ČESKOSLOVENSKÁ
AKADEMIE VĚD

Vědecký redaktor
doc. dr. Petr Sgall, DrSc.

Recenzent
dr. František Zítek, CSc.

SOLOMON MARCUS

ALGEBRAICKÉ MODELY V LINGVISTICE

ACADEMIA

NAKLADATELSTVÍ
ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD
PRAHA 1969

Děkuji rovněž dr. Františku Zítkovi, CSc. za péči, s jakou přečetl celý text a tím přispěl k odstranění několika omylů.

Děkuji nakladatelství Československé akademie věd Academia za péči o to, aby české vydání vyšlo v co nejlepší úpravě.

Děkuji rovněž Didaktickému a pedagogickému nakladatelství v Bukurešti a Nakladatelství Akademie Rumunské socialistické republiky za souhlas s vydáním knih ML a GA v češtině.

Je pro mne velmi potěšující, že jsem mohl vydat tuto knihu v jazyce země, která zaujímá jedno z předních míst v oboru matematické lingvistiky.

Solomon Marcus

Poznámka. „Předmluva k českému vydání" byla napsána v roce 1966, kdy byl český překlad knihy odevzdán do tisku; k tomuto roku je také dovedena bibliografie na konci obou částí knihy (str. 186 – 191 a 225 – 270). Podrobný přehled literatury z oboru algebraických modelů jazyka s bibliografií dovedenou až do současnosti je obsažen v mém článku „Mathematical Linguistics in Europe", který vyjde v IX. svazku *Current Trends in Linguistics* (Indiana University, Bloomington, Indiana, U.S.A.).

S. M.

Předmluva ke knize „Matematická lingvistika"

Základem této knihy je část přednášek z matematické lingvistiky, které jsem konal v roce 1962 na matematicko-mechanické fakultě university v Bukurešti. V zjednodušené podobě jsem přednášel některé partie již od druhého semestru školního roku 1960 – 1961 v kroužku matematické lingvistiky na filologické fakultě bukurešťské university a v přednášce z matematické lingvistiky pro studenty téže fakulty, kterou jsem konal v prvním semestru školního roku 1961 – 1962. Výjimku tvoří oddíl IV., který nebyl předmětem žádné z uvedených přednášek.

Matematické modely jazyka jsou matematické konstrukce, které uchovávají některé relační aspekty jazykových jevů. Úlohou těchto modelů je nejen uspořádání některých již známých pojmů a relací v systém, ale i odhalení nových relací a nových způsobů uspořádání jevů, na které by nebylo možno přijít jinými prostředky. Chceme-li pochopit gnoseologickou funkci modelu, musíme si uvědomit, že mezi modelem a modelovaným předmětem nutně existuje částečná neshoda.

Matematické modelování jazykových jevů má nejen význam teoretický tím, že představuje současnou vývojovou etapu strukturální lingvistiky, ale je velmi důležité i z hlediska aplikací, neboť tvoří teoretický základ pro vypracování informačních jazyků zvláště a strojových jazyků vůbec.

Matematické poznatky potřebné pro porozumění těmto přednáškám jsou vyloženy až na některé jednotlivosti přímo v textu této knihy. I když terminologie a způsob zápisu jsou v podstatě jednotné v celé knize, některé termíny, některé způsoby zápisu i některé jiné způsoby vyjadřování platí konvenčně jen pro určité kapitoly. To je třeba si uvědomit, kdykoli čtenář zjistí, že některý termín nebo některý způsob zápisu má v různých kapitolách různý význam.

Bibliografie uvedená na konci knihy obsahuje jen zčásti práce, které jsou v knize skutečně citovány; ostatní práce uvedené jen v bibliografii mají za úkol podat všeobecný — i když neúplný — obraz o literatuře týkající se otázek modelování v lingvistice nebo dávající k němu svými výsledky podnět.

Kniha se zabývá zejména analytickými a paradigmatickými modely jazyka. Syntetické a syntagmatické modely budou probrány v jiné knize (srov. knihu „Gramatiky a konečné automaty").

Pravděpodobnostní modely jazyka zůstávají mimo rámec této knihy, nebylo proto k nim přihlédnuto ani při sestavování bibliografie.

Solomon Marcus

Předmluva ke knize „Gramatiky a konečné automaty“

Rozvoj kybernetiky, aplikované lingvistiky, teorie jazyka a matematické logiky vedl v posledních letech ke studiu takzvaných generativních gramatik. Různé třídy Turingových strojů jsou pojímány jako modely gramatik přirozených jazyků; u každého takového modelu se klade otázka jeho generativní schopnosti, jeho adekvátnosti s různými přirozenými nebo umělými jazyky (včetně jazyků programovacích) a jeho schopnosti vysvětlit strukturu vět, které generuje.

Typy strojů studované z tohoto hlediska tvoří hierarchii, jejíž nejvyšší stupeň zaujímají Turingovy stroje, které nepodléhají dalším omezením, a nejnižší stupeň stroje typu konečného automatu. Některé typy strojů tvořící střední články této hierarchie byly studovány v odborné literatuře posledních let; z nich jsou pro svůj lingvistický význam zvláště důležité tzv. zásobníkové automaty („push down store machines“), které by si zasloužily samostatné monografické zpracování.

Tato kniha je věnována strojům typu konečného automatu, které jsou nejspeciálnějším typem Turingových strojů. Podáváme v ní výklad různých variant, v nichž se tyto stroje vyskytují v literatuře: gramatik Chomského a Millera s konečným počtem stavů (jejich zvláštními druhy jsou uniformní gramatiky, gramatiky, u nichž se přechod do počátečního stavu děje povinně vytvořením prázdného slova, gramatiky, u nichž je prázdné slovo vytvářeno výlučně a povinně přechodem do počátečního stavu, a nedvojznačné gramatiky, u nichž je prázdné slovo vytvářeno výlučně a povinně přechodem do počátečního stavu), dále konečných automatů typu Rabina-Scotta, indeterministických konečných automatů, Kleeneho operací aplikovaných na konečné události, konečných, orientovaných a ohodnocených grafů studovaných Karlem Čulíkem, Medvedevových automatů, gramatik typu 3 z hierarchie Chomského, bilaterálních konečných automatů, konečných počátečních automatů Mealyho-Gluškova a Moora-Gluškova, pravidelných kanonických systémů J. Richarda Büchiho atd.

Všechny tyto typy strojů nejsou studovány stejně podrobně. Některým je věnováno jen několik řádků, ale vždy jsou udány práce, na jejichž základě je možno určit vztah příslušného typu stroje k ostatním studovaným typům. Zvláštní pozornost je věnována otázce ekvivalence mezi gramatikami s konečným počtem stavů a konečnými automaty, důsledkům této ekvivalence a úvahám o významu některých typů strojů s konečným počtem stavů jakožto modelů přirozených jazyků. Po stanovení generativní schopnosti těchto strojů se přistupuje k analytickému studiu jazyků s konečným počtem stavů. Konstatuje se, že nejzávažnější závěry v tomto směru vyplývají z ekvivalence mezi těmito jazyky a událostmi reprezentovanými konečným automatem. Při charakterizaci těchto událostí se setkáváme s pojmem distribuce, který je základním pojmem moderní lingvistiky, a s pojmem derivace rozkladu, s jehož pomocí se modeluje v analytické teorii gramatiky založené na teorii množin pojem slovního druhu. Tak docházíme k zjištění organické souvislosti mezi modely generativními (syntetickými) a analytickými a k zjištění totožnosti matematického aparátu užívaného při obou druzích modelování. Můžeme bez přehánění říci, že teorie konečných automatů se ukázala lingvističtější než teorie gramatik s konečným počtem stavů, neboť umožnila ve větší míře odhalování některých lingvistických aspektů. Pokud jde o způsob definování různých strojů typu konečného automatu, bezpochyby se nejvíce blíží skutečné gramatice tzv. gramatika typu 3 z hierarchie Chomského, v níž lze snadno vystopovat modelování procesu, jímž se věta rozkládá na své složky, až se dojde k rozkladu na morfémy.

Ve svých výkladech se zmiňujeme o různých otázkách, které by mohly být předmětem dalšího zkoumání. Konstatujeme souvislosti mezi gramatikami s konečným počtem stavů a gramatikami typu 2 z hierarchie Chomského. Výklady jsou vedeny tak, aby se při studiu gramatik s konečným počtem stavů vytěžilo co nejvíce z ekvivalence mezi těmito gramatikami a jinými typy strojů s konečným počtem stavů. Bibliografie uvedená na konci knihy podává celkový, i když ne úplný obraz o odborné literatuře.

Terminologie a způsob zápisu mají zde dosti nedostatků a jsou dosti nejednotné; zčásti je to dáno tím, že dosud není ustálen způsob označování zcela nových pojmů a teorií, které jsou předmětem našich výkladů. Tak termíny jako „řetěz", „věta", „fráze", „posloupnost" jsou užívány vesměs v témž významu. Stejně je v témž významu užíváno termínů „symbol", „prvek" a „slovo"; „prázdný symbol", „jednotkový symbol", „slovo s nulovým účinkem", „prázdné slovo" a „symbol s nulovým účinkem"; „generuje " a „vytváří" atd.

V určitém smyslu je tato publikace doplněním a pokračováním knihy Matematická lingvistika; zatímco tam jsou studovány pouze analytické modely, tato kniha je věnována zejména modelům syntetickým. To znamená, že zatímco v Matematické lingvistice jsme vycházeli z určitého souboru vět – části volné pologrupy generované konečným slovníkem V, přičemž cílem modelování bylo analytické studium struktury těchto vět, v této knize vycházíme z určitého stroje nad slovníkem V a hlavním cílem našeho zkoumání je stanovení souboru vět generovaných tímto strojem. Oba typy modelů se navzájem doplňují, neboť každý z nich tvoří nutnou složku zkoumání struktury jazyka. Přestože však mezi touto knihou a knihou Matematická lingvistika je úzká souvislost, není četba Matematické lingvistiky nutná pro pochopení výkladů v této knize.

Solomon Marcus

Poznámka překladatele

Překlad do češtiny byl spojen s mnoha obtížemi terminologickými, neboť rumunská předloha obsahuje neobyčejně mnoho termínů matematických, lingvistických i logických, a to nejen termínů v odborné literatuře běžně vžitých, ale i termínů nových, které autor díla sám razí. Potíže vznikaly jednak z toho, že vžitých termínů autor někdy užívá v novém významu, jednak z toho, že tentýž pojem často označuje — jak sám uvádí v předmluvě ke knize „Gramatiky a konečné automaty" – na různých místech různými názvy. Proto jsem se při své práci neobešel bez konzultací s odborníky z jednotlivých oborů. Za jejich pomoc jim na tomto místě srdečně děkuji; jsou to doc. dr. Petr Sgall, DrSc., vědecký redaktor překladu a dr. Pavel Novák, CSc. (pro lingvistické termíny), prom. matem. Ladislav Nebeský (pro matematiku) a dr. Miroslav Jauris (pro logiku).

V zásadě jsem se snažil najít pro každý termín originálu ekvivalentní termín český, případně i vystihnout různými českými termíny různost termínů v originálu pro tentýž pojem; někdy jsem však dal přednost totožnému překladu takových termínů, jestliže se mi v češtině nepodařilo najít různé vhodné ekvivalenty (tak např. rumunské termíny „şir" a „secvenţă" překládám jediným termínem „posloupnost", termíny „vocabular", „dicţionar" a „lexic" jediným českým termínem „slovník" atd.). Odchylky od běžně vžité terminologie jsem provedl po bedlivém uvážení jen výjimečně; tak jsem dal přednost termínu „teorém" před termínem „věta" (jako matematický pojem), který není v lingvistickém kontextu jednoznačný, a z téhož důvodu jsem ponechal termín „fráze" i tam, kde by byl spíše namístě termín „věta" (tentokrát jako pojem lingvistický). Abych čtenáři usnadnil orientaci v složité terminologii a v pojmové náplni jednotlivých termínů, připojil jsem na konec knihy jejich rejstřík s odkazy na místa v knize, kde jsou definovány nebo blíže vysvětleny.

Lingvistické doklady, které jsou nejčastěji brány z rumunštiny a z francouzštiny, ponechávám bez překladu do češtiny tam, kde jde o ilustraci fonologických nebo morfologických jevů, která by překladem ztratila smysl. Překlady do češtiny připojuji tam, kde pochopení smyslu je nezbytné pro zachování ilustrativní hodnoty dokladů na jevy syntaktické. Naproti tomu uvádím příklady přímo jen v českém překladu tam, kde jde o ilustraci obecně jazykových pojmů doklady ze sémantiky.

Vladimír Hořejší

ČÁST I.

ANALYTICKÉ MODELY

ODDÍL I

Opozice a distribuce

1. Úvod

První jazykovědec, který upozornil na základní důležitost pojmu opozice při zkoumání jazyka, byl Ferdinand de Saussure [136]. K systematickému studiu jazykových opozic, které F. de Saussure vytkl jako problém, přistoupil N. S. Trubeckoj, jenž roztřídil fonologické opozice na různé typy a zároveň poukázal na to, že jeho třídění v podstatě platí i pro opozice, které se vyskytují v jiných oblastech jazykovědy [148]. Třídění N. S. Trubeckého zdokonalil J. Cantineau, který systematicky zkoumal možnost jeho aplikace na tzv. „významové opozice“ a ukázal, že různé typy opozic, na které Trubeckoj upozornil, odpovídají základním relacím ve formální logice [22, 23]. J. Cantineau navrhuje užívat místo termínu „opozice“ označení „relace“, které je obecnější a adekvátnější. Protože však termín „opozice“ se v literatuře posledních let velmi rozšířil, budeme (stejně jako J. Cantineau) užívat termínů obou. K znalosti jazykových opozic dále přispěli svými pracemi A. Martinet [104, 106], L. Hjelmslev [64], P. L. Garvin [42], A. A. Reformatskij [124], američtí deskriptivisté [42, 59] aj. Byly podrobně vyloženy zajímavé analogie mezi typy jazykových opozic a určitými pojmy z teorie kódů [1].

I. oddíl naší knihy umožňuje jazykovědcům, aby se prostřednictvím lingvistických fakt seznámili s nejelementárnějšími partiemi teorie množin, a matematikům předkládá v matematické podobě některé klasické pojmy z teorie jazykových opozic.

2. Pojem množiny

Slovo množina má v našich výkladech svůj obvyklý význam; označuje určitý základní pojem, který proto nelze převést na jiné pojmy jednodušší.

Předměty tvořící množinu se nazývají prvky. Označíme např. A množinu slov latinského jazyka. Slovo „civis“ je prvkem této množiny; „civis“ patří do množiny A. Slovo „mauvais“ není prvkem této množiny; „mauvais“ nepatří do množiny A. Relace „a je prvkem množiny A“ se nazývá incidence (v množině) a označuje se znakem $\in$ (jeho autorem je G. Peano). Tedy $a \in A$. Z toho vyplývá, že „civis“ $\in A$. Jestliže prvek b nepatří do množiny A, píšeme $b \bar{\in} A$ nebo $b \notin A$. Tedy „mauvais“ $\bar{\in} A$. Jiný příklad: Buď B množina čísel menších než 100. Pak $35 \in B$, $163 \bar{\in} B$. Množiny se obyčejně označují velkými písmeny, zatímco prvky množiny se označují písmeny malými; tento úzus však nebudeme vždy zachovávat.

Jakým způsobem se definují množiny? Jsou dvě možnosti:

a) Vyjmenováním všech prvků (výčtem). Například množina vytvořená z čísel 2, 5, 9, 11, 13, 14 nebo množina vytvořená z latinských slov „dux“, „infans“, „tempus“.

b) Udáním charakteristické vlastnosti (popisem). Například množina rumunských substantiv, množina správně tvořených německých vět, množina sudých čísel, množina pádů v ruštině.

Je-li množina definována vyjmenováním svých prvků, je tím řečeno, že je vytvořena z konečného počtu prvků. Množina definovaná udáním charakteristické vlastnosti může být konečná nebo nekonečná. Tak množina pádů v ruštině je konečná, množina sudých čísel je nekonečná.

Tedy na rozdíl od nekonečných množin, které lze definovat pouze popisem, lze konečné množiny definovat někdy výčtem prvků, jindy popisem. To, že určitou konečnou množinu definujeme jedním z obou způsobů a ne právě způsobem opačným, závisí také na stavu našich vědomostí. Například množina tvořená čísly 2, 5, 9, 11, 13, 14 je definována vyjmenováním svých prvků. Jakmile však získáme určité vědomosti o rovnicích, uvědomíme si, že tuto množinu můžeme též definovat jako množinu kořenů rovnice

$$(x-2)(x-5)(x-9)(x-11)(x-13)(x-14)=0\,.$$

Naopak některé množiny, které jsou definovány charakteristickou vlastností svých prvků, mohou být definovány též výčtem. To platí např. o množině pádů v rumunštině, kterou lze definovat takto: {nominativ, genitiv, dativ, akuzativ, vokativ}. (Množinu prvků $a, b \dots m, n$ budeme označovat $\{a, b, \dots, m, n\}$.)

Jiný příklad: Uvažujme tuto množinu latinských morfémů (morfémy zde chápeme přibližně jako minimální posloupnosti nadané významem): {us, i, o, um, e, orum, is, os}. Tato množina je definována vyjmenováním svých prvků. Uvažujeme-li ji však v souvislosti se skloňováním slova „lupus“, uvědomíme si, že ji můžeme také definovat jako množinu afixálních morfémů, které vytvářejí flexi slova „lupus“.

Definice množiny pomocí charakteristické vlastnosti jejích prvků je z vědeckého hlediska v určitém smyslu nadřazená definici výčtem, neboť se nespokojuje s tím, co je zřejmé na první pohled, ale vyzdvihuje něco ze společné podstaty prvků množiny.

Pomocí charakteristické vlastnosti prvků je možno množinu obyčejně definovat několika způsoby, neboť se může stát, že několik různých vlastností charakterizuje tutéž množinu. Například {1, 2, 3, 4, 5} je jednak množina přirozených čísel menších než 6, jednak množina zbytků, které obdržíme, jestliže přirozená čísla větší než 6, která nejsou násobky šesti, dělíme tímto číslem.

