Analytická geometrie 2 – přímky

Petra Bušková

Podzim 2023

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU

Financováno Evropskou unií
NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Analytické vyjádření přímky

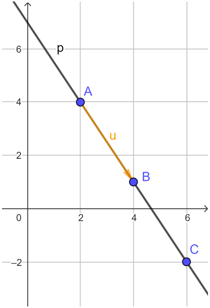
Přímku můžeme v analytické geometrii vyjádřit několika způsoby, z nichž dva nejdůležitější jsou:

- parametrické vyjádření přímky,
- obecná rovnice přímky.

Každé z těchto vyjádření má své výhody i nevýhody.
Obecná rovnice přímky působí jednodušeji, nemůžeme ji však využít v prostoru.
Parametrické vyjádření přímky se může zdát zdlouhavé, je však velmi intuitivní.

Parametrické vyjádření přímky

Parametrické vyjádření přímky pracuje s principem přičítání různých násobků **směrového vektoru** přímky k **bodu** ležícímu na přímce.
Směrový vektor přímky snadno získáme jako vektor určený dvěma body této přímky.
Do každého bodu přímky lze dospět přičtením určitého násobku směrového vektoru k předem danému bodu. Například na obrázku získáme bod C následovně: $C = A + 2 \cdot \vec{u}$.



$$p : X = A + t \cdot \vec{u} \qquad t \in \mathbf{R}$$

Omezením reálného parametru t omezíme také přímku, díky parametrickému vyjádření tedy můžeme popsat například **úsečku** AB.

Parametrické vyjádření přímky

Pro přímku v rovině s bodem $A[a_1, a_2]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (u_1, u_2)$ platí

$$\begin{aligned} p : x &= a_1 + t \cdot u_1 \\ y &= a_2 + t \cdot u_2 \qquad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Pro přímku v prostoru s bodem $A[a_1, a_2, a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ platí

$$\begin{aligned} p : x &= a_1 + t \cdot u_1 \\ y &= a_2 + t \cdot u_2 \\ z &= a_3 + t \cdot u_3 \qquad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Příklady

Příklad 1

Jsou dány body $A[3,5]$, $B[-1,6]$. Zapište pomocí parametrického vyjádření

a) přímku p danou body AB,

b) úsečku AB,

c) polopřímku AB,

d) polopřímku BA.

Příklad 2

Určete parametr $k \in \mathbf{R}$ tak, aby bod C ležel na přímce AB, kde $A[-1,3]$, $B[1,1]$. Zjistěte, zda bod C leží na úsečce AB, případně na polopřímce AB.

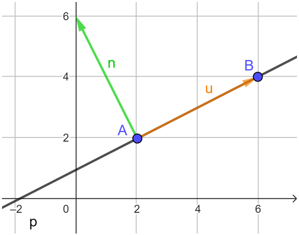
a) $C[3k, k+1]$,

b) $C[k+1, -k]$.

Obecná rovnice přímky

V obecné rovnici přímky se objevuje **normálový vektor** této přímky. Je to vektor, který je kolmý na směrový vektor přímky. Protože musí být tento vektor až na nenulový násobek jednoznačně daný, nelze využít obecnou rovnici přímky v prostoru.

$$p : ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbf{R}$$
$$\vec{n} = (a, b)$$



Pro přímku p na obrázku platí:
$\vec{u} = (4, 2), \vec{n} = (-2, 4)$
$p : -2x + 4y + c = 0$
Po dosazení některého bodu ležícího na přímce p dostáváme:
$p : -2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + c = 0 \to c = -4$
$p : -2x + 4y - 4 = 0$

Při hledání kolmého vektoru využíváme skutečnosti, že skalární součin dvou kolmých vektorů je roven nule.

Příklady

Příklad 3

Určete obecnou rovnici přímky p, na níž leží body $A[1,-5], B[0,3]$.

Příklad 4

Zjistěte, zda body $K[1,-2], L[-3,0]$ leží na přímce p určené body $A[2,-4], B[-1,2]$.

