}$

Je-li $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, pak
$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$



Obsah rovnoběžníku

Velikost vektorového součinu $\vec{c}$ vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ je rovna obsahu rovnoběžníku, který vektory $\vec{a}, \vec{b}$ vymezují.
Z definice vektorového součinu platí: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$, kde α je úhel vektorů $\vec{a}, \vec{b}$.



$\sin\alpha = \frac{v}{|\vec{b}|}$
$v = |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$
Při porovnání se vzorcem pro výpočet obsahu rovnoběžníku je zřejmé, že
$S = |\vec{a}| \cdot v = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha = |\vec{c}|$

Příklady

Příklad 7

Určete souřadnice a_2, a_3 vektoru $\vec{a}$ tak, aby platilo $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ kde $\vec{a} = (1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (3, 1, 1)$, $\vec{c} = (3, -4, -5)$.

Příklad 8

Určete pomocí vektorového součinu obsah trojúhelníku ABC, kde $A[1, 2, 3], B[-2, 3, 5], C[0, -2, 0]$.

Řešení příkladů

Příklad 1: Ano, $\vec{u} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$
Příklad 2: $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$
Příklad 3: $a = \frac{4}{5}$
Příklad 4: $a = \frac{7}{3}$
Příklad 5: $\alpha = 90°, \beta = \gamma = 45°$
Příklad 6: libovolný nenulový násobek vektoru $(-3, 5, 4)$
Příklad 7: $a_2 = 2, a_3 = -1$
Příklad 8: $S = \frac{3\sqrt{35}}{2}$