Právě tak množina morfémů {us, i, o, um, e, orum, is, os} je i množinou afixálních morfémů, tvořících flexi slova „servus“. Z toho usuzujeme, že „lupus“ a „servus“ patří z hlediska flexe k sobě; definice množiny charakteristickými vlastnostmi jejích

prvků umožňuje tedy čím dále tím obecnější, abstraktnější a jednodušší uspořádání jevů.

Definujeme-li množinu určitou vlastností, musíme si uvědomit, že tato vlastnost funguje jako síto. Musíme umět vypovědět o každém předmětu, zda-li má nebo nemá příslušnou vlastnost. Předmět patří nebo nepatří do dané množiny podle toho, zdali naše výpověď je kladná nebo záporná. Jestliže uvažovaná vlastnost je takové povahy, že o určitých předmětech nemůžeme vypovědět, zdali ji mají nebo nemají, pak tato vlastnost není schopna definovat množinu. Jestliže například nejsme schopni o určitých slovech vypovědět, zdali jde o adjektiva nebo číslovky, pak nemůžeme mluvit o „množině adjektiv“. Toto konstatování má základní důležitost, pokud jde o perspektivy aplikace teorie množin v jazykovědě. Tato aplikace je plodná podle toho, zdali předem přesně definujeme pojmy ve smyslu výše podaných výkladů.

Můžeme uvažovat množiny vytvořené z jediného prvku, například množinu vytvořenou z jediného prvku a. Takovou množinu označujeme $\{a\}$. Rovněž můžeme definovat prázdnou množinu jako množinu, která neobsahuje žádný prvek; značíme ji $\emptyset$ nebo 0.

Můžeme uvažovat množiny, jejichž prvky jsou samy množinami. Například můžeme uvažovat množinu všech koulí; koule je však sama množinou všech bodů do určité vzdálenosti od jiného daného bodu.

Jiný příklad: Vycházíme-li z akustických nebo artikulačních vlastností určité hlásky v jazyce, vybíráme postupem, který podrobně popíšeme v II. oddílu, tzv. relevantní rysy z hlediska jejich funkce v jazyce; úhrn těchto rysů tvoří foném. Tak rumunský foném P obsahuje pouze některé rysy hlásky P. Můžeme uvažovat množinu rumunských fonémů P, F, R, ale každý z těchto fonémů je, jak jsme viděli, sám množinou. Tak $P =$ {exploziva, neznělá, bilabiální}, $F =$ {spiranta, neznělá, labiodentální}, $R =$ {vibranta, nepárová, středopatrová}.

3. Privativní a nulové opozice

Mějme množinu X. V dalších výkladech budeme předpokládat, že všechny uvažované množiny jsou vytvořeny z prvků X. X bude základní množina.

Mějme dvě množiny A a B. Předpokládejme, že platí toto:

$$\text{Jestliže } a \in A, \text{ pak } a \in B\,.$$

V tom případě říkáme, že množina A je obsažena v množině B; relace, která vzniká mezi A a B, se nazývá inkluze a značí se $\subseteq$. Tedy

$$A \subseteq B\,. \tag{1}$$

Říkáme, že A je podmnožinou nebo částí množiny B.

Uvedeme příklad. Mějme tři množiny: $X =$ množina morfologických kategorií, $A =$ {číslo, pád}, $B =$ {číslo, pád, rod, stupeň}. Pak $A \subseteq B$, neboť oba prvky množiny A patří také do B. Tato inkluze má lingvistický význam, aplikujeme-li ji např. na ruštinu. Můžeme se dohodnout, že A představuje substantivum, B adjektivum. Lze pozorovat, že množina B není obsažena v množině A, protože určité prvky množiny B nepatří do množiny A. Zapisujeme to takto:

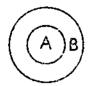
$$B \nsubseteq A . \tag{2}$$

Kdykoli jsou splněny podmínky (1) a (2), říkáme, že množina A je vlastní podmnožinou množiny B, a píšeme

$$A \subset B . \tag{3}$$

Okolnost, že množina A je vlastní podmnožinou množiny B, můžeme vyjádřit také takto: Relace – čili opozice – mezi A a B je privativní v neprospěch A nebo privativní ve prospěch B. Například opozice mezi substantivem a adjektivem je privativní ve prospěch adjektiva.

Relaci mezi množinou B a vlastní podmnožinou A (vlastní inkluzi A v B) můžeme znázornit takto (obr. 1):



Platí toto tvrzení:

Jestliže opozice mezi A a B je privativní ve prospěch B a jestliže opozice mezi B a C je privativní ve prospěch C, pak opozice mezi A a C je privativní ve prospěch C.

Důkaz. Z předpokladu vyplývá, že $A \subset B$ a $B \subset C$, a máme dokázat, že $A \subset C$. Buď $a \in A$. Z $A \subset B$ vyplývá, že $a \in B$, z $B \subset C$ vyplývá, že $a \in C$; tedy $A \subseteq C$. Naopak z $C \nsubseteq B$ vyplývá, že existuje prvek c takový, že $c \in C$, ale $c \notin B$. Z této relace a z $A \subset B$ vyplývá, že $c \notin A$; existuje tedy prvek, který patří do C, ale nepatří do A. To znamená, že $C \nsubseteq A$ a tedy $A \subset C$. Tím je důkaz podán.

Mějme dvě množiny A a B takové, že platí relace (1), ale neplatí relace (3). V tom případě říkáme, že množiny A a B jsou si rovny, a píšeme

$$A = B . \tag{4}$$

Relaci rovnosti mezi dvěma množinami říkáme také nulová opozice. Zapisuje se takto:

$$A = B .$$

Příklad. Nechť A = množina rumunských tupých sykavek, B = množina rumunských souhlásek, které jsou zároveň tupé sykavky a středopatrové. Pak $A = \{Š, Ž\}$, $B = \{Š, Ž\}$, tedy $A = B$. Je to dáno tím, že v rumunštině je každá tupá sykavka nutně středopatrová.

4. Množinové operace

Sjednocením dvou množin A a B nazýváme množinu C definovanou takto: prvek (základní) množiny X patří do C právě tehdy, když patří alespoň do jedné z množin A a B. Operace sjednocení se označuje znakem $\cup$. Tedy

$$C = A \cup B .$$

Protože definice sjednocení je symetrická vzhledem k oběma členům A a B, platí

$$A \cup B = B \cup A .$$

To je komutativní vlastnost operace sjednocení.

Příklad 1. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, d, e, f\}$, $C = \{a\}$, $D = \{f\}$. Pak $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A \cup C = \{a, b, c, d, e\}$, $C \cup D = \{a, f\}$.

Příklad 2. X = množina substantiv, A = množina substantiv, která nemají singulár, B = množina substantiv, která nemají plurál. $A \cup B$ = množina substantiv majících jen jedno číslo.

Příklad 3. X = množina rumunských souhlásek, A = množina souhlásek neznělých, B = množina souhlásek závěrových, $A \cup B$ = množina souhlásek neznělých nebo závěrových = $\{P, F, T, S, Š, K, M, B, N, D, G\}$ (souhláska P je neznělá i závěrová, souhláska F je neznělá, ale není závěrová, souhláska G je závěrová, ale není neznělá).

Průnikem nebo společnou částí množin A a B nazýváme množinu D definovanou takto: prvek množiny X patří do D právě tehdy, když patří jak do A, tak do B. Operace průniku se značí $\cap$. Tedy

$$D = A \cap B .$$

Protože definice průniku je symetrická vzhledem k oběma členům A a B, platí

$$A \cap B = B \cap A ,$$

což je komutativní vlastnost průniku.

Příklad 1. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$.

Příklad 2. X = množina substantiv a sloves, A = množina slov z X, která mohou být dvojího čísla, B = množina slov z X, která se mohou skloňovat, $A \cap B$ = množina substantiv, která nejsou ani singularia tantum, ani pluralia tantum.

Příklad 3. X = množina morfologických kategorií francouzského substantiva, B = množina morfologických kategorií francouzského slovesa, $A \cap B = \{\text{číslo}\}$.

Poznámka. Operace sjednocení a průniku je možno rozšířit na více než dvě množiny takto: Je-li dán systém množin $\mathscr{F}$, říkáme, že množina A je jejich sjednocením, a píšeme

$$A = \bigcup_{E \in \mathscr{F}} E ,$$

jestliže množina A obsahuje právě ty prvky, které patří aspoň do jedné z množin systému $\mathscr{F}$.

Rozdílem dvou množin A a B nazýváme množinu E, definovanou takto: prvek množiny X patří do E právě tehdy, když patří do A, ale nepatří do B. Operace rozdílu se označuje znakem $-$. Tedy:

$$E = A - B .$$

Příklad 1. $A = \{a, b, d, h\}$, $B = \{b, d\}$, $A - B = \{a, h\}$.

Příklad 2. A = množina vět majících smysl, B = množina vět, které nemají smysl, $A - B$ = množina vět, majících smysl = A.

Příklad 3. A = množina rumunských sloves „a lucra“, „a mînca“, „a umbla“, B = množina sloves majících v 3. osobě jednotného čísla indikativu prézentu stejný tvar jako v 3. osobě množného čísla indikativu prézentu, $A - B = 0$.

Rozdílu $X - B$ říkáme doplněk (komplement) množiny B. Budeme jej označovat $\bar{B}$ nebo $C(B)$. (Ve IV. oddílu bude mít zápis $\bar{B}$ jiné významy.)

Příklad 1. X = množina souhlásek, B = množina souhlásek neznělých, $\bar{B}$ = = množina souhlásek znělých nebo nepárových.

Příklad 2. X = množina slov, B = množina slov, která nejsou schopna vyjadřovat gramatický čas, $\bar{B}$ = množina sloves.

Příklad 3. X = množina francouzských samohlásek $\{a, e, i, o, u, y\}$, $B = \{a, i, o\}$, $\bar{B} = \{e, u, y\}$.

5. Ekvipolentní a disjunktní opozice

Mějme dvě množiny A a B. Mimo vlastní inkluzi a rovnost, které jsme studovali výše, můžeme ještě uvažovat tyto typy relací:

1. Jestliže $A \neq 0$, $B \neq 0$, $A \nsubseteq B$, $B \nsubseteq A$ a $A \cap B \neq 0$, říkáme, že mezi množinami A a B je ekvipolentní relace čili že vytvářejí ekvipolentní opozici. Lze ji znázornit tímto schématem (obr. 2):

Příklad 1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$, $B \nsubseteq A$, neboť $B - A = \{6\} \neq 0$, $A \nsubseteq B$, neboť $A - B = \{1, 2, 3\} \neq 0$.

Příklad 2. X = množina morfologických kategorií. A = {číslo, rod, pád, stupeň}, B = {číslo, osoba, čas, způsob, slovesný rod, vid}, $A \cap B$ = {číslo}, $B \nsubseteq A$, protože $B - A$ = {osoba, čas, způsob, slovesný rod, vid}, $A \nsubseteq B$, protože $A - B$ = {rod, pád, stupeň} $\neq 0$. Mezi A a B je tedy ekvipolentní opozice. V rumunštině je to vlastně opozice mezi adjektivy a slovesy.

Příklad 3. X = množina morfologických hodnot (morfémů ve smyslu Hjelmslevově [62, 63], sémat ve smyslu Skaličkově [138]). A = {singulár, nominativ, determinovaný[1]}, B = {plurál, nominativ, determinovaný}, $A \cap B$ = {nominativ, determinovaný}, $A - B$ = {singulár}, $B - A$ = {plurál}. Opozice mezi množinami A a B je zobecněním a syntézou protikladů mezi la maison a les maisons, le cahier a les cahiers, l'homme a les hommes atd. Je to ekvipolentní opozice.

2. Jestliže $A \neq 0$, $B \neq 0$ a $A \cap B = 0$, říkáme, že A a B jsou disjunktní čili že je mezi nimi disjunktní relace. Můžeme také říci, že opozice mezi A a B je disjunktní. Někteří autoři nazývají disjunktní opozici exteriorní relací (např. J. Cantineau [23]). Lze ji znázornit tímto schématem (obr. 3):

Příklad 1. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{f, h\}$, $A \cap B = 0$.

Příklad 2. A = množina retných souhlásek, B = množina zubných souhlásek, $A \cap B = 0$.

Příklad 3. A = {singulár, 1. osoba, prézens, indikativ, činný rod}, B = = {plurál, 3. osoba, perfektum, konjunktiv, trpný rod}, $A \cap B = 0$.

A a B zde představují jevy, které jsme v článku [93] nazvali gramatémy a v článku [96] nasycenými kombinacemi hodnot.

6. Tabulka různých typů opozic

Z dosavadních úvah vyplývá, že každý z výše definovaných typů opozic mezi dvěma množinami A a B může být charakterizován pomocí tří množin: $A - B$, $B - A$ a $A \cap B$. Opozice je privativní právě tehdy, když jedna a jen jedna z množin $A - B$ a $B - A$ je prázdná. Opozice je ekvipolentní právě tehdy, když $A \cap B \neq 0$, $A - B \neq 0$, $B - A \neq 0$. Konečně je opozice disjunktní právě tehdy, když $A - B \neq$ $\neq 0$, $B - A \neq 0$ a $A \cap B = 0$. Můžeme tedy sestavit tuto tabulku:

1 Termínem „determinovaný“ se rozumí „opatřený tzv. postpozitivním určitým členem“, kladeným na konec slova jako sufix; srov. rumunské satul proti „nedeterminovanému“ sat (vesnice). — *Pozn. překladatele.*

Tab. 1

A	B	$A - B$	$B - A$	$A \cap B$	typ opozice
		0	$\neq 0$	A	privativní ve prospěch B
		$\neq 0$	0	B	privativní ve prospěch A
		0	0	$= A = B$	nulová
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	ekvipolentní
$\neq 0$	$\neq 0$	A	B	0	disjunktní

Opozice (A, B), pro kterou $A \neq 0 \neq B$, se nazývá vlastní; ostatní opozice jsou nevlastní.

Je jasné, že nevlastní opozice je buď nulová, nebo privativní. Ekvipolentní nebo disjunktní opozice je vždy vlastní.

7. Základ a rozdílové množiny opozice

Množiny A a B se nazývají členy opozice.

Množina $A \cap B$ se nazývá základ opozice mezi A a B. $A - B$ a $B - A$ jsou rozdílové množiny opozice mezi A a B. Můžeme tedy říci, že privativní opozice je charakterizována tím, že jedna a jen jedna z rozdílových množin je prázdná. Nulová opozice je charakterizována tím, že obě rozdílové množiny jsou prázdné. Ekvipolentní opozice, jejíž členy jsou vždy neprázdné množiny, je charakterizována tím, že jak základ, tak rozdílové množiny jsou neprázdné. Disjunktní opozice, jejíž členy jsou rovněž vždy neprázdné množiny, je charakterizována tím, že základ je prázdný.

Základem právě popsaných typů opozic je roztřídění jazykových opozic od N. S. Trubeckého [148].

Zajímavé jsou ty opozice, které vznikají mezi množinami, jež si jsou do určité míry podobné, tedy mají určité společné prvky. Opozice mezi množinami, které jsou si úplně podobné, jsou triviální (např. nulová opozice); avšak ani studium opozic mezi množinami, které si nejsou částečně podobné, tedy nemají určité společné prvky (např. disjunktních opozic), není příliš zajímavé.

Je tedy zajímavější studovat opozici mezi množinami $A = \{$neznělá, dentála, spiranta$\}$ a $B = \{$znělá, dentála, spiranta$\}$ než opozici mezi množinami $A = \{$neznělá, dentála, spiranta$\}$ a $B = \{$znělá, velára, explozíva$\}$, protože první opozice má neprázdný základ, zatímco základ druhé opozice je prázdný. První opozice (v podstatě opozice mezi rumunskými fonémy S a Z) je ekvipolentní, zatímco druhá (odpovídající opozici mezi S a G) je disjunktní.

8. Solidárnost, selekce, konstelace

Typy opozic mezi množinami můžeme pojímat také jinak, jestliže vyjdeme z relace incidence prvku v množině a z logické relace implikace. Říkáme, že tvrzení P implikuje tvrzení Q, jestliže z pravdivosti tvrzení P vyplývá pravdivost tvrzení Q. V tom případě píšeme $P \Rightarrow Q$ (P implikuje Q). Je-li relace $P \Rightarrow Q$ nepravdivá, píšeme $P \not\Rightarrow Q$. Případ $P \Rightarrow Q$ a $Q \Rightarrow P$ je zobecněním relace, kterou L. Hjelmslev nazývá relací solidárnosti nebo interdependence. Případ $P \Rightarrow Q$ a $Q \not\Rightarrow P$ je zobecněním typu relace, který Hjelmslev nazývá relací selekce nebo determinace; konečně případ $P \not\Rightarrow Q$ a $Q \not\Rightarrow P$ je zobecněním typu relace, který Hjelmslev nazývá kombinatorní relací nebo konstelací [64].

Jestliže mezi dvěma množinami A a B je nulová opozice, pak přítomnost určitého prvku v množině A implikuje přítomnost téhož prvku v množině B a naopak přítomnost určitého prvku v množině B implikuje přítomnost téhož prvku v množině A. Nulová opozice mezi množinami A a B tedy definuje relaci solidárnosti prvků množiny A s prvky množiny B: $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$ a $(x \in B) \Rightarrow (x \in A)$. Relace solidárnosti je mezi větou „$x \in A$“ a větou „$x \in B$“. Je-li mezi množinami A a B privativní opozice ve prospěch množiny B, pak přítomnost určitého prvku v množině A implikuje přítomnost téhož prvku v množině B; můžeme to vyjádřit slovy, že prvky množiny A mají selektivní funkci vzhledem k množině B nebo že prvky množiny A jsou v relaci selekce s určitými prvky množiny B. Prvky množiny A se nazývají selektující; tytéž prvky uvažované jako prvky množiny B se nazývají selektované. Mezi větami $(x \in A)$ a $(x \in B)$ je relace selekce: $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$, ale $(x \in B) \not\Rightarrow (x \in A)$.

Je-li mezi množinami A a B ekvipolentní nebo disjunktní opozice, je mezi větami $(x \in A)$ a $(x \in B)$ kombinatorní relace, neboť $(x \in A) \not\Rightarrow (x \in B)$ a $(x \in B) \not\Rightarrow (x \in A)$.