Příklad 5

Určete obecnou rovnici přímky p.

$$\begin{aligned} p : x &= -4 + 2t \\ y &= 1 - 5t \qquad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Příklad 6

Napište parametrické vyjádření přímky $p : 2x + 3y - 7 = 0$.

Vzájemná poloha dvou přímek

Dvě přímky mohou být v rovině **různoběžné** (1 průsečík), **rovnoběžné různé** (0 průsečíků), nebo **totožné** (nekonečně mnoho průsečíků).
V prostoru mohou být navíc **mimoběžné** (0 průsečíků, ale nejsou rovnoběžné).

Vektory rovnoběžných různých a totožných přímek (ať už směrové, nebo normálové) jsou až na nenulový násobek stejné. Vektory různoběžných a mimoběžných přímek jsou na sobě lineárně nezávislé.

Určujeme-li vzájemnou polohu dvou přímek, je vhodné nejdříve zjistit, zda jsou směrové vektory (resp. normálové vektory) přímek svým násobkem. Následně je třeba zkontrolovat průsečíky zkoumaných přímek. Obě přímky přitom můžeme, ale nemusíme mít vyjádřené stejným způsobem, tedy parametricky, nebo obecně.

Hledáme-li k dané přímce přímku rovnoběžnou, resp. kolmou, procházející daným bodem, můžeme přímo využít směrový či normálový vektor dané přímky.

Vzájemná poloha dvou přímek – příklad

Určeme vzájemnou polohu přímek p a q, jestliže $p: 4x - y - 11 = 0$,

$$\begin{aligned} q: x &= -2 + 2t \\ y &= 3 - 3t \qquad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Řešení:
Přímka p má normálový vektor $\vec{n} = (4, -1)$, přímka q má směrový vektor $\vec{u} = (2, -3)$. Pokud by byly přímky rovnoběžné různé nebo totožné, jejich směrové, resp. normálové vektory by byly svým násobkem.

Můžete například pomocí normálového vektoru přímky p nalézt směrový vektor této přímky a ověřit, zda jsou směrové vektory svým násobkem. Stejně tak ale platí, že pokud by směrové, resp. normálové vektory přímek byly svým násobkem, musel by také být směrový vektor jedné z přímek kolmý na normálový vektor druhé z nich.

Protože ale $\vec{n} \cdot \vec{u} = 8 + 3 = 11 \neq 0$, přímky p a q musí být **různoběžné**.

Vzájemná poloha dvou přímek – pokračování příkladu

Nyní potřebujeme nalézt průsečík přímek p, q. Jednou možností jeho hledání je zapsat přímku p parametricky a porovnat jednotlivé souřadnice, případně zapsat přímku q obecně a vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Úlohu lze ale řešit i tak, že z parametrického vyjádření přímky q dosadíme do obecného vyjádření přímky p a spočítáme hodnotu parametru t.

$$\begin{aligned} 4(-2+2t)-(3-3t)-11 &= 0 \\ -8+8t-3+3t-11 &= 0 \\ 11t &= 22 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Následným dosazením parametru t do vyjádření přímky q získáváme **průsečík** $P[2;-3]$.

Příklady

Příklad 7

Určete vzájemnou polohu přímek p, q. Jsou-li přímky různoběžné, nalezněte jejich průsečík.

$p: x = 2 - t, \quad y = 1 + t, \quad z = -2 - t, \qquad t \in \mathbf{R}$

$q: x = 1 + s, \quad y = s, \quad z = 5 + s, \qquad s \in \mathbf{R}$

Příklad 8

Určete parametr m tak, aby byly přímky p, q různoběžné. Nalezněte jejich průsečík X.