Je-li konečně mezi množinami A a B disjunktní opozice, je mezi větami „$x \in A$“ a „$x \bar{\in} B$“ relace selekce. Relace selekce je v tomto případě také mezi větami „$x \in B$“ a „$x \bar{\in} A$“, neboť $(x \in A) \Rightarrow (x \bar{\in} B)$, ale $(x \bar{\in} B) \not\Rightarrow (x \in A)$ a $(x \in B) \Rightarrow (x \bar{\in} A)$, ale $(x \bar{\in} A) \not\Rightarrow (x \in B)$.

U Paula L. Garvina [42] najdeme pro pojem selekce také název dependence.

Jak vidíme, typy opozic zavedené Trubeckým mohou být vyjádřeny pomocí typů relací uvažovaných Hjelmslevem. Platí to i v opačném směru: Mějme dvě věty P a Q, týkající se prvků téže množiny T. Označme symbolem $P(x)$ skutečnost, že věta P je pravdivá pro prvek $x \in T$ a symbolem $Q(x)$ skutečnost, že věta Q je pravdivá pro $x \in T$. Relace solidárnosti mezi P a Q odpovídá nulové opozici mezi množinami $\{x; P(x)\}$[2] a $\{x; Q(x)\}$. Relace selekce mezi P a Q odpovídá privativní opozici mezi množinami $\{x; P(x)\}$ a $\{x; Q(x)\}$. Kombinatorní relace mezi P a Q odpovídá ekvipolentní nebo disjunktní opozici mezi množinami $\{x; P(x)\}$ a $\{x; Q(x)\}$.

[2] Čti „množina všech x takových, že platí $P(x)$“.

9. Opozice nad množinou

V následujících výkladech budeme označovat opozici mezi množinami A a B takto: (A/B). Opozice mezi dvěma množinami je uspořádaná dvojice množin. Musíme tedy rozlišovat mezi opozicí (A/B) a opozicí (B/A).

Uvažujme množinu $\mathscr{A}$, jejímiž prvky jsou opozice. Jestliže tyto opozice vznikají mezi množinami, které jsou prvky množiny Ω, říkáme, že $\mathscr{A}$ je množina opozic nad Ω. Množina $\mathscr{A}$ by například mohl být úhrn opozic, které existují v určitém jazyce mezi množinami fonologických distinktivních rysů (v tomto případě budeme množinu $\mathscr{A}$ značit $\mathscr{A}_f$); $\mathscr{A}$ by také mohl být úhrn opozic, které existují v určitém jazyce mezi množinami morfologických distinktivních rysů, tj. morfémů ve smyslu Hjelmslevově (v tomto případě budeme množinu $\mathscr{A}$ značit $\mathscr{A}_m$).

10. Proporční opozice

Nechť (A_1/B_1) a (A_2/B_2) jsou dva prvky množiny $\mathscr{A}$. Budeme říkat, že opozice (A_1/B_1) je proporční s opozicí (A_2/B_2) a budeme psát $(A_1/B_1) \sim (A_2/B_2)$, jestliže $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$ a $B_1 - A_1 = B_2 - A_2$; dvě proporční opozice mají tedy stejné rozdílové množiny.

Příklad 1. Prvky množiny $\mathscr{A}$ jsou opozice mezi konečnými množinami barev. $A_1 = \{$červená, černá, žlutá, modrá$\}$, $B_1 = \{$zelená, černá, fialová, žlutá$\}$, $A_2 = \{$červená, modrá, bílá, oranžová$\}$, $B_2 = \{$bílá, oranžová, zelená, fialová$\}$. Pak $A_1 - B_1 = \{$červená, modrá$\} = A_2 - B_2$, $B_1 - A_1 = \{$zelená, fialová$\} = B_2 - A_2$. Opozice (A_1/B_1) je tedy proporční s opozicí (A_2/B_2).

Příklad 2. $\mathscr{A} = \mathscr{A}_m$, $A_1 = \{$singulár, nominativ, determinovaný$\}$, $B_1 = \{$plurál, nominativ, determinovaný$\}$, $A_2 = \{$singulár, genitiv, determinovaný$\}$, $B_2 = \{$plurál, genitiv, determinovaný$\}$. Pak $A_1 - B_1 = \{$singulár$\} = A_2 - B_2$, $B_1 - A_1 = \{$plurál$\} = B_2 - A_2$. Opozice (A_1/B_1) je tedy proporční s opozicí (A_2/B_2).

Příklad 3. $\mathscr{A} = \mathscr{A}_f$. $A_1 = \{$spiranta, neznělá, dentální$\}$, $B_1 = \{$spiranta, znělá, dentální$\}$, $A_2 = \{$explozíva, neznělá, dentální$\}$, $B_2 = \{$explozíva, znělá, dentální$\}$. Pak $A_1 - B_1 = \{$neznělá$\} = A_2 - B_2$, $B_1 - A_1 = \{$znělá$\} = B_2 - A_2$. Opozice (A_1/B_1) je tedy proporční s opozicí (A_2/B_2). Můžeme tedy říci, že opozice mezi rumunskými fonémy S a Z je proporční s opozicí mezi T a D.

Příklad 4. V němčině fonémy P, B, T, D, K a G vytvářejí proporční opozice dvojic fonémů $(P/B) \sim (T/D) \sim (K/G)$, jejichž distinktivní rysy jsou vždy silný a slabý závěr. Vezmeme-li v úvahu také fonémy M a N, dostaneme tyto relace proporcionality: $(B/D) \sim (P/T) \sim (M/N)$, $(B/M) \sim (D/N)$.

11. Izolované opozice

Izolovanou opozicí v množině $\mathscr{A}$ nazveme opozici v této množině, která není proporční s žádnou jinou opozicí. Tyto opozice jsou z vědeckého hlediska daleko méně zajímavé než opozice proporční.

Příklad 1. $\mathscr{A} = \mathscr{A}_f$. $A = \{$souhláska trvací, nepárová, boková$\}$, $B = \{$spiranta, nepárová, tvrdopatrová$\}$. Opozice mezi A a B (v rumunštině jde o opozici mezi souhláskou L a polosamohláskou Y) je izolovaná v $\mathscr{A}_f$, protože v rumunštině neexistuje jiná boková souhláska než L a jiná tvrdopatrová souhláska než Y.

Příklad 2. Opozice mezi německými fonémy P a S je izolovaná.

Rozeznáváme dva druhy neizolovaných opozic: prvního řádu a druhého řádu. Nechť je (A/B) neizolovaná opozice. Říkáme, že (A/B) je neizolovaná opozice prvního řádu, jestliže existuje konečná posloupnost množin $A_1, \ldots, A_n$ taková, že $A = A_1$, $B = A_n$ a opozice (A_i/A_{i+1}) $(i = 1, \ldots, n - 1)$ jsou všechny izolované. Nejmenší počet členů majících tyto vlastnosti nazveme stupněm neizolovanosti opozice (A/B). Každou neizolovanou opozici, která není prvního řádu, nazveme neizolovanou opozicí řádu druhého.

12. Opozice proporční zleva a zprava

Říkáme, že dvě opozice (A_1/B_1) a (A_2/B_2) jsou proporční zleva, jestliže $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$.

Příklad 1. $A_1 = \{$červená, žlutá, zelená$\}$, $B_1 = \{$červená, žlutá, bílá$\}$, $A_2 = \{$červená, žlutá, zelená$\}$, $B_2 = \{$červená, žlutá, fialová$\}$. Pak $A_1 - B_1 = \{$zelená$\} = A_2 - B_2$. Opozice (A_1/B_1) je tedy proporční zleva s opozicí (A_2/B_2). Ale (A_1/B_1) není proporční s (A_2/B_2), neboť $B_1 - A_1 = \{$bílá$\} \neq \{$fialová$\} = B_2 - A_2$.

Příklad 2. $A_1 = \{$singulár, nominativ, determinovaný$\}$, $B_1 = \{$singulár, genitiv, determinovaný$\}$, $A_2 = \{$plurál, nominativ, nedeterminovaný$\}$, $B_2 = \{$plurál, akuzativ, nedeterminovaný$\}$. Pak $A_1 - B_1 = \{$nominativ$\} = A_2 - B_2$. Ale (A_1/B_1) není proporční s (A_2/B_2), neboť $B_1 - A_1 = \{$genitiv$\} \neq \{$akuzativ$\} = B_2 - A_2$. A_1, B_1, A_2 a B_2 jsou zde množiny morfémů ve smyslu Hjelmslevově [62], [63], [64].

Tvrzení 1. Jestliže opozice (A_1/B_1) je privativní ve prospěch A_1 a opozice (A_2/B_2) je privativní ve prospěch A_2 a jestliže (A_1/B_1) je proporční zleva s (A_2/B_2), pak (A_1/B_1) je proporční s (A_2/B_2).

Důkaz. Z předpokladu privativnosti ve prospěch prvního členu vyplývá, že $B_1 - A_1 = B_2 - A_2 = 0$. Na druhé straně z předpokladu proporčnosti zleva vyplývá, že $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$. Tedy (A_1/B_1) je proporční s (A_2/B_2).

Tvrzení 2. Jestliže opozice (A_1/B_1) a (A_2/B_2) jsou privativní v neprospěch prvního členu, pak jsou proporční zleva.

Důkaz. Vskutku platí $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 = 0$.

Tvrzení 3. Jestliže opozice (A_1/B_1) je proporční zleva s (A_2/B_2) a opozice (A_2/B_2) je privativní v neprospěch A_2, pak (A_1/B_1) je privativní v neprospěch A_1.

Důkaz. Z předpokladu vyplývá, že $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$ a $A_2 - B_2 = 0$, tedy $A_1 - B_1 = 0$.

Obdobně můžeme definovat opozici proporční zprava. (A_1/B_1) je proporční zprava s (A_2/B_2), jestliže $B_1 - A_1 = B_2 - A_2$.

Příklad. $A_1 = \{$singulár, nominativ, determinovaný$\}$, $B_1 = \{$singulár, genitiv, determinovaný$\}$, $A_2 = \{$plurál, dativ, nedeterminovaný$\}$, $B_2 = \{$plurál, genitiv, nedeterminovaný$\}$. Pak $B_1 - A_1 = \{$genitiv$\} = B_2 - A_2$, tedy (A_1/B_1) je proporční zprava s (A_2/B_2). Ale opozice (A_1/B_1) není proporční zleva s (A_2/B_2), neboť $A_1 - B_1 = \{$nominativ$\} \neq \{$dativ$\} = A_2 - B_2$.

Všechny vlastnosti opozic proporčních zleva platí symetricky o opozicích proporčních zprava. Lze tedy vyslovit tato tři tvrzení (důkaz přenecháváme čtenáři):

Tvrzení 1'. Jestliže opozice (A_1/B_1) je privativní ve prospěch B_1 a opozice (A_2/B_2) je privativní ve prospěch B_2 a jestliže (A_1/B_1) je proporční zprava s (A_2/B_2), pak (A_1/B_1) je proporční s (A_2/B_2).

Tvrzení 2'. Jestliže (A_1/B_1) je privativní v neprospěch B_1 a opozice (A_2/B_2) je privativní v neprospěch B_2, pak (A_1/B_1) je proporční zprava s (A_2/B_2).

Tvrzení 3'. Jestliže opozice (A_1/B_1) je proporční zprava s (A_2/B_2) a opozice (A_2/B_2) je privativní v neprospěch B_2, pak (A_1/B_1) je privativní v neprospěch B_1.

Tvrzení 4. Jestliže opozice (A_1/B_1) je proporční zleva (zprava) s (A_2/B_2), pak (B_1/A_1) je proporční zprava (zleva) s (B_2/A_2).

Důkaz. Vyplývá z definic proporčnosti zleva a zprava.

13. Invarianty proporční relace

Vyslovíme nyní několik tvrzení tohoto typu: „Jestliže (A_1/B_1) má vlastnost P a (A_2/B_2) je proporční s (A_1/B_1), pak (A_2/B_2) má rovněž vlastnost P." O vlastnosti P tohoto druhu říkáme, že je invariantem proporční relace nebo že se uchovává proporčností.

Tvrzení 4'. Jestliže vlastnost P je invariantem proporční relace, pak vlastnost „non P" (tj. vlastnost vzniklá negací P) je rovněž invariantem proporční relace.

Důkaz provedeme sporem. Kdyby „non P" nebylo invariantní, pak by existovala opozice (A_1/B_1), která by neměla vlastnost P, ale byla by proporční s opozicí (A_2/B_2), mající vlastnost P. To by však odporovalo předpokladu, že P je invariantní vzhledem k proporční relaci.

Tvrzení 5. Jestliže opozice (A_1/B_1) je proporční s (A_2/B_2) a opozice (A_2/B_2) je nulová, pak (A_1/B_1) je rovněž nulová opozice.

Důkaz. Z $A_2 = B_2$ a z $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 = 0$ skutečně vyplývá, že $A_1 \subseteq B_1$; na druhé straně z $B_1 - A_1 = B_2 - A_2 = 0$ vyplývá, že $B_1 \subseteq A_1$, tedy $A_1 = B_1$.

Poznámka. Je snadné dokázat i pravdivost tohoto tvrzení: Jestliže (A_1/B_1) a (A_2/B_2) jsou nulové opozice, pak (A_1/B_1) je proporční s (A_2/B_2). Vskutku platí $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 = 0$, $B_1 - A_1 = B_2 - A_2 = 0$.

Tvrzení 6. Jestliže opozice (A_1/B_1) je proporční s (A_2/B_2) a opozice (A_2/B_2) je disjunktní, pak opozice (A_1/B_1) je buď ekvipolentní, nebo disjunktní.

Důkaz. Vskutku platí $A_2 - B_2 = A_2$, $B_2 - A_2 = B_2$, tedy $A_1 - B_1 = A_2$, $B_1 - A_1 = B_2$, z čehož vyplývá $(A_1 - B_1) \neq 0 \neq (B_1 - A_1)$ a z toho tím spíše $A_1 \neq 0 \neq B_1$. Tedy jestliže (A_1/B_1) není ekvipolentní, pak je disjunktní.

Tvrzení 7. Jestliže opozice (A_1/B_1) je proporční s (A_2/B_2) a opozice (A_2/B_2) je ekvipolentní, pak opozice (A_1/B_1) je buď ekvipolentní, nebo disjunktní.

Důkaz. Z předpokladu vyplývá, že $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 \neq 0$, $B_1 - A_1 = B_2 - A_2 \neq 0$. Tedy jestliže $A_1 \cap B_1 = 0$, pak (A_1/B_1) je disjunktní, a jestliže $A_1 \cap B_1 \neq 0$, pak (A_1/B_1) je ekvipolentní.

Tvrzení 6 a **7** mohou být spojena v jediné.

Tvrzení 8. Vlastnost opozice být disjunktní nebo ekvipolentní je invariantem proporční relace.

Tvrzení 9. Jestliže opozice (A_1/B_1) je privativní v neprospěch (ve prospěch) A_1 a opozice (A_2/B_2) je proporční s (A_1/B_1), pak opozice (A_2/B_2) je privativní v neprospěch (ve prospěch) A_2.

Důkaz. Nechť opozice (A_1/B_1) je privativní ve prospěch A_1, tedy $B_1 - A_1 = 0$ a $A_1 - B_1 \neq 0$. Z předpokladu vyplývá, že $B_2 - A_2 = B_1 - A_1$, tedy $B_2 - A_2 = 0$; z předpokladu rovněž vyplývá, že $A_2 - B_2 = A_1 - B_1$, tedy $A_2 - B_2 \neq 0$. Tedy (A_2/B_2) je privativní ve prospěch A_2.

Nechť opozice (A_1/B_1) je privativní ve prospěch B_1, tedy $A_1 - B_1 = 0$ a $B_1 - A_1 \neq 0$. Z předpokladu vyplývá, že $A_2 - B_2 = A_1 - B_1$, tedy $A_2 - B_2 = 0$; z předpokladu rovněž vyplývá, že $B_2 - A_2 = B_1 - A_1$, tedy $B_2 - A_2 \neq 0$. Tedy (A_2/B_2) je privativní ve prospěch A_2.

Korolár. Privativnost opozice je invariantem proporční relace.

Tvrzení 10. Ekvipolentnost opozice není invariantem proporční relace.

Důkaz. Nechť $A_1 = \{$singulár, nominativ, determinovaný$\}$, $B_1 = \{$plurál, genitiv, nedeterminovaný$\}$, $A_2 = \{$singulár, nominativ, determinovaný, maskulinum, komparativ$\}$, $B_2 = \{$plurál, genitiv, nedeterminovaný, maskulinum, komparativ$\}$. Pak $A_1 \cap B_1 = 0$, tedy opozice (A_1/B_1) je disjunktní. $A_1 - B_1 = \{$singulár, nominativ, determinovaný$\} = A_2 - B_2$, $B_1 - A_1 = \{$plurál, genitiv, nedeterminovaný$\} = B_2 - A_2$, tedy opozice (A_1/B_1) je proporční s (A_2/B_2). Opozice (A_2/B_2) však není disjunktní, nýbrž ekvipolentní, neboť $A_2 \cap B_2 = \{$maskulinum, komparativ$\} \neq 0$.

Z tohoto důkazu také vyplývá, že ani disjunktnost opozice není invariantem proporční relace.

Tvrzení 11. Být vlastní opozicí není invariantem proporční relace.

Důkaz. Nechť $A_1 = \{$nominativ$\}$, $B_1 = \{$singulár, nominativ$\}$, $A_2 = 0$, $B_2 = \{$singulár$\}$. Pak $A_1 - B_1 = 0 = A_2 - B_2$, $B_1 - A_1 = \{$singulár$\} = B_2 - A_2$, tedy opozice (A_1/B_1) je proporční s (A_2/B_2). Avšak opozice (A_2/B_2) je nevlastní, zatím co opozice (A_1/B_1) je vlastní.

14. Homogenní a singulární opozice

Nyní zavedeme nový typ relace mezi opozicemi, totiž relaci homogennosti. Opozice (A_1/B_1) je homogenní s opozicí (A_2/B_2), jestliže $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2$, jinými slovy, jestliže obě opozice mají stejný základ. (A_1/B_1) a (A_2/B_2) tvoří homogenní pár.

Jestliže opozice (A/B) není homogenní s žádnou opozicí z množiny $\mathscr{A}$ mimo opozici (B/A), říkáme, že opozice (A/B) je singulární v $\mathscr{A}$.

Příklad 1. $A_1 = \{$červená, žlutá$\}$, $B_1 = \{$zelená, žlutá$\}$, $A_2 = \{$bílá, žlutá$\}$, $B_2 = \{$modrá, žlutá$\}$. Pak $A_1 \cap B_1 = \{$žlutá$\} = A_2 \cap B_2$, tedy (A_1/B_1) je homogenní s (A_2/B_2).

Příklad 2. $A_1 = \{$nepárová, bilabiála, spiranta$\}$, $B_1 = \{$neznělá, labiodentála, spiranta$\}$, $A_2 = \{$znělá, labiodentála, spiranta$\}$, $B_2 = \{$nepárová, velára, spiranta$\}$. Pak $A_1 \cap B_1 = \{$spiranta$\} = A_2 \cap B_2$, tedy opozice (A_1/B_1) je homogenní s (A_2/B_2). Opozice mezi rumunskými fonémy W a F je tedy homogenní s opozicí mezi V a H.

Příklad 3. $A_1 = \{$singulár, nominativ, determinovaný$\}$, $B_1 = \{$singulár, genitiv, nedeterminovaný$\}$, $A_2 = \{$singulár, nominativ, nedeterminovaný$\}$, $B_2 = \{$singulár, genitiv, determinovaný$\}$. Pak $A_1 \cap B_1 = \{$singulár$\} = A_2 \cap B_2$. (A_1/B_1) je tedy homogenní s (A_2/B_2).

Příklad 4. $\mathscr{A} = \mathscr{A}_f$. $A = \{$explozíva, neznělá, velární$\}$, $B = \{$explozíva, znělá, velární$\}$. Pak $A \cap B = \{$explozíva, velární$\}$. V rumunštině tento základ nemá žádná jiná opozice v množině $\mathscr{A}_f$; opozice (A/B) (tj. opozice mezi souhláskami K a G) je tedy singulární v $\mathscr{A}_f$.

Příklad 5. $A_1 = \{$singulár, nominativ, determinovaný$\}$, $B_1 = \{$plurál, nominativ, determinovaný$\}$, $A_2 = \{$singulár, nominativ, determinovaný, maskulinum, komparativ$\}$, $B_2 = \{$plurál, nominativ, determinovaný, femininum, superlativ$\}$. Pak $A_1 \cap B_1 = \{$nominativ, determinovaný$\} = A_2 \cap B_2$, tedy opozice (A_1/B_1) je homogenní s (A_2/B_2). Z toho vyplývá, že opozice (A_1/B_1) není singulární v $\mathscr{A}_m$.

Uvažujme nyní množinu Γ, jejímiž prvky jsou množiny vytvořené vždy z jedné hodnoty čísla, jedné hodnoty pádu a jedné hodnoty determinovanosti. Množina Γ je tedy vytvořena z množin hodnot rumunských substantiv. Nechť $\mathscr{A}_{\text{subst}}$ znamená množinu všech opozic vytvořených z prvků množiny Γ. Výše uvažovaná opozice mezi A_1 a A_2 je singulární v množině $\mathscr{A}_{\text{subst}}$, neboť $A_1 - A_2 = \{$singulár$\}$, $A_2 - A_1 = \{$plurál$\}$ a neexistují jiné hodnoty čísla než singulár a plurál.

Příklad 6. V němčině je opozice mezi T a D singulární, neboť to jsou jediné dentální explozívy.

V témž jazyce je opozice mezi fonémy D a B homogenní s opozicí mezi fonémy D a G, protože jejich společný základ je slabý závěr.

Příklad 7. Ve francouzštině je opozice mezi fonémy D a N singulární.

15. Roztřídění nesingulárních opozic

Buď (A/B) nesingulární opozice. Říkáme, že (A/B) je nesingulární opozice prvního řádu, jestliže existuje konečná posloupnost $A_1, A_2, \ldots, A_n$ taková, že $A = A_1$, $B = A_n$ a všechny opozice (A_i/A_{i+1}), kde $i = 1, \ldots, n - 1$, jsou singulární. Nejmenší počet členů majících tyto vlastnosti určuje stupeň nesingulárnosti opozice (A/B).

Nesingulární opozice prvního řádu jsou rovněž dvojího druhu: lineární, je-li odpovídající posloupnost $A_1, \ldots, A_n$ jednoznačně určena, nelineární, je-li tomu naopak.

Každá nesingulární opozice, která není prvního řádu, se definuje jako opozice řádu druhého.

Příklad 1. V němčině je opozice mezi fonémy x a η nesingulární a lineární, neboť X, K, G, η je jediná posloupnost fonémů mající žádané vlastnosti. Stupeň nesingulárnosti je zde 4.

Příklad 2. V němčině je opozice mezi fonémy U a E nesingulární a nelineární, protože existují tyto čtyři posloupnosti: 1. U, O, $\bar{O}$, E; 2. U, $\bar{U}$, $\bar{O}$, E; 3. U, $\bar{U}$, I, E; 4. U, O, A, $\bar{A}$, E; všechny mají přitom žádané vlastnosti. Stupeň nesingulárnosti je zde opět 4.

16. Identické opozice

Říkáme, že dvě opozice (A_1/B_1) a (A_2/B_2) splývají (nebo jsou identické) a píšeme $(A_1/B_1) \equiv (A_2/B_2)$, jestliže $A_1 = A_2$ a $B_1 = B_2$.

Tvrzení 12. Je-li opozice (A_1/B_1) proporční a homogenní s (A_2/B_2), pak $(A_1/B_1) \equiv (A_2/B_2)$.

Důkaz. Z předpokladu proporčnosti vyplývá $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$, $B_1 - A_1 = B_2 - A_2$. Z předpokladu homogennosti vyplývá $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2$. Avšak $A_1 = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 - B_1)$, $A_2 = (A_2 \cap B_2) \cup (A_2 - B_2)$, tedy $A_1 = (A_2 \cap B_2) \cup (A_2 - B_2) = A_2$. Rovněž $B_1 = (B_1 \cap A_1) \cup (B_1 - A_1)$, $B_2 = (B_2 \cap A_2) \cup (B_2 - A_2)$, tedy $B_1 = B_2$.

17. Invarianty relace homogennosti

Tvrzení 13. Je-li opozice (A_1/B_1) nevlastní nebo disjunktní a opozice (A_2/B_2) je homogenní s (A_1/B_1), pak opozice (A_2/B_2) je rovněž nevlastní nebo disjunktní (jinými slovy to, že opozice je nevlastní nebo disjunktní, je invariant relace homogennosti).

Důkaz. Z disjunktnosti opozice (A_1/B_1) vyplývá, že $A_1 \cap B_1 = 0$. Z předpokladu homogennosti vyplývá, že $A_2 \cap B_2 = A_1 \cap B_1$, tedy $A_2 \cap B_2 = 0$. Neplatí-li tedy $A_2 = 0$ nebo $B_2 = 0$, pak je opozice (A_2/B_2) disjunktní.

Z toho, že opozice (A_1/B_1) je nevlastní, vyplývá $A_1 = 0$ nebo $B_1 = 0$. Zvolme $A_1 = 0$. Pak $A_1 \cap B_1 = 0$. Ale (A_2/B_2) je homogenní s (A_1/B_1), tedy $A_2 \cap B_2 = 0$, a proto opozice (A_2/B_2) je buď nevlastní, nebo disjunktní.

Tvrzení 14. Privativnost opozice není invariant relace homogennosti.

Důkaz. Nechť $A_1 = \{\text{nominativ}\}$, $B_1 = \{\text{singulár, nominativ}\}$, $A_2 = \{\text{plurál, nominativ}\}$, $B_2 = B_1$. Pak $A_1 \cap B_1 = \{\text{nominativ}\} = A_2 \cap B_2$, tedy (A_1/B_1) je homogenní s (A_2/B_2). Avšak opozice (A_1/B_1) je privativní, zatímco opozice (A_2/B_2) je ekvipolentní. Důkaz tvrzení 14 je i důkazem

Tvrzení 15. Ekvipolentnost opozice není invariant relace homogennosti.

18. Nezávislost některých typů opozic a jejich kvantitativní vztahy

Uvažujme tyto čtyři typy opozic: 1. singulární a neizolovaná, 2. singulární a izolovaná, 3. neizolovaná a nesingulární, 4. izolovaná a nesingulární. Logická nezávislost těchto čtyř typů je bezprostřední. Uvažujeme-li německé fonémy *P*, *B*, *R*, *L*, *T* a *Š*, dostaneme tyto příklady: typ 1: (P/B), typ 2: (R/L), typ 3: (P/T), typ 4: $(P/Š)$.

Podle Trubeckého [148] je v každém fonologickém systému izolovaných opozic více než neizolovaných. V němčině převažují mezi singulárními opozicemi opozice neizolované, zatímco mezi opozicemi nesingulárními převažují opozice izolované. Nejvíce je opozic výše uvedeného typu 4, nejméně je opozic typu 1. Opozic typu 3 je více než opozic typu 2.

19. Přehled invariantů

V tabulce 2 podáváme přehled vlastností invariantních vzhledem k relaci proporcionality a homogennosti. Invariantnost označujeme znakem +, její negaci znakem −. Privativní opozici ve prospěch prvního členu nazveme privativní zprava, privativní opozici ve prospěch druhého členu nazveme privativní zleva.

Tab. 2

Typ opozice	Relace proporcionality	Relace homogennosti
1. Nulová	+	−
2. Vlastní	−	−
3. Privativní	+	−
4. Ekvipolentní	−	−
5. Disjunktní	−	−
6. Ekvipolentní nebo disjunktní	+	−
7. Nevlastní nebo disjunktní	−	+
8. Privativní zleva	+	−
9. Privativní zprava	+	−

20. Souvislost s některými pojmy zavedenými Trubeckým a Cantineauem. Charakteristika opozice

Opozice, mezi nimiž je relace homogennosti, odpovídají opozicím, které Trubeckoj nazývá „multilaterální". Singulární opozice odpovídají bilaterálním opozicím Trubeckého. Název „multilaterální opozice" je nevhodný a vede k nedorozuměním, neboť nevystihuje tu skutečnost, že nejde tolik o typ opozice jako o typ relace mezi opozicemi.

Disjunktním opozicím Trubeckoj nevěnoval dostatečnou pozornost. Zahrnul je do třídy opozic ekvipolentních, které definoval tím, že rozdílové množiny jsou neprázdné. Disjunktními opozicemi se však zabýval Cantineau, který je nazval „exteriorní relace". Jak jsme již řekli, Cantineau navrhl užívat místo termínu „opozice" označení „relace". Zdá se nám vhodnější užívat jednou toho, podruhé onoho termínu, jak jsme již podotkli v úvodní kapitole; bylo by stylisticky neobratné, kdybychom zde byli užili označení „relace mezi relacemi" nebo „opozice mezi opozicemi" místo spojení „relace mezi opozicemi".

Termínům „privativní opozice" a „základ opozice" dává Trubeckoj podobný význam jako my.

Sjednocení rozdílových množin opozice odpovídá u Trubeckého „charakteristika opozice". Je-li dána opozice (A/B), její charakteristika je tedy $(A - B) \cup$

$\cup (B - A)$. Tento výraz utvořený pomocí množin A a B se v teorii množin nazývá symetrická diference množin A a B a označuje se $A \Delta B$. Pro množinu $A \Delta B$ zavedeme i my název charakteristika opozice (A/B).

Pojmy uvedené v kapitole 15 pocházejí od Trubeckého [148].

Trubeckoj se rovněž zabýval tzv. stupňovými opozicemi; ty však, jak poznamenal Cantineau [23], jsou jen zvláštním případem opozic privativních.

Jak ukazuje tabulka 2, relace proporcionality připouští daleko více invariantů než relace homogennosti; relace proporcionality má proto v jazyce nesrovnatelně větší úlohu. Jak dále vyplývá z tabulky, ekvipolentní a disjunktní opozice nejsou invarianty relace proporcionality, ale je jím opozice, která je logickým součtem obou (viz 6. řádka tabulky). To plně odpovídá pojetí Trubeckého. Trubeckoj se nezabýval typy opozic, které uvádíme na 4. a 5. řádce tabulky, ale zato věnoval pozornost typu opozice, který uvádíme na řádce 6. a který nazval „ekvipolentní opozice". Jestliže vezmeme v úvahu i to, že Trubeckoj se nezabýval ani opozicemi uvedenými na řádce 2. a 7., vidíme, že intuitivně zcela dobře chápal úlohu invariantů; zabýval se totiž jen těmi typy opozic, které jsou invariantní vzhledem k relaci proporcionality, i když to nikde explicitně neřekl.

21. Společné rysy relace rovnosti, proporcionality a homogennosti

V následujících výkladech ukážeme, že určité typy relací, kterými jsme se dosud zabývali, mají přes svou rozmanitost mnoho společného.

Uvažujme nejprve relaci rovnosti mezi množinami. Každá množina A se rovná sama sobě: $A = A$. Platí-li totiž $x \in A$, pak opravdu $x \in A$, tedy $A \subseteq A$ a tedy $A = A$. Říkáme, že relace rovnosti je reflexívní. Jestliže $A = B$, pak $B = A$, neboť z $A = B$ vyplývá, že $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$ a tedy $B = A$; říkáme, že relace rovnosti je symetrická. Jestliže $A = B$ a $B = C$, pak $A = C$; z $A = B$ a $B = C$ totiž vyplývá, že $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$ a tedy $A \subseteq C$; z $C = B$ a $B = A$ naopak vyplývá, že $C \subseteq B$ a $B \subseteq A$ a tedy $C \subseteq A$. Z $A \subseteq C$ a $C \subseteq A$ vyplývá, že $A = C$. Říkáme, že relace rovnosti je tranzitivní.

Mějme nyní množinu opozic $\mathscr{A}$. Každá opozice (A/B) je proporční sama se sebou: $(A/B) \sim (A/B)$. To je reflexívnost relace proporcionality. Jestliže $(A_1/B_1) \sim (A_2/B_2)$, pak $(A_2/B_2) \sim (A_1/B_1)$. Z $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$ a ze symetričnosti relace rovnosti totiž vyplývá, že $A_2 - B_2 = A_1 - B_1$, a z $B_1 - A_1 = B_2 - A_2$ zase vyplývá, rovněž vzhledem k symetričnosti relace rovnosti, že $B_2 - A_2 = B_1 - A_1$. Tak jsme došli k zjištění symetričnosti relace proporcionality. Konečně můžeme snadno dokázat na základě tranzitivnosti relace rovnosti, že jestliže $(A_1/B_1) \sim (A_2/B_2)$ a $(A_2/B_2) \sim (A_3/B_3)$, pak $(A_1/B_1) \sim (A_3/B_3)$. Z $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$ a z $A_2 - B_2 = A_3 - B_3$ totiž vyplývá, že $A_1 - B_1 = A_3 - B_3$, a z $B_1 - A_1 = B_2 - A_2$ a z $B_2 - A_2 = B_3 - A_3$ vyplývá, že $B_1 - A_1 = B_3 - A_3$. Tak jsme došli k zjištění tranzitivnosti relace proporcionality.

Podobným způsobem můžeme dojít k zjištění, že obdobné vlastnosti má i relace homogennosti: každá opozice je homogenní sama se sebou; je-li (A_1/B_1) homogenní s (A_2/B_2), pak (A_2/B_2) je homogenní s (A_1/B_1); jestliže (A_1/B_1) je homogenní s (A_2/B_2) a (A_2/B_2) je homogenní s (A_3/B_3), pak (A_1/B_1) je homogenní s (A_3/B_3).

22. Definice ekvivalence

Spojením tří uvedených vlastností relace rovnosti, proporcionality a homogennosti je možno dojít k těmto shrnujícím závěrům:

Buď R relace definovaná mezi prvky množiny E. Píšeme xRy právě tehdy, když prvek x je v relaci R s prvkem y. Předpokládejme, že jsou splněny tyto tři vlastnosti:

1. pro každé $x \in E$ platí xRx (reflexívnost);
2. jestliže platí $x \in E$, $y \in E$ a xRy, pak platí yRx (symetričnost);
3. jestliže platí $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$, xRy a yRz, pak platí xRz (tranzitivnost).

Kdykoli relace R definovaná mezi prvky množiny E má vlastnosti 1, 2 a 3, říkáme, že R je ekvivalencí na E. Jestliže platí xRy, říkáme, že x je ekvivalentní s y. Na základě toho můžeme prohlásit, že:

relace rovnosti je ekvivalencí v každém systému množin;
relace proporcionality je ekvivalencí v každé množině opozic;
relace homogennosti je ekvivalencí v každé množině opozic.

23. Základní teorém o ekvivalencích

Teorém 1. *Buď R ekvivalence na E. Množina E se dělí na jednu nebo několik podmnožin, majících tyto vlastnosti: 1. každý prvek množiny E patří do jedné a jen jedné z těchto podmnožin; 2. jestliže x a y patří do téže podmnožiny, pak platí xRy; jestliže x a y patří do různých podmnožin, pak x není v relaci R s prvkem y.*

Důkaz: Položme

$$T(a) = \{y; y \in E, aRy\}.$$

Protože relace R je reflexívní, platí $a \in T(a)$ pro $a \in E$, tedy $E = \bigcup_{a \in E} T(a)$. Pro $x \in T(a)$, $y \in T(a)$ platí vzhledem k symetričnosti a tranzitivnosti relace R vztah xRy. Jestliže tedy $a \in E$ a $b \in E$, pak buď $T(a) = T(b)$ nebo $T(a) \cap T(b) = 0$. Jestliže totiž $T(a) \cap T(b) \neq 0$, pak existuje prvek $x \in T(a) \cap T(b)$ a na základě definice množin $T(a)$ a $T(b)$ platí aRx a bRx.

Mějme nyní jakýkoli prvek $y \in T(a)$; tedy aRy. Protože relace R je symetrická a tranzitivní, z formulí bRx, aRx a aRy okamžitě vyplývá bRy, což je důkazem toho, že $y \in T(b)$. Tedy $T(a) \subseteq T(b)$. Podobně je možno dokázat, že $T(b) \subseteq T(a)$ a tedy

$T(a) = T(b)$. Z toho vyplývá, že $T(a) \cap T(b) \neq 0$ právě tehdy, když $T(a) = T(b)$. Tím je teorém 1 dokázán.