$p: x = m + 2t, \quad y = 3t, \quad z = 6 - 4t, \qquad t \in \mathbf{R}$

$q: x = 5 + s, \quad y = 1 - 4s, \quad z = -4 + s, \qquad s \in \mathbf{R}$

Obraz bodu v osové souměrnosti

Pomocí směrových a normálových vektorů přímek není problém nalézt přímky kolmé nebo rovnoběžné, díky tomu můžeme hledat například i obrazy bodů v osové souměrnosti.

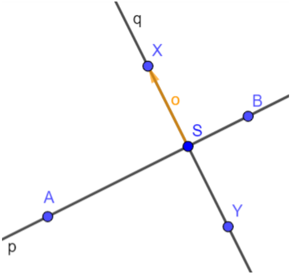
Nalezněme souřadnice bodu Y, který je obrazem bodu $X[-2;-3]$ v osové souměrnosti dané osou p, na níž leží body $A[-1;0], B[5;3]$.

Řešení:
Body A, B ležící na přímce p určí směrový vektor této přímky:
$\vec{u} = B - A = (6;3)$, ten můžeme nahradit vektorem $\vec{u_1} = (2,1)$.

Dále využijme skutečnosti, že body X, Y leží na přímce kolmé k přímce p a oba jsou navíc stejně vzdálené od přímky p. Nazvěme si tuto přímku q. U přímky q již známe její normálový vektor (směrový vektor kolmé přímky) a jeden bod, který na ni leží. Můžeme tedy snadno určit obecnou rovnici přímky $q: 2x + y - 7 = 0$.

Obraz bodu v osové souměrnosti

Nyní potřebujeme nalézt průsečík přímek p, q, označme jej S. Jak je vidět z obrázku, platí $\vec{o} = X - S = -(Y - S)$.



Při hledání průsečíku S dosadíme z parametrického vyjádření přímky p do obecné rovnice přímky q.

$$2(-1 + 2t) + (t) - 7 = 0 \rightarrow t = 1,8$$

Dosazením do parametrického vyjádření přímky p nalézáme průsečík $S[2{,}6; 1{,}8]$.

Nakonec využijme skutečnosti, že vektory dané body SX a SY jsou k sobě navzájem opačné. Vypočítejme souřadnice vektoru $\vec{o} = X - S = (-4{,}6; -4{,}8)$, po přičtení opačného vektoru k bodu S získáváme souřadnice hledaného bodu $Y[7{,}2; 6{,}6]$.

Příklad 9

Určete souřadnice bodu Y, který je souměrně sdružený s bodem $X[8;1]$ podle přímky p se směrovým vektorem $\vec{u} = (1;3)$, na níž leží bod $A[1;0]$.

Příklad 10

Je dána přímka $p: 3x + 5y - 13 = 0$. Určete souřadnice bodu Y, který je obrazem bodu $X[7;-5]$ v osové souměrnosti dané osou p.

Řešení příkladů – 1. část

Příklad 1:

a) $p: x = 3 - 4t, \quad y = 5 + t, \qquad t \in \mathbf{R}$,
b) $p: x = 3 - 4t, \quad y = 5 + t, \qquad t \in \langle 0, 1 \rangle$,
c) $p: x = 3 - 4t, \quad y = 5 + t, \qquad t \in \langle 0, \infty)$,
d) $p: x = 3 - 4t, \quad y = 5 + t, \qquad t \in (-\infty, 1\rangle$.

Příklad 2:

a) $k = \frac{1}{4}$, bod C leží na úsečce AB,
b) nelze zvolit takové k, aby bod C ležel na přímce AB.

Příklad 3: $p: 8x + y - 3 = 0$
Příklad 4: Bod K leží na přímce p, bod L neleží na přímce p
Příklad 5: $p: 5x + 2y + 18 = 0$
Příklad 6: řešením je například

$$\begin{aligned} p: x &= 5 + 3t \\ y &= -1 - 2t \qquad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Řešení příkladů – 2. část

Příklad 7: přímky jsou mimoběžné
Příklad 8: $m = -3$, $X[3; 9; -6]$
Příklad 9: $Y[-4; 5]$
Příklad 10: $Y[10; 0]$