24. Ekvivalenční třídy (třídy abstrakce). Třídy proporčních a homogenních opozic

Podmnožiny E z teorému 1 se nazývají ekvivalenční třídy. Ekvivalenční třída vzhledem k relaci R je vytvořena z úhrnu prvků množiny E, které jsou ekvivalentní s daným prvkem. Abychom naznačili, že tyto třídy závisejí na volbě relace R, můžeme je nazývat R-ekvivalenční třídy. V tom zvláštním případě, kdy E je množina opozic a R je relace proporcionality, nazveme ekvivalenční třídy třídami proporčních protikladů nebo zkráceně proporčními třídami. Je-li R relace homogennosti, obdržíme třídy homogenních protikladů nebo zkráceně homogenní třídy. Z hořejšího teorému vyplývá, že určitá opozice patří do jediné třídy proporční a do jediné třídy homogenní. Vzhledem k tomu, že dvě různé opozice nemohou být současně proporční a homogenní, je opozice zcela určena uvedením proporční a homogenní třídy, do nichž patří (viz tvrzení 12 výše).

Je zajímavé zjistit, v čem spočívá nejen podobnost, ale i rozdíl mezi opozicemi, které patří do téže proporční třídy. Tím se zabývají tvrzení 16 a 17.

25. Struktura proporčních tříd

Tvrzení 16. Je-li opozice (A_1/B_1) proporční s opozicí (A_2/B_2), nastává jeden z těchto dvou případů:

$$1.\ A_1 = A_2, B_1 = B_2\,; \quad 2.\ A_1 \neq A_2, B_1 \neq B_2\,.$$

Důkaz. K případu 1. dochází, jestliže obě opozice splývají. Dokážeme, že kdykoli tyto opozice nesplývají, platí případ 2. Představme si, že obě opozice jsou proporční a mají jako první člen tutéž množinu A: $(A/B_1) \sim (A/B_2)$.

Pak platí:

$$A - B_1 = A - B_2\,, \tag{1}$$

$$B_1 - A = B_2 - A\,. \tag{2}$$

Z (1) vyplývá, že $A - (A - B_1) = A - (A - B_2)$. Ale $A - (A - B_1) = B_1 \cap A$, $A - (A - B_2) = B_2 \cap A$, tedy

$$B_1 \cap A = B_2 \cap A\,. \tag{3}$$

Protože $B_1 = (B_1 - A) \cup (B_1 \cap A)$, $B_2 = (B_2 - A) \cup (B_2 \cap A)$, vyplývá z (2) a (3), že $B_1 = B_2$.

Není tedy možné, aby se dvě proporční opozice lišily jedním členem, a nelišily se také druhým členem.

Tvrzení 17. Tatáž množina se nemůže účastnit dvou různých opozic, které jsou navzájem proporční.

Důkaz. V této větě je proti větě předcházející nové to, že z $(A/B_1) \sim (B_2/A)$ vyplývá $B_1 = B_2$. Abychom tuto implikaci dokázali, rozepišme proporční relaci jako

$$A - B_1 = B_2 - A\,,$$

$$B_1 - A = A - B_2\,.$$

Tyto relace jsou možné právě tehdy, když $A - B_1 = B_2 - A = B_1 - A = A - B_2 = 0$; kdyby totiž jeden z těchto rozdílů, např. $A - B_1$, byl neprázdný, vyplývalo by z $x \in A - B_1$, že $x \in A$, tedy $x \in B_2 - A$, což by odporovalo první relaci. Platí tedy $A = B_1 = B_2$ a tvrzení je dokázáno.

26. Korelace. Řetězy homogenních opozic

Pojmy „třída proporčních opozic" a „třída homogenních opozic" zpřesňují a syntetizují některé pojmy uvažované Trubeckým, například pojem korelace (= třída proporčních a privativních opozic) nebo pojem řady proporčních opozic, i některé pojmy uvažované Cantineauem, jako je pojem řetěz homogenních opozic.

Poučky o invariantnosti některých typů opozic vzhledem k relaci proporcionality nebo homogennosti mohou být nyní vyjádřeny tak, jak ukazuje tab. 2 na str. 31.

Jestliže proporční třída obsahuje nějakou privativní opozici, pak každá opozice této třídy je privativní; jestliže proporční třída obsahuje nějakou nulovou opozici, pak každá opozice této třídy je nulová; jestliže proporční třída obsahuje nějakou ekvipolentní nebo disjunktní opozici, pak každá opozice této třídy je ekvipolentní nebo disjunktní atd.

Z toho tedy vyplývá, že mezi různými proporčními třídami jsou nejzajímavější právě ty, které jsou vytvořeny z opozic majících invariantní strukturu vzhledem k relaci proporcionality. Podle tabulky 2 jsou to tyto třídy: a) třídy nulových opozic, b) třídy privativních opozic, c) třídy ekvipolentních nebo disjunktních opozic, d) třídy opozic privativních zleva, e) třídy opozic privativních zprava.

27. Zobecnění pojmu korelace

Zdá se tedy, že jsme stejně oprávněni uznat nezávislost tříd typů a), c), d), e) jako tříd typu b), které Trubeckoj nazval korelacemi a kterým věnoval zvláštní pozornost. To nemohlo zůstat bez povšimnutí; André Martinet [104] později zahrnul pod název korelace i proporční třídy typu c). (Martinet stejně jako Trubeckoj užívá termínu „ekvipolentní" pro případy, kdy my říkáme „ekvipolentní nebo disjunktní".) Proporční třídy typu a) jsou triviální jednak proto, že jsou vytvořeny z nulových opozic, ale také proto, že dvě nulové opozice jsou navzájem vždy proporční a tedy všechny nulové opozice tvoří jedinou proporční třídu.

Třídám typu d) a e) jazykovědci nevěnovali zvláštní pozornost.

Rozšíříme-li Martinetovu definici, ale ponecháme-li jí její náplň, nazveme korelací každou proporční třídu typu a), b), c), d) nebo e). Obecněji řečeno je korelace proporční třída vytvořená u opozic majících invariantní strukturu vzhledem k relaci proporcionality. V tomto smyslu každý typ opozice, který je invariantní vzhledem k relaci proporcionality, vytváří typ korelace. Korelace jsou tedy zvláštním případem proporčních tříd, který je však právě nejzajímavější. Proporční třídy, jako jsou f) třídy vlastních opozic, g) třídy ekvipolentních opozic, h) třídy disjunktních opozic, i) třídy nevlastních nebo disjunktních opozic, jsou totiž vytvořeny, jak ukazuje tab. 2, z opozic, které nejsou invariantní vzhledem k relaci proporcionality. Třída typu f), g), h), nebo i) je svým skladem heterogenní; vnitřní struktura jejích opozic se neuchovává relací proporcionality. Proto také je jejich vědecká zajímavost menší.

28. Jazyky a kontexty

Nechť A je konečná množina prvků zvaných slova. A je slovník. Uvažujme množinu konečných posloupností prvků množiny A, kterou označíme $\mathcal{F}(A)$ (týž prvek množiny A se může v téže posloupnosti několikrát opakovat); množina $\mathcal{F}(A)$, na které je definována asociativní operace zřetězení, je tzv. volný monoid generovaný množinou A nebo volná pologrupa s generátory v množině A. Jakákoli část $L \subseteq \mathcal{F}(A)$ tvoří jazyk nad slovníkem A. Zvláštní případy jsou $\mathcal{F}(A)$ jako univerzální jazyk nad A a 0 jako prázdný jazyk. Prvky množiny $\mathcal{F}(A)$ jsou fráze. K frázím jazyka $\mathcal{F}(A)$ patří také prázdná fráze, která se značí 0 nebo Λ a která má vlastnosti $0x = x0 = x$ pro každé $x \in \mathcal{F}(A)$.

Každou uspořádanou dvojici $\{x, y\}$ takovou, že $x \in \mathcal{F}(A)$ a $y \in \mathcal{F}(A)$, nazveme kontextem nad A. Jestliže $z \in \mathcal{F}(A)$ a $xyz \in L$, říkáme, že z je připuštěno v L kontextem $\{x, y\}$ nebo že $\{x, y\}$ je kontextem fráze z vzhledem k L.

Příklad 1. Je-li A slovník francouzského jazyka, pak množina všech vět, které se vyskytují v díle Anatola France, tvoří jazyk nad A. Zde je $\mathcal{F}(A)$ vytvořeno všemi konečnými posloupnostmi francouzských slov; například posloupnost „vous je donnons écartaient" je prvkem množiny $\mathcal{F}(A)$.

Příklad 2. Je-li A množina písmen latinské abecedy, pak latinská slova tvoří jazyk L nad A. Kontextem vzhledem k L je například {op, ido}. V tomto kontextu je připuštěno písmeno p, ale ne písmeno s. V latině skutečně existuje slovo oppido, ale neexistuje slovo opsido. Přesto je opsido prvkem množiny $\mathcal{F}(A)$.

Příklad 3. Nechť $A = \{a, b, c\}$, $L = \{a \subset a, ab \subset ab, abb \subset abb, \ldots, \underbrace{abb \ldots b}_{n\text{-krát}} \subset \underbrace{abb \ldots b}_{n\text{-krát}}, \ldots\}$. Tento jazyk zkoumal Haskell B. Curry [32]: interpretujeme-li a jako nulu, b jako operátor posloupnosti a c jako relaci rovnosti, pak posloupnost, jejíž n-tý člen je $abb \ldots b$, je právě posloupnost přirozených čísel, zatímco prvky množiny L jsou skutečné rovnosti mezi přirozenými čísly. Předpokládáme-li nyní, že (správná nebo nesprávná) matematická tvrzení byla vyjádřena formou (správných nebo nesprávných) rovností mezi kladnými celými čísly, může být L interpretováno jako množina teorémů. Prvek $\subset$ je připuštěn v L kontextem $\underbrace{ab \ldots b}_{m\text{-krát}}$ $\underbrace{ab \ldots b}_{n\text{-krát}}$ právě tehdy, když $m = n$.

Poznámka. Místo $\underbrace{xx \ldots x}_{n\text{-krát}}$ můžeme psát x^n.

29. Distribuční třídy v širším a užším slova smyslu

Buď X množina kontextů nad daným slovníkem A a L jazyk nad A. Přiřaďme každé frázi $x \in \mathcal{F}(A)$ určitou část množiny X, totiž množinu kontextů fráze x vzhledem k L, kterou označíme $\mathcal{C}(x)$. Zaveďme nyní v množině $\mathcal{F}(A)$ binární relaci ϱ_L, kterou budeme definovat takto: pro $x \in \mathcal{F}(A)$, $y \in \mathcal{F}(A)$ platí $x\varrho_L y$, jestliže $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$. Je zřejmé, že ϱ_L je ekvivalence v $\mathcal{F}(A)$. Přitom ϱ_L-ekvivalenční třídy v $\mathcal{F}(A)$ nazveme distribučními třídami v širším slova smyslu vzhledem k L.

Uvažujme omezení relace ϱ_L na množinu A; toto omezení je binární relací λ definovanou v A a je jasné, že λ_L je ekvivalence v A. Pak budou λ_L-ekvivalenční třídy distribuční třídy v užším slova smyslu vzhledem k L nebo prostě distribuční třídy vzhledem k L. Není-li nebezpečí nedorozumění, o jaký jazyk jde, je možno vypustit slova „vzhledem k L".

Označíme-li $\mathcal{F}(a)$ distribuční třídu v širším slova smyslu obsahující slovo $a \in A$ a $S(a)$ distribuční třídu obsahující slovo a, platí $S(a) \subseteq F(a)$. Jestliže tedy $a\lambda_L b$, pak také $a\varrho_L b$.

Pojem distribuční třídy zavedla deskriptivní lingvistika [59], [42] a v přesnější podobě s ním pracovala O. S. Kulaginová jako s pojmem rodiny [82]. Je zřejmé, že distribuční třída fráze x, chápaná v širším slova smyslu, je vytvořena ze všech frází, vyskytujících se v uvažovaném jazyce L v týchž kontextech jako x. Distribuční třída slova a je vytvořena ze všech slov majících v L přesně tytéž kontexty jako slovo a.

Příklad 1. Je-li A slovník psané francouzštiny a L množina správně tvořených psaných francouzských frází, pak slova „différent", „nul", „légal", „beau", „bref", „muet", „bon", „mou", „caduc", „blanc", „long", „malin" patří všechna do téže distribuční třídy. Slovo „heureux" však nepatří do téže distribuční třídy jako slovo „différent", neboť fráze „Voici deux hommes heureux" je francouzská, zatímco fráze „Voici deux hommes différent" francouzská není.

Příklad 2. Ponecháme-li symbolům A a L tentýž význam jako výše, můžeme konstatovat, že slova „analytique" a „maigre" patří do téže distribuční třídy, zatímco slova „maigre" a „doux" do téže distribuční třídy nepatří. Fráze „une femme maigre" je totiž francouzská, kdežto fráze „une femme doux" francouzská není.

Příklad 3. Je-li A slovník angličtiny a L množina správně tvořených anglických frází, pak fráze „very well" a „very very well" patří do téže distribuční třídy v širším slova smyslu.

30. Distribuční třídy v širším slova smyslu jako třídy kongruenční

Tvrzení 18. Jestliže $x_1 \varrho_L x_2$ a $y_1 \varrho_L y_2$, pak $x_1 y_1 \varrho_L x_2 y_2$.

Důkaz. Máme dokázat, že pro každou dvojici frází $u \in \mathscr{F}(A)$, $v \in \mathscr{F}(A)$ takových, že platí $ux_1y_1v \in L$, platí také $ux_2y_2v \in L$. Ale z $x_1 \varrho_L x_2$ lze odvodit $ux_2y_1v \in L$ a s ohledem na $y_1 \varrho_L y_2$ také $ux_2y_2v \in L$. Ze symetričnosti vyplývá také implikace $ux_2y_2v \in L \Rightarrow ux_1y_1v \in L$, tedy $x_1y_1 \varrho_L x_2y_2$.

Nyní stanovíme relaci mezi ϱ_L-ekvivalenčními třídami na jedné straně a určitými pojmy užívanými v teorii konečných automatů na straně druhé [123].

Buď R ekvivalence na $\mathscr{F}(A)$. Přitom nazveme R invariantní zprava, jestliže pro $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$, $z \in \mathscr{F}(A)$ a xRy platí $xzRyz$. Invariantní zleva je R tehdy, jestliže pro $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$, $z \in \mathscr{F}(A)$ a xRy platí $zxRzy$. Je-li R invariantní zprava i zleva, je relací kongruence v $\mathscr{F}(A)$.

Tvrzení 19. Buď R ekvivalence na $\mathscr{F}(A)$. R je kongruenční relací v $\mathscr{F}(A)$ právě tehdy, když pro $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$, $z \in \mathscr{F}(A)$, $w \in \mathscr{F}(A)$, xRz a yRw platí $xyRzw$.

Důkaz. Nechť je R relace kongruence v $\mathscr{F}(A)$ a nechť platí $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$, $z \in \mathscr{F}(A)$, $w \in \mathscr{F}(A)$, xRz a yRw. Z invariantnosti R zprava vyplývá $xyRzy$. Z invariantnosti R zleva a z yRw lze odvodit $zyRzw$. Z tranzitivnosti R vyplývá $xyRzw$.

Předpokládejme nyní, že pro $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$, $z \in \mathscr{F}(A)$, $w \in \mathscr{F}(A)$, xRz a yRw platí $xyRzw$, a dokažme, že R je invariantní zprava i zleva. Pro $w = y$ skutečně dojdeme k invariantnosti zprava, kdežto pro $z = x$ dojdeme k invariantnosti zleva. Tím je tvrzení 19 dokázáno.

Korolár. Relace ϱ_L je relací kongruence v $\mathscr{F}(A)$.

Důkaz. Stačí vzít v úvahu hořejší tvrzení 18 a 19.

Poznámka: Lingvistická důležitost tvrzení 19 je dána tím, že umožňuje vytvářet ϱ_L-ekvivalentní fráze, jakmile známe λ_L-ekvivalentní slova. Uvedeme jediný příklad: Z toho, že pro psanou francouzštinu platí „capitaine" λ_L „garçon" a „gras" λ_L „vieux", lze na základě tvrzení 19 odvodit, že platí „gras capitaine" ϱ_L „vieux garçon".

31. Distribuční třídy francouzských adjektiv

Abychom osvětlili pojem distribuční třídy, ukážeme, jak vypadá rozdělení většiny francouzských adjektiv do takovýchto tříd. A bude tedy slovník francouzského jazyka, L množina správně tvořených psaných francouzských frází.

1. S (différent) = {différent, nul, légal, beau, bon, ...}
2. S (heureux) = {heureux, épais, faux, vieux, frais, ...}
3. S (analytique) = {analytique, maigre, ...}
4. S (différents) = {différents, cruels, nouveaux, ...}
5. S (différente) = {différente, heureuse, diverse, grasse, ...}
6. S (différentes) = {différentes, heureuses, françaises, ...}
7. S (analytiques) = {analytiques, maigres, larges, ...}

Tyto třídy lze charakterizovat takto: Označme M_s tvar maskulina singuláru, M_p tvar maskulina plurálu, F_s tvar feminina singuláru, F_p tvar feminina plurálu. První třída obsahuje adjektiva ve tvaru M_s taková, že tvary M_s, M_p, F_s a F_p jsou vždy po dvou navzájem odlišné. Druhá třída obsahuje adjektiva ve tvaru M_s taková, že $M_s = M_p \neq F_s \neq F_p$. Třetí třída obsahuje adjektiva ve tvaru M_s taková, že $M_s = F_s \neq M_p = F_p$. Čtvrtá třída obsahuje adjektiva ve tvaru M_p taková, že tvary M_s, M_p, F_s a F_p jsou vždy po dvou navzájem odlišné. Pátá třída obsahuje 1. adjektiva ve tvaru F_s taková, že tvary M_s, F_s, M_p a F_p jsou vždy po dvou navzájem odlišné; 2. adjektiva ve tvaru F_s taková, že $M_s = M_p \neq F_s \neq F_p$. Šestá třída obsahuje 1. adjektiva ve tvaru F_p taková, že M_s, F_s, M_p a F_p jsou vždy po dvou navzájem odlišné; 2. adjektiva ve tvaru F_p taková, že $M_s = M_p \neq F_s \neq F_p$. Sedmá třída obsahuje adjektiva ve tvaru F_p taková, že $M_s = F_s \neq F_p = M_p$.

32. Distribuční třídy rumunských nedeterminovaných adjektiv

Distribuční třídy rumunských nedeterminovaných adjektiv jsou tyto:

1. S (înalt) = {înalt, frumos, corect, mic, nou, folositor, ...}
2. S (frumoasă) = {frumoasă, înaltă, mică, nouă, jună, veche, ...}
3. S (frumoşi) = {frumoşi, corecţi, precoci, folositori, juni, ...}
4. S (înalte) = {înalte, frumoase, groase, ...}
5. S (vechi) = {vechi, căprui, ...}
6. S (precoce) = {precoce, feroce, ...}
7. S (dibaci) = {dibaci, rotofei, ...}
8. S (subţire) = {subţire, mare, moale, verde, ...}
9. S (greoaie) = {greoaie, folositoare, marmoree, ...}
10. S (subţiri) = {subţiri, mari, mici, ...}
11. S (june) = {june, ...}
12. S (maro) = {maro, cumsecade, ...}.

Jestliže na druhé straně uvažujeme v rámci flexe rumunských nedeterminovaných adjektiv různé typy morfologické homonymie, můžeme konstatovat, že z patnácti teoreticky možných typů se jich realizuje pouze devět. Označíme-li M_s tvar pro maskulinum singuláru, M_p tvar pro maskulinum plurálu, F_s tvar pro femininum singuláru a F_p tvar pro femininum plurálu, můžeme konstatovat, že se realizují tyto typy:

$$1.\ \begin{array}{l} M_s \neq M_p,\ M_s \neq F_p,\ M_p \neq F_s \\ \neq \quad\ \neq \\ F_s \neq F_p \end{array}$$

$$2.\ F_p = M_p \begin{array}{l} \not\nearrow M_s \\ \neq \\ \not\searrow F_s \end{array}$$

$$3.\ M_s = F_p \begin{array}{l} \not\nearrow F_s \\ \neq \\ \not\searrow M_p \end{array}$$

$$4.\ F_s = F_p \begin{array}{l} \not\nearrow M_p \\ \neq \\ \not\searrow M_s \end{array}$$

5. $M_s = F_s = F_p \neq M_p$

6. $M_s = M_p = F_p \neq F_s$

7. $M_s = F_s \neq M_p = F_p$

8. $M_s = M_p \neq F_s = F_p$

9. $M_s = F_s = M_p = F_p$

Ostatní z patnácti teoreticky možných typů se nerealizují. Jsou to:

$$10.\ M_s = F_s \begin{array}{l} \not\nearrow F_p \\ \neq \\ \not\searrow M_p \end{array}$$

$$11.\ F_s = M_p \begin{array}{l} \not\nearrow M_s \\ \neq \\ \not\searrow F_p \end{array}$$

$$12.\ M_s = M_p \begin{array}{l} \not\nearrow F_s \\ \neq \\ \not\searrow F_p \end{array}$$

13. $M_s \neq F_s = M_p = F_p$

14. $M_s = F_s = M_p \neq F_p$

15. $M_s = F_p \neq M_p = F_s$.

Je zajímavé, že tentýž typ morfologické homonymie může být realizován v několika distribučních třídách.

Tak typ 1 se realizuje ve třídě 1. (înalt, frumos, ...), 2. (înaltă, frumoasă, ...), 3. (frumoși, corecți, ...) a 4. (înalte, frumoase, ...). Typ 2 se realizuje ve třídě 1. (mic, ...), 2. (mică, ...) a 10. (mici, ...). Typ 3 se realizuje ve třídě 2. (jună, ...), 3. (juni, ...) a 11. (june, ...). Typ 4 se realizuje ve třídě 1. (folositor, ...), 3. (folositori, ...) a 9. (folositoare, ...). Typ 5 se realizuje ve třídě 3. (precoci, ...) a 6. (precoce, ...). Typ 6 se realizuje ve třídě 2. (veche, ...) a 5. (vechi, ...). Typ 7 se realizuje ve třídě 8. (subțire, ...) a 10. (subțiri, ...). Typ 8 se realizuje ve třídě 7. (dibaci, ...) a 9. (dibace, ...). Konečně typ 9 se realizuje pouze ve třídě 12.

33. Schéma společné třem různým pojmům

Tři velmi důležité lingvistické pojmy – řady proporčních opozic, řetězy homogenních opozic a distribuční třídy – tedy všechny vycházejí z téže operace: z rozkladu množiny na ekvivalenční třídy vzhledem k ekvivalenci R. Každý z těchto tří pojmů má jiný lingvistický význam, což se projevuje v různém způsobu výběru množiny a relace R. Ale jakmile nehledíme k povaze množiny a relace R, nelze uvedené tři pojmy rozlišit. V této jejich totožnosti se obráží část toho, čemu někteří lingvisté říkají invariantní struktura jazyka (viz například [141]).

34. Typy distribuce

Pojem distribuce je základní pojem deskriptivní lingvistiky; viz práce [14], [23], [59]. Buď A slovník, L jazyk nad A a $x \in \mathscr{F}(A)$. Distribucí prvku x v širším slova smyslu vzhledem k L nazveme množinu kontextů prvku x vzhledem k L, kterou označíme $\mathscr{C}(x)$, tj. množinu kontextů $\{u, v\}$ takových, že $uvx \in L$. Průnik $A \cap \mathscr{C}(x)$ nazveme distribucí prvku x v užším slova smyslu vzhledem k L. Ve zvláštním případě, kdy $x \in A$, nazveme distribuci prvku x v užším slova smyslu distribucí prvku x. Právě tak nazveme distribucí prvku x jeho distribuci v širším slova smyslu, jestliže $x \,\overline{\in}\, A$.

Reciprocitu dvou frází x a y z distribučního hlediska vystihuje opozice mezi $\mathscr{C}(x)$ a $\mathscr{C}(y)$. Je-li tato opozice disjunktní, říkáme, že x a y jsou v komplementární distribuci. V opačném případě říkáme, že x a y jsou v kontrastní distribuci. Jsou tři druhy kontrastní distribuce: identická distribuce (jestliže $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$), defektivní distribuce (jestliže mezi $\mathscr{C}(x)$ a $\mathscr{C}(y)$ je privativní opozice) a ekvipolentní distribuce (jestliže mezi $\mathscr{C}(x)$ a $\mathscr{C}(y)$ je ekvipolentní opozice). Defektivní distribuce je defektivní ve prospěch x, jestliže opozice mezi $\mathscr{C}(x)$ a $\mathscr{C}(y)$ je privativní ve prospěch $\mathscr{C}(x)$.

Jsou-li x a y v komplementární distribuci nebo je-li jediný kontext společný frázím x a y prázdný, říkáme, že x a y jsou ve slabě komplementární distribuci.

V opačném případě jsou x a y v silně kontrastní distribuci, která je rovněž trojí: silně identická, silně defektivní a silně ekvipolentní.

35. Příklad na typy distribuce

Nechť A = slovník psané francouzštiny, L = množina správně tvořených psaných francouzských frází. Slova bleu a cruel jsou v silně identické distribuci. Slova méchant a jaloux jsou v silně defektivní distribuci ve prospěch jaloux, neboť $\mathscr{C}$(méchant) $\subset \mathscr{C}$(jaloux) (můžeme napsat enfants jaloux, ale nikoli enfants méchant). Slova jaloux a maigres jsou v silně ekvipolentní distribuci; skutečně {hommes, 0} $\in \mathscr{C}$(jaloux) $\cap \mathscr{C}$(maigres), {enfant, 0} $\in \mathscr{C}$(jaloux) $-$ $\mathscr{C}$(maigres), {femmes, 0} $\in \mathscr{C}$(maigres) $-$ $\mathscr{C}$(jaloux).

36. Pojem metrického prostoru

Obvyklá vzdálenost mezi dvěma body v prostoru má tyto tři vlastnosti: je vždy nezáporná; je nulová právě tehdy, když oba body splývají; je symetrická, tj. její hodnota nezávisí na pořadí bodů; vyhovuje pravidlům trojúhelníka, tj. jsou-li dány tři body P, Q, a R, vzdálenost mezi P a R nemůže být větší než součet vzdáleností PQ a QR (jde o dobře známou elementární poučku, podle níž délka žádné strany trojúhelníka není větší než součet délek obou zbývajících stran). Právě tyto čtyři vlastnosti jsou chápány jako definice vzdálenosti v množině, jejíž prvky jsou blíže neurčené povahy. Buď E taková množina.

Předpokládejme, že každému páru prvků množiny $E(x, y)$ bylo přiřazeno reálné číslo (nebo nekonečno ∞) $d(x, y)$ mající tyto vlastnosti:

1. $d(x, y) \geqq 0$
2. $d(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y)$ pro každé $z \in E$.

Za těchto podmínek je d vzdálenost v E; dvojice $\{E, d\}$ je metrický prostor.

Pro každou množinu E existuje vždy vzdálenost v E. Stačí klást $d(x, y) = 1$, jestliže $x \neq y$, a $d(x, y) = 0$, jestliže $x = y$. Mezi vzdálenostmi, které je možno zavést v množině E a kterých je nekonečný počet, si vybíráme tu, která nejlépe vyhovuje povaze prvků množiny E a zkoumanému problému.

Mějme $x \in E$ a reálné číslo r. Koulí $\mathscr{S}(x; r)$ o středu x a poloměru r v prostoru $\{E, d\}$ nazveme množinu prvků $y \in E$ takových, že $d(y, x) < r$.

37. Kontextová vzdálenost

Uvažujme slovník A a jazyk L nad A. Nechť jsou x a y dvě libovolné fráze, tj. dva prvky množiny $\mathscr{F}(A)$. Nemají-li x a y tutéž distribuci vzhledem k L, je zajímavé najít míru rozdílu v distribuci x a y. K jejímu zjištění zavedeme nejprve tento pojem: Posloupnost frází $z_1, \ldots, z_i, z_{i+1}, \ldots, z_n$ je kontextový řetěz od x do y, jsou-li splněny tyto tři podmínky: 1. $z_1 = x$ 2. $z_n = y$, 3. pro $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ jsou fráze z_i a z_{i+1} v silně kontrastní distribuci. Číslo n je délka řetězu. Předpokládejme existenci kontextového řetězu od x do y o délce n. Neexistuje-li žádný jiný kontextový řetěz od x do y o délce menší než n, říkáme, že kontextová vzdálenost mezi x a y se rovná $n - 1$. Neexistuje-li pro dvě fráze x a y žádný kontextový řetěz od x do y, budeme kontextovou vzdálenost mezi x a y považovat za rovnou $+\infty$. Všechny tyto pojmy se samozřejmě týkají jazyka L.

Stanovíme-li konvencí, že budeme kontextovou vzdálenost mezi x a y považovat za rovnou nule právě tehdy, když $x = y$, můžeme konstatovat, že kontextová vzdálenost je skutečná vzdálenost. Z její definice bezprostředně vyplývá její symetričnost. Označíme-li však uvažovanou vzdálenost d, platí $d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y)$, neboť kontextový řetěz od x do z o délce m a kontextový řetěz od z do y o délce n dávají kontextový řetěz od x do y o délce $m + n - 1$; kontextová vzdálenost mezi x a y není tedy nikdy větší než $m + n - 2$. Množina $\mathscr{F}(A)$ se tak stává metrickým prostorem, který nazveme kontextovým prostorem přiřazeným jazyku L.

38. Struktura koulí v kontextovém prostoru

Mějme dánu frázi x a označme $\mathscr{C}^1(x)$ množinu neprázdných kontextů, které připouštějí x.

Mějme dán kontext c a označme $\mathscr{F}(c)$ množinu frází připuštěných kontextem c. Položme $H^0(x) = \{x\}$. Dále položme

$$H^1(x) = \bigcup_{c \in \mathscr{C}^1(x)} \mathscr{F}(c), \quad \mathscr{C}^2(x) = \bigcup_{u \in H^1(x)} \mathscr{C}^1(u), \quad H^2(x) = \bigcup_{v \in \mathscr{C}^2(x)} \mathscr{F}(v)$$

a předpokládejme, že byly definovány množiny $\mathscr{C}^{n-1}(x)$ a $H^{n-1}(x)$. Za těchto podmínek položme

$$\mathscr{C}^n(x) \bigcup_{u \in H^{n-1}(x)} \mathscr{C}^1(u), \quad H^n(x) = \bigcup_{v \in \mathscr{C}^n(x)} \mathscr{F}(v).$$

Teorém 2. *Kontextová vzdálenost mezi frázemi x a y se rovná n právě tehdy, když*

$$y \in H^n(x) - H^{n-1}(x).$$

D ů k a z. Stačí dokázat, že $H^n(x)$ obsahuje přesně ty fráze y, jejichž kontextová vzdálenost od fráze x je menší než n nebo se rovná n. Postupujme rekurentně. Především je jasné, že $H^1(x)$ obsahuje přesně ty fráze, které jsou s frází x v silně kontrastní distribuci. Jsou to právě ty fráze y, jejichž kontextová vzdálenost od x je $\leqq 1$ ($= \mathbf{1}$, jestliže $y \neq x$, $= 0$, jestliže $y = x$). Připusťme nyní, že $H^{n-1}(x) = \{y; d(y, x) \leqq n - 1\} = \mathscr{S}(x; n)$.

Na základě definice množiny $H^n(x)$ je možno konstatovat, že $y \in H^n(x)$ právě tehdy, když existuje fráze $z \in H^{n-1}(x)$ taková, že y a z jsou v silně kontrastní distribuci. Jinými slovy $y \in H^n(x)$ právě tehdy, když existuje $z \in H^{n-1}(x)$ takové, že kontextová vzdálenost mezi y a z je $\leqq 1$ ($= 0$ jen tehdy, když $y \in H^{n-1}(x)$). Ze struktury $H^{n-1}(x)$ je možno odvodit, že $H^n(x)$ obsahuje přesně ty fráze, jejichž kontextová vzdálenost od x je $\leqq n$.

Poznámka 1. Z právě podané úvahy lze odvodit, že $H^1(x) \subseteq H^2(x) \subseteq \ldots \subseteq H^n(x) \subseteq H^{n+1}(x) \subseteq \ldots$

Poznámka 2. Z teorému 2 lze okamžitě odvodit, že v prostorovém kontextu

$$\mathscr{S}(x; r) = H^n(x),$$

kde $n < r \leqq n + 1$. Každá koule je tedy v podstatě množinou $H^n(x)$.

39. Několik příkladů kontextových prostorů

Uvažujme slovník $A = \{$the, a, book, books, three$\}$ a položme $L = \{$the book, the books, a book, three books$\}$. Jde o velmi malý zlomek anglického jazyka, který však zachycuje několik aspektů jeho gramatiky. Nejmenší kontextový řetěz od a do three je tento: a, the, three. Slova *a* a *the* mají skutečně společný kontext (0, book), zatímco *the* a *three* mají společný kontext (0, books), slova *a* a *three* však společný kontext nemají. Tedy d (a, three) $= 2$. Analogicky můžeme konstatovat, že d (book, books) $= 1$ a d (book, three books) $= +\infty$. Také d (a book, the book) $= +\infty$, protože *a book* a *the book* nemají společný neprázdný kontext. Z toho vyplývá, že $\mathscr{S}$(a; 3) $= \{$a, the, three$\} = \mathscr{S}$(a; n) pro každé $n \geqq 3$; $\mathscr{S}$(book; 2) $= \{$book, books$\}$. Z teorému 2 a z příslušných poznámek vyplývá, že H^2(a) $= \mathscr{S}$(a; 3), H^1(book) $= \mathscr{S}$(book; 2).

Abychom uvedli jiný příklad, uvažujme slovník $A = \{$a, b, n, p, r, t, u$\}$ a položme $L = \{$rar, par, pat, tun, bun$\}$. Jde zde o množinu rumunských slov; prvky množiny A jsou fonémy rumunského jazyka. Jasně vyplývá, že d(p, r) $= d$(t, r) $= d$(b, t) $= 1$, d(p, t) $= d$(r, b) $= 2$, d(p, b) $= 3$.

40. Parazitní a dílčí fráze vzhledem k určitému jazyku

Uvažujme slovník A. Budeme rozlišovat tyto čtyři možnosti jazyka L nad A: α) existuje celé číslo N takové, že pro $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$ platí $d(x, y) \leqq N$; β) pro jakékoli $x \in \mathscr{F}(A)$ a $y \in \mathscr{F}(A)$ je vzdálenost $d(x, y)$ konečná; γ) existuje celé číslo N takové, že pro $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$ platí $d(x, y) \leqq N$ nebo $d(x, y) = +\infty$; δ) neplatí žádný z těchto tří případů.

Abychom porozuměli významu těchto úvah, musíme si všimnout rozdílu v povaze určitých prvků množiny $\mathscr{F}(A)$. Fráze, které nepatří do L, jsou dvojí: jestliže taková fráze, kterou označíme z, není obsažena v žádné frázi jazyka L, tj. jestliže není připuštěna žádným kontextem týkajícím se L, pak budeme z považovat za parazitní frázi vzhledem k L. V opačném případě budeme z považovat za dílčí frázi vzhledem k L. Abychom uvedli příklad, položme $A = \{a, b\}$ a $L = \{a, ab, abb, \ldots, \underbrace{ab \ldots b}_{n\text{-krát}}, \ldots\}$.

Každá fráze začínající slovem b a obsahující alespoň jednou slovo a, právě tak jako každá fráze končící slovem a a mající délku > 1, je parazitní fráze vzhledem k L. Každá fráze, která neobsahuje slovo a, je dílčí fráze vzhledem k L.

Případ parazitních frází je charakterizován těmito dvěma tvrzeními:

Tvrzení 20. Všechny parazitní fráze vzhledem k (danému, ale libovolnému) L tvoří jedinou distribuční třídu v širším slova smyslu.

Tvrzení 21. Je-li x parazitní fráze vzhledem k L, pak $d(x, y) = +\infty$ pro každé $y \in \mathscr{F}(A)$, $y \neq x$.

Důkaz. Buďte x a y dvě parazitní fráze vzhledem k L. Pravdivost implikace $uxv \in L \Rightarrow uyv \in L$ je triviální, neboť vztah $uxv \in L$ není nikdy realizován. Tím je tvrzení 20 dokázáno.

Buď x parazitní a $y \in \mathscr{F}(A)$, $y \neq x$. Existence kontextového řetězu $z_1, \ldots, z_n$ od x do y (tedy pro $x = z_1$, $y = z_n$) implikuje silně kontrastní distribuci mezi x a z_2, tedy existenci neprázdného kontextu, který připouští x; to však je nemožné, neboť x je parazitní.

Tvrzení 20 a 21 mají dosti paradoxní charakter: existence parazitní fráze zavádí vždy nekonečné kontextové vzdálenosti, a to i uvnitř distribuční třídy v širším slova smyslu.

Lze tedy konstatovat, že existence parazitní fráze vylučuje případy α a β popsané výše. Ale stává se, že k případu γ dochází bez parazitních frází. Z toho je vidět, že je třeba ze všech úvah o jazyce L vyloučit fráze, které jsou vzhledem k L parazitní.

41. Kontextový průměr jazyka

Uvažujme jazyk L nad slovníkem A. Položme $\mathscr{H}(L) = L \cup S$, kde S označuje množinu dílčích frází vzhledem k L. Množinu $\mathscr{H}(L)$ nazveme dědičným prodloužením jazyka L. Existuje-li celé číslo N takové, že $d(x, y) \leqq N$ pro $x \in \mathscr{H}(L)$, $y \in \mathscr{H}(L)$ a že pro určité fráze u, v je $d(u, v) = N$, pak toto N nazveme kontextovým průměrem jazyka L v širším slova smyslu a budeme jej značit $\delta(L)$. Jestliže takové N neexistuje, pak budeme klást $\delta(L) = +\infty$.

Jestliže v předchozím odstavci dosadíme místo $\mathscr{H}(L)$ pouhé L, dostaneme definici kontextového průměru jazyka L v užším slova smyslu; budeme jej značit $d(L)$. Je zřejmé, že $d(L) \leqq \delta(L)$.

Teorém 3. *Je-li L konečný jazyk obsahující alespoň dvě fráze, pak* $d(L) = + \infty$ *(tedy tím spíše* $\delta(L) = + \infty$*).*

Důkaz. Dokážeme existenci dvou frází jazyka L, jejichž kontextová vzdálenost je nekonečná. Důkaz provedeme sporem. Připusťme, že pro všechny fráze $x \in L$, $y \in L$ platí $d(x, y) < \infty$. Z toho vyplývá, že pro každé $x \in L$ existuje fráze $y_x \in L$ taková, že x a y_x jsou v silně kontrastní distribuci vzhledem k L. Jinými slovy existuje neprázdný kontext, který fráze x a y_x připouštějí. Buď n počet frází jazyka L a $x_1 \in L$. Buď $\{u_1, v_1\}$ neprázdný kontext, který připouští fráze x_1. Položme $x_2 = u_1 x_1 v_1$, kde aspoň jedna z frází u_1, v_1 je neprázdná. Položme $y_{x_2} = x_3$. Pak $x_3 = u_2 x_2 v_2$, kde aspoň jedna z frází u_2, v_2 je neprázdná. Budeme-li pokračovat v této úvaze, dojdeme k posloupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vytvořené ze všech frází jazyka L a takové, že $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$. Ale neexistuje fráze $y \in L$, která by byla v silně kontrastní distribuci s x_n vzhledem k L; $\mathscr{C}(x_n)$ je skutečně vytvořeno z jediného prvku, jímž je prázdný kontext. Lze odvodit, že $d(x_i, x_n) = + \infty$ pro $i \neq n$, a teorém 3 je dokázán.

Poznámka. Teorém 3 ukazuje nepohodlnost konečných jazyků. Jazyky, kterých se s určitým prospěchem užívá buď ve společenském životě, nebo v matematice, logice či v programování, jsou vždy nekonečné.

Zjištění kontextového průměru v širším slova smyslu je někdy usnadněno tímto tvrzením, jehož důkaz přenecháváme čtenáři:

Tvrzení 22. Je-li x dílčí fráze vzhledem k L a je-li y v identické distribuci s x vzhledem k L, pak y je rovněž dílčí fráze vzhledem k L.

Je možné, aby $d(L) < \delta(L)$? Nato odpovídá

Teorém 4. *Existuje jazyk L takový, že* $d(L) = 1$ *a* $\delta(L) = + \infty$.

Důkaz. Buďte $A = \{a\}$ a $L = \{a^{2^n}\}_{1 \leqq n < \infty}$. Jestliže $x \in L$ a $y \in L$, pak x a y jsou v silně kontrastní distribuci, neboť je připouštějí kontexty tvaru $\{a^{2^n}, a^{2^n}\}$ $(1 \leqq n < \infty)$. Tedy $d(L) = 1$. Je-li naopak z dílčí fráze vzhledem k L, pak každý kontext $\{x, y\}$, pro který platí $xzy \in L$, má tu vlastnost, že $x = a^p$, $y = a^q$, $p \neq q$, p a q jsou nezáporná celá čísla, z nichž jedno je sudé a druhé liché. Ale takový kontext nikdy nepřipouští frázi jazyka L; z toho vyplývá, že pro každé $x \in L$ platí $d(z, x) = + \infty$, tedy $\delta(L) = \infty$.

Poznámka. N. Chomsky uvažoval tento jazyk nad slovníkem $A = \{a, b\}$: $L_1 = \{a^n b^n\}_{1 \leqq n < \infty}$ [28].

Užijeme-li varianty důkazu teorému 4, obdržíme

Tvrzení 23. $d(L_1) = 1$ a $\delta(L_1) = \infty$.

Poznámka. Je zřejmé, že dvě fráze jsou v silně kontrastní distribuci vzhledem k L_1 právě tehdy, když patří do téže distribuční třídy v širším slova smyslu.

42. Prostor kontextů

Mějme dán slovník A a jazyk L nad A; budeme studovat možné vztahy mezi dvěma kontexty takto: buďte c' a c'' dva libovolné kontexty. Označme $\mathscr{F}(c')$ (resp. $\mathscr{F}(c'')$) množinu frází připuštěných kontextem c' (resp. c''). Jestliže $\mathscr{F}(c') \cap \mathscr{F}(c'') = 0$, říkáme, že kontexty c' a c'' jsou neslučitelné; v opačném případě jsou kontexty c' a c'' slučitelné. Existuje trojí slučitelnost. Jestliže $\mathscr{F}(c') = \mathscr{F}(c'')$, c' a c'' jsou ekvivalentní. Jestliže $\mathscr{F}(c') < \mathscr{F}(c'')$, c' je restriktivnější než c''. Je-li mezi množinami $\mathscr{F}(c')$ a $\mathscr{F}(c'')$ ekvipolentní opozice, jsou c' a c'' neporovnatelné. Můžeme tedy konstatovat, že vzájemné vztahy mezi dvěma kontexty závisí na různých typech opozic.

Existují také parazitní kontexty vzhledem k L; kontext c je parazitní, jestliže nepřipouští žádnou frázi. Je-li například L francouzský jazyk, pak kontext $c = \{$je mangerons, grandes oiseau$\}$ je parazitní, neboť pro jakoukoli frázi x (ať správnou či nesprávnou), která je vytvořena z francouzských slov, je fráze „je mangerons x grandes oiseau" nefrancouzská.

Je-li c' parazitní kontext, jsou kontexty c' a c'' neslučitelné pro jakýkoli kontext c''. Kontexty {une, fenêtre} a {une, chaise} jsou ekvivalentní. Kontext {0, tableau} je restriktivnější než kontext {0, cas}. Jakákoli fráze připuštěná prvním kontextem je totiž připuštěna také druhým kontextem; opak však neplatí, neboť fráze „plusieurs cas" je správná, zatímco fráze „plusieurs tableau" správná není. Kontexty {heureux, 0} a {maigre, 0} jsou slučitelné, ale neporovnatelné. Slovo „navire" je totiž připuštěno každým z těchto kontextů, slovo „garçons" však pouze prvním, slovo „fortune" pouze druhým.

Je-li dán slovník A a jazyk L, můžeme nyní definovat vzdálenost mezi dvěma kontexty (vzhledem k L) takto: Nechť c' a c'' jsou dva libovolné kontexty. Řetěz od c' do c'' je konečná posloupnost kontextů $c_1, c_2, \ldots, c_n$ takových, že $c' = c_1$, $c'' = c_n$ a kontexty c_i a c_{i+1} (pro $i = 1, \ldots, n-1$) jsou slučitelné. Číslo n je délka řetězu. Nejmenší číslo $n - 1$ takové, že existuje řetěz o délce n od c' do c'', definuje vzdálenost mezi c' a c''. Jestliže takové číslo neexistuje, vzdálenost mezi c' a c'' se rovná $+\infty$.

Je snadné si ověřit, že jsou splněny všechny vlastnosti vzdálenosti. Množina kontextů nad L, mající tuto vzdálenost, je prostorem kontextů přiřazených jazyku L. Tento prostor můžeme studovat podobným způsobem jako kontextový prostor (viz kapitoly 37–41).

43. Kontextový uzávěr

Na některé aspekty duality frází a kontextů již poukázal A. Sestier v [137]. Na této jeho práci jsou založeny následující úvahy .

Mějme slovník A a jazyk L nad A. Pro libovolnou množinu frází E označme $\mathscr{C}(E)$ množinu takových kontextů $\{x, y\}$, že platí $xyz \in L$ pro každou frázi $z \in E$. Označme nyní E_φ množinu frází u takových, že $xuy \in L$ pro jakýkoli kontext $\{x, y\} \in \mathscr{C}(E)$. Množinu E_φ nazveme kontextovým uzávěrem množiny E. Tento pojem, který vytvořil Sestier pro ten zvláštní případ, kdy jsou fráze nahrazeny slovy, úzce souvisí s distribučními pojmy, které jsme studovali výše. Jestliže totiž $x \in \mathscr{F}(A)$, pak skutečně, znamená-li $E_\varphi(x)$ kontextový uzávěr množiny $\{x\}$, platí

Teorém 5. Je-li x neparazitní fráze, platí $F(x) \subseteq E_\varphi(x) \subseteq H^1(x)$ a je možný kterýkoli z těchto případů:

1. $F(x) = E_\varphi(x) = H^1(x)$; 2. $F(x) = E_\varphi(x) \subset H^1(x)$;
3. $F(x) \subset E_\varphi(x) = H^1(x)$; 4. $F(x) \subset E_\varphi(x) \subset H^1(x)$.

Důkaz. Jestliže $y \in F(x)$, pak $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$, tedy y je připuštěno jakýmkoli kontextem patřícím do $\mathscr{C}(x)$. Z toho vyplývá, že $y \in E_\varphi(x)$, tedy $F(x) \subseteq E_\varphi(x)$. Mějme nyní $z \in E_\varphi(x)$. Z toho vyplývá, že pro jakýkoli kontext $\{u, v\} \in \mathscr{C}(x)$ platí $uzv \in L$. Protože x je neparazitní, můžeme předpokládat, že aspoň jedna z frází u a v je neprázdná; z toho vyplývá, že x a z jsou v silně kontrastní distribuci, tedy $d(x, z) \leqq 1$, a tedy $z \in H^1(x)$.

Pro ilustraci případu 1 uvažujme univerzální jazyk nad A, který označíme L. Pak pro každé $x \in \mathscr{F}(A)$ platí $F(x) = \mathscr{F}(A)$ $(= L)$, tedy na základě uvedených inkluzí platí tím spíše $F(x) = E_\varphi(x) = H^1(x) = L$.

Pro ilustraci případu 2 uvedeme příklad z přirozeného jazyka a přenecháme čtenáři, aby si našel jeho formální obdobu.

Nechť A je slovník psané francouzštiny a L množina správně tvořených francouzských vět. Je-li x = cas, pak $F(\text{cas}) = E_\varphi(\text{cas}) \subset H^1(\text{cas})$. Pro svůj neměnný tvar má substantivum cas ve své distribuční třídě skutečně jen neměnná substantiva. $E_\varphi(\text{cas})$ obsahuje právě ty fráze, které jsou připuštěny všemi kontexty patřícími k $\mathscr{C}(\text{cas})$. Ale jedinými frázemi tohoto druhu jsou prvky množiny $F(\text{cas})$. Množina $H^1(x)$ obsahuje všechny fráze, které jsou v silně kontrastní distribuci s cas. Z toho vyplývá, že cahiers $\in H^1(\text{cas})$. Ale cahiers $\bar{\in} F(\text{cas})$, tedy $E_\varphi(\text{cas}) \subset H^1(\text{cas})$.

Pro ilustraci případu 3 položme $A = \{a, b, c, d\}$ a $L = \{dcb, acc, bcc, dad, dbd\}$. Pak $F(a) = \{a\}$, $E_\varphi(a) = \{a, b\}$ a $H^1(a) = \{a, b\}$, tedy $F(a) \subset E_\varphi(a) = H^1(a)$.

Pro ilustraci případu 4 uveďme opět příklad z francouzštiny. Platí $F(\text{beau}) \subset$ $\subset E_\varphi(\text{beau})$, neboť maigre $\in E_\varphi(\text{beau}) - F(\text{beau})$. Platí také $E_\varphi(\text{beau}) \subset H^1(\text{beau})$, neboť vieux $\in H^1(\text{beau}) - E_\varphi(\text{beau})$.

Přejděme nyní k jinému pojmu z článku [137]. Je-li dáno $\mathscr{C}$ jako množina kontextů nad slovníkem A a jazyk L nad A, označme $H(\mathscr{C})$ množinu frází připuštěných všemi kontexty $c \in (\mathscr{C})$. Nechť nyní znamená $\mathscr{C}_\varphi$ množinu kontextů $\{u, v\}$ takových, že platí $uxv \in L$ pro jakoukoli frázi $x \in H(\mathscr{C})$. Množinu $\mathscr{C}_\varphi$ nazveme uzávěrem množiny $\mathscr{C}$. To je duální pojem k pojmu kontextového uzávěru.

Na závěr je třeba poznamenat, že určitý pojem vzdálenosti – rozumí se kontextové – zavedl již N. Chomsky ve své doktorské disertaci [27]. Jsou-li dány dvě fráze x a y, vzdálenost mezi x a y se podle Chomského rovná počtu kontextů společných x a y dělenému součtem počtu kontextů obou frází x a y. Ale taková definice vyžaduje statistický výpočet, který je dost nesnadno proveditelný.

O některých pojmech, jimiž jsme se zabývali v tomto oddílu, viz též [95].

ODDÍL II

Fonematický rozbor

1. Úvod

Fonologie studuje hlásky z hlediska jejich funkce v jazyce. Jestliže předchůdce této disciplíny najdeme již ve starověku a pak zvláště v 19. století (viz např. práce Baudouina de Courtenay [8]) a na počátku století 20., její vlastní zrod spadá do 30. let našeho století a je možno jej sledovat v pracích Trubeckého, zvláště v jeho dnes již klasické knize [148].

První pokus o axiomatický popis přirozených jazyků, který pochází od L. Bloomfielda [16], bere rovněž v úvahu funkční platnost hlásek. Tento aspekt Bloomfieldova popisu zdokonalil Bernard Bloch ve studii [15], v níž poznamenává, že axiomatická metoda nás nutí přesně vyjadřovat to, co se někdy zamlčuje; nutí nás definovat používané termíny a rozlišovat, co se předpokládá a co z předpokládaného vyplývá. Tak je možno dojít k zjištění, která fakta existují nezávisle na jiných a jaké jsou mezi nimi logické souvislosti, díváme-li se na ně z lingvistického hlediska.

Základními pojmy fonologie, zvláště pojmy „distinktivní rys" a „foném", se již zabývalo mnoho prací. Historii chápání fonému najdeme v Jonesově práci [79]; viz však též [40], [68], [78] a [149]. V posledních deseti letech stoupl zájem o fonologické bádání z hlediska vytváření matematických modelů. Tomuto problému je právě věnován druhý oddíl naší knihy, který se skládá ze tří částí.

Hlavní problém, kterým se zabýváme v první části (kap. 2–16), by bylo možno formulovat takto:

Jakým formálním postupem dojdeme od akustických nebo artikulačních hodnot hlásek k jejich hodnotám distinktivním, které jsou pertinentní z hlediska fungování v jazyce? Nebo přesněji: Pomocí jakých kritérií vybereme z množiny $\mathscr{V}(x)$ všech akustických (nebo artikulačních) hodnot hlásky x část $\mathscr{F}(x)$, obsahující pertinentní hodnoty hlásky x? Abychom mohli odpovědět na tuto otázku, musíme ji ovšem nejprve přesně formulovat tak, aby byla matematicky řešitelná. Budeme tedy musit sestrojit formální obdobu hlásek, hodnot, pertinentnosti atd.

Podnětem k tomuto nazírání problému nám byly klasická práce R. Jakobsona, G. G. M. Fanta a M. Halleho [76], rovněž již klasická práce A. Martineta [105], jakož i novější práce G. E. Petersona a F. Hararyho [117], S. K. Šaumjana [140], [143] a I. I. Revzina [128]. Mnohé pojmy a fakta, které zde zavedeme, jsou formální obdobou některých pojmů a fakt vyskytujících se v citovaných pracích.

V druhé části (kap. 17–23) se díváme na věc z jiného hlediska, které se poprvé objevuje v pracích Harrise, Hocketta a jiných ([59], [68], [69]) a které poprvé formalizoval S. Kanger [80]. Z tohoto hlediska je foném definován jako třída zvukových posloupností majících určité vlastnosti.

V třetí části se zabýváme pojmem jednoduchosti fonologického popisu podle Halleho [51] a hierarchií fonémů podle Bröndala ([20], [21]) a Ungeheuera [150].

Je třeba poznamenat, že logická rekonstrukce pojmu foném byla nedávno předmětem podrobného rozboru Tadeusze Batoga ([6], [7]), založeného na mereologii Leśniewského; podobným problémem se zabýval, i když pomocí jiných metod, J. Greenberg [47].

Model, který sestrojíme v kapitolách 2–16, se skládá ze tří částí. V první části definujeme pojem fonetického systému bez jakýchkoli zřetelů syntagmatických a studujeme tento systém z hlediska teorie kódů.

V druhé části definujeme zavedením vyznačených posloupností pojem fonematického systému a vyslovujeme teorémy o chování hláskových hodnot z hlediska různých typů kontextu.

V třetí etapě konstrukce našeho modelu si mimoto všímáme ekvivalence R v množině vyznačených posloupností a definujeme pojmy relevantní hodnota, foném, neutralizace a archifoném.

2. Hodnoty a hlásky

Buď $\mathscr{V}$ množina prvků zvaných hodnoty. Uvažujme rozklad P na množině $\mathscr{V}$ (tj. rozklad $\mathscr{V}$ na disjunktní množiny):

$$\mathscr{V} = \bigcup_i \mathscr{V}_i .$$

Dvě hodnoty téže množiny $\mathscr{V}_i$ nazýváme homogenní, dvě hodnoty různých množin nazýváme heterogenní.

Příklady hodnot: znělá, neznělá, měkká, tvrdá, otevřená, úžinová, závěrová, trvací. Hodnoty „znělá" a „neznělá" patří do téže množiny $\mathscr{V}_i$; stejně tak hodnoty „měkká" a „tvrdá", „otevřená" a „zavřená". Hodnoty „znělá" a „měkká" jsou heterogenní.

Buď E množina prvků zvaných hlásky.

Každé hlásce x přiřadíme takovou část množiny $\mathscr{V}$ – označíme ji $\mathscr{V}(x)$ – že pro každé přirozené číslo i obsahuje průnik

$$\mathscr{V}_i \cap \mathscr{V}(x)$$

právě jeden prvek.

Dvě hodnoty v_1 a v_2 nazýváme slučitelné, existuje-li hláska x taková, že

$$v_1 \in \mathscr{V}(x) \quad \text{a} \quad v_2 \in \mathscr{V}(x) .$$

Dvě hodnoty, které nejsou slučitelné, nazýváme neslučitelné.

Například v ruštině jsou slučitelné hodnoty „neznělá" a „úžinová"; rovněž slučitelné jsou hodnoty „znělá" a „měkká". Naproti tomu hodnoty „tvrdá" a „otevřená" jsou neslučitelné.

3. Vztah mezi slučitelností a homogenností

Tvrzení 1. Jestliže jsou v_1 a v_2 slučitelné hodnoty, pak jsou heterogenní.

Důkaz provedeme sporem: Předpokládejme, že hodnoty v_1 a v_2 jsou homogenní. Číslo i má tedy také hodnotu j takovou, že

$$v_1 \in \mathscr{V}_j , \quad v_2 \in \mathscr{V}_j .$$

Ze slučitelnosti hodnot v_1 a v_2 naopak vyplývá existence hlásky z takové, že

$$v_1 \in \mathscr{V}(z) , \quad v_2 \in \mathscr{V}(z) .$$

Z toho lze odvodit, že průnik

$$\mathscr{V}_j \cap \mathscr{V}(z)$$

obsahuje alespoň dvě hodnoty: v_1 a v_2. To však odporuje definici množin $\mathscr{V}(x)$. Předpoklad, že v_1 je homogenní s v_2, je tedy nesprávný; v_1 a v_2 jsou heterogenní hodnoty.

Korolár. Jsou-li hodnoty v_1 a v_2 homogenní, pak jsou neslučitelné.

Poznámka. Opak koroláru neplatí. Máme-li totiž

$$\mathscr{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} , \quad \mathscr{V}_1 = \{v_1\} , \quad \mathscr{V}_2 = \{v_2, v_3\} , \quad \mathscr{V}_3 = \{v_4, v_5\} ,$$
$$\mathscr{E} = \{x, y, z, w\} , \quad \mathscr{V}(x) = \{v_1, v_2, v_4\} , \quad \mathscr{V}(y) = \mathscr{V}(z) = \{v_1, v_3, v_4\} ,$$
$$\mathscr{V}(w) = \{v_1, v_3, v_5\} ,$$

vidíme, že hodnoty v_2 a v_5 jsou neslučitelné, ale heterogenní.

4. Kontrastní dvojice

Říkáme, že dvě hodnoty v_1 a v_2 tvoří kontrastní dvojici hodnot nebo prostě kontrastní dvojici, existují-li dvě hlásky x a y takové, že

$$\mathscr{V}(x) - \mathscr{V}(y) = \{v_1\} , \quad \mathscr{V}(y) - \mathscr{V}(x) = \{v_2\} .$$

Z této definice okamžitě vyplývá toto:

Jestliže v_1 a v_2 tvoří kontrastní dvojici, pak $v_1 \neq v_2$, zatímco v_2 a v_1 tvoří rovněž kontrastní dvojici.

Tvrzení 2. Jestliže v_1 a v_2 tvoří kontrastní dvojici, pak v_1 a v_2 jsou homogenní.

Důkaz. Z definice vyplývá, že existují dvě hlásky x a y takové, že

$$\mathscr{V}(x) - \mathscr{V}(y) = \{v_1\}, \quad \mathscr{V}(y) - \mathscr{V}(x) = \{v_2\}.$$

Položme

$$A_{xy} = \mathscr{V}(x) \cap \mathscr{V}(y).$$

Ze samotné definice kontrastní dvojice vyplývá, že

$$\mathscr{V}(x) = A_{xy} \cup \{v_1\}, \quad \mathscr{V}(y) = A_{xy} \cup \{v_2\}.$$

Buď k přirozené číslo, pro které

$$v_1 \in \mathscr{V}_k.$$

Z toho, že průnik

$$\mathscr{V}_k \cap \mathscr{V}(x)$$

obsahuje na základě definice množiny $\mathscr{V}(x)$ právě jeden prvek a že

$$\mathscr{V}_k \cap \mathscr{V}(x) = \mathscr{V}_k \cap (A_{xy} \cup \{v_1\}) = (\mathscr{V}_k \cap A_{xy}) \cup (\mathscr{V}_k \cap \{v_1\}),$$

vyplývá na základě vztahu

$$v_1 \in \mathscr{V}_k \cap \mathscr{V}(x),$$

že

$$\mathscr{V}_k \cap A_{xy} = 0.$$

Avšak

$$\mathscr{V}_k \cap \mathscr{V}(y) = \mathscr{V}_k \cap (A_{xy} \cup \{v_2\}) = (\mathscr{V}_k \cap A_{xy}) \cup (\mathscr{V}_k \cap \{v_2\}),$$

tedy

$$\mathscr{V}_k \cap \mathscr{V}(y) = \mathscr{V}_k \cap \{v_2\}.$$

Protože množina prvního členu této rovnice obsahuje, jak vyplývá z definice, právě jeden prvek, platí

$$\mathscr{V}_k \cap \mathscr{V}(y) = \{v_2\}.$$

Tedy platí

$$v_2 \in \mathscr{V}_k$$

a proto jsou hodnoty v_1 a v_2 homogenní.

Poznámka. Opak věty 2 neplatí. Mějme totiž

$$\mathscr{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad \mathscr{V}_1 = \{v_1, v_2\}, \quad \mathscr{V}_2 = \{v_3, v_4\}, \quad E = \{x, y, z, w\},$$
$$\mathscr{V}(x) = \mathscr{V}(y) = \{v_1, v_4\}, \quad \mathscr{V}(z) = \mathscr{V}(w) = \{v_2, v_3\}.$$

Všimněme si, že $\mathscr{V}$ neobsahuje ani jednu kontrastní dvojici hodnot; tedy ani homogenní dvojice $\{v_1, v_2\}$ a $\{v_3, v_4\}$ nejsou kontrastní.

Korolár. Tvoří-li hodnoty v_1 a v_2 kontrastní dvojici, pak jsou neslučitelné.

Důkaz. Stačí použít tvrzení 2 a pak koroláru k tvrzení 1.

Poznámka. Jak ukazuje příklad v poznámce k tvrzení 2, opak tohoto koroláru neplatí; někdy existují neslučitelné hodnoty, které netvoří kontrastní dvojici. V uvedeném příkladu není ani jedna dvojice neslučitelných hodnot kontrastní.

5. Potenciální fonetické systémy

Buď systém

$$\{\mathscr{V}, P, E, \varphi\},$$

kde $\mathscr{V}$ je množina hodnot, P rozklad na množině $\mathscr{V}$, E množina hlásek a φ zobrazení množiny E do množiny částí množiny $\mathscr{V}$ takové, že pro každé $x \in E$ a pro každý výraz $\mathscr{V}_i$ rozkladu P je množina

$$\mathscr{V}_i \cap \varphi(x)$$

vytvořena právě z jednoho prvku. Takový systém se nazývá potenciální fonetický systém nebo prostě fonetický systém.

Existují konkrétní fonetické systémy, v nichž každá dvojice neslučitelných hodnot je kontrastní; z koroláru k tvrzení 2 vyplývá, že v takovém systému splývá pojem kontrastní dvojice s pojmem neslučitelných hodnot. To platí například o systému akustických hodnot popsaném ve studii [76].

Tento případ vede k následující definici:

Říkáme, že potenciální fonetický systém je úplný, jestliže každá dvojice neslučitelných hodnot je kontrastní.

Jak se ukazuje v poznámce k tvrzení 2, existují homogenní hodnoty, které netvoří kontrastní dvojici. Je možno zkonstruovat potenciální fonetické systémy, v nichž každá homogenní dvojice je kontrastní. K takovému systému vede poznámka za korolárem k tvrzení 1. Homogenní dvojice $\{v_2, v_3\}$ je vskutku kontrastní, neboť

$$\mathscr{V}(x) - \mathscr{V}(y) = \{v_2\} \quad \text{a} \quad \mathscr{V}(y) - \mathscr{V}(x) = \{v_3\};$$

homogenní dvojice $\{v_4, v_5\}$ je rovněž kontrastní, neboť

$$\mathscr{V}(z) - \mathscr{V}(w) = \{v_4\} \quad \text{a} \quad \mathscr{V}(w) - \mathscr{V}(z) = \{v_5\}\,.$$

Tento případ vede k následující definici:

Potenciální fonetický systém se nazývá poloúplný, jestliže každá dvojice homogenních hodnot je kontrastní.

Z koroláru k tvrzení 1 a z příkladu za tímto korolárem vyplývá

Tvrzení 3. Každý úplný potenciální fonetický systém je poloúplný, ale ne naopak.

Poznámky. Pojem kontrastní dvojice je zpřesněním jiného známého pojmu. Viz například I. Revzin ([128], str. 23), který užívá pro tento pojem výrazu „homogenní rysy“. Ale termínu „homogenní“ jsme dali výše jiný význam.

Příklady kontrastních dvojic v rumunštině a ruštině: neznělá a znělá, dlouhá a krátká, měkká a tvrdá, otevřená a zavřená.

Kontrastnost dvojice {neznělá, znělá} si můžeme ověřit v rumunštině na hláskách D a T; vskutku platí

$$\mathscr{V}(T) - \mathscr{V}(D) = \{\text{neznělá}\}\,, \quad \mathscr{V}(D) - \mathscr{V}(T) = \{\text{znělá}\}\,.$$

Kontrastnost dvojice {krátká, dlouhá} a {zavřená, otevřená} si můžeme v rumunštině ověřit na čtyřech adekvátních variantách hlásky E – E_1, E_2, E_3 a E_4 – takových, že

$$\mathscr{V}(E_1) - \mathscr{V}(E_2) = \{\text{krátká}\}\,, \quad \mathscr{V}(E_2) - \mathscr{V}(E_1) = \{\text{dlouhá}\}\,,$$
$$\mathscr{V}(E_3) - \mathscr{V}(E_4) = \{\text{zavřená}\}\,, \quad \mathscr{V}(E_4) - \mathscr{V}(E_3) = \{\text{otevřená}\}\,.$$

6. Rysy

V přirozených jazycích nás zajímají jen ty hodnoty, které jsou alespoň v jednom případě členem homogenní dvojice; jinými slovy jde o hodnoty v, pro které množina $\mathscr{V}_i$ s vlastností $v \in \mathscr{V}_i$ obsahuje alespoň dvě hodnoty. Je to důsledek toho, že jestliže hodnota v není homogenní s žádnou jinou hodnotou, pak není členem žádné kontrastní dvojice (jak vyplývá z tvrzení 2).

Hodnotu v, která není homogenní s žádnou jinou hodnotou, nazýváme rysem. Jestliže mimoto $v \in \mathscr{V}(x)$, říkáme, že v je rysem hlásky x. Následující tvrzení ukazuje, proč tento pojem není lingvisticky zajímavý.

Tvrzení 4. Je-li v rysem hlásky x, pak je rysem kterékoli jiné hlásky.

Důkaz. Nechť

$$\mathscr{V}(x) = \{v_1(x), v_2(x), \ldots, v_i(x), \ldots\}\,.$$

Mějme přirozené číslo j s vlastností $v_j(x) = v$. To znamená, že $\mathscr{V}_j = \{v\}$. Mějme nyní jinou hlásku y. Platí

$$\mathscr{V}_j \cap \mathscr{V}(y) = \{v\} \cap \mathscr{V}(y)$$

a z toho vyplývá, protože množina $\mathscr{V}_j \cap \mathscr{V}(y)$ nemůže být prázdná, že

$$v \in \mathscr{V}(y)\,,$$

tedy v je rysem y.

Říkáme, že hodnota v je parazitní, jestliže neexistuje žádná hláska x taková, že by platilo $v \in \mathscr{V}(x)$. Kdykoli nebudeme výslovně tvrdit opak, budeme považovat existenci parazitních hodnot za vyloučenu, tj. budeme předpokládat pravdivost vztahu

$$\mathscr{V} = \bigcup_{x \in E} \mathscr{V}(x)\,.$$

Je zřejmé, že fonetické systémy přirozených jazyků neobsahují parazitní hodnoty.

7. Absolutní ekvivalence. Vzdálenost

Dvě hlásky x a y takové, že $\mathscr{V}(x) = \mathscr{V}(y)$, nazýváme absolutně ekvivalentními.

Jestliže připustíme na základě definice, že opozice mezi dvěma hláskami x a y je opozicí mezi množinami $\mathscr{V}(x)$ a $\mathscr{V}(y)$, můžeme říci, že hlásky x a y jsou absolutně ekvivalentní právě tehdy, když je opozice mezi x a y nulová.

Aby se však v opozici mezi dvěma hláskami adekvátněji zračila jejich reciprocita, je vhodné chápat $\mathscr{V}(x)$ a $\mathscr{V}(y)$ jako uspořádané množiny a opozici mezi nimi jako uspořádanou opozici. Pak budeme ve $\mathscr{V}(x)$ a $\mathscr{V}(y)$ uvažovat uspořádání zavedené rozkladem P. Budeme klást

$$\mathscr{V}(x) = \{v_1(x), v_2(x), \ldots, v_i(x), \ldots\}\,,$$
$$\mathscr{V}(y) = \{v_1(y), v_2(y), \ldots, v_i(y), \ldots\}\,,$$

kde

$$v_i(x) \in \mathscr{V}_i\,, \quad v_i(y) \in \mathscr{V}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)\,.$$

Podle Hammingova modelu vzdálenosti v teorii kódů zde zavedeme jako míru kvantitativní zhodnocení opozice mezi $\mathscr{V}(x)$ a $\mathscr{V}(y)$; budeme uvažovat množinu $\mathscr{N}_{xy}$ přirozených čísel i, pro něž platí $v_i(x) \neq v_i(y)$. Kardinální číslo množiny $\mathscr{N}_{xy}$ nazveme vzdáleností mezi $\mathscr{V}(x)$ a $\mathscr{V}(y)$. Toto kardinální číslo je mírou opozice mezi hláskami x a y. Je-li rozklad P konečný, můžeme si snadno ověřit, že je všem vlastnostem vzdálenosti vyhověno.

Je třeba poznamenat, že eventuální rysy přítomné ve $\mathscr{V}(x)$ a $\mathscr{V}(y)$ nemají na vzdálenost mezi $\mathscr{V}(x)$ a $\mathscr{V}(y)$ vliv. Evidentní je také pravdivost této věty: Dvě hlásky x a y jsou absolutně ekvivalentní právě tehdy, když vzdálenost mezi $\mathscr{V}(x)$ a $\mathscr{V}(y)$ se rovná nule.

8. Abstraktní hlásky

Je jasné, že absolutní ekvivalence vyhovuje všem vlastnostem ekvivalence v E. Množina E se tedy rozkládá na absolutně ekvivalenční třídy; takovým třídám budeme říkat abstraktní hlásky. Abstraktní hlásku přiřazenou hlásce x budeme označovat $[x]$.

Hammingova vzdálenost zavádí do množiny abstraktních hlásek $\mathscr{E}$ vzdálenost, jíž se množina $\mathscr{E}$ stává metrickým prostorem přiřazeným potenciálnímu fonetickému systému $\{\mathscr{V}, P, E, \varphi\}$. Definujeme nyní vzdálenost mezi $[x]$ a $[y]$ jako rovnou vzdálenosti mezi $\mathscr{V}(x')$ a $\mathscr{V}(y')$, kde $x' \in [x]$ a $y' \in [y]$. Je zřejmé, že tato vzdálenost nezávisí na způsobu, jímž vybíráme x' z $[x]$ a y' z $[y]$.

9. Některé analogie s teorií kódů

Říkáme, že metrický prostor $\mathscr{E}$ deteguje jednoduché chyby, jestliže pro $[x] \in \in \mathscr{E}$, $v \in \mathscr{V}(x) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \ldots\}$ a pro hodnotu $v' \neq v$ neexistuje žádná hláska y taková, že by $\mathscr{V}(y) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v', v_{j+1}, \ldots\}$.

Uvažováním podobným tomu, jehož se užívá v teorii kódů, lze dokázat toto:

Metrický prostor $\mathscr{E}$ deteguje jednoduché chyby právě tehdy, když vzdálenost mezi každými dvěma jeho prvky je větší než dvě nebo se rovná dvěma.

Z toho vyplývá

Tvrzení 5. Buď $\mathscr{E}$ metrický prostor přiřazený potenciálnímu fonetickému systému $\{\mathscr{V}, P, E, \varphi\}$. Aby metrický prostor $\mathscr{S}$ mohl detegovat jednoduché chyby, je nutné a stačí, aby množina $\mathscr{V}$ neobsahovala žádnou kontrastní dvojici hodnot.

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathscr{E}$ deteguje jednoduché chyby. Z toho vyplývá, že vzdálenost mezi jeho prvky je větší než dvě nebo se rovná dvěma. Kdyby existovaly dvě hodnoty v_1 a v_2, které by tvořily kontrastní dvojici, pak by existovaly dvě hlásky x a y, pro které by platilo $\mathscr{V}(x) - \mathscr{V}(y) = \{v_1\}$ a $\mathscr{V}(y) - \mathscr{V}(x) = \{v_2\}$. To by mělo za následek, že vzdálenost mezi $\mathscr{V}(x)$ ya $\mathscr{V}(y)$ by byla menší než dvě nebo by se rovnala dvěma. Avšak hodnoty v_1 a v_2 jsou na základě tvrzení 2 homogenní a tedy vzdálenost mezi $\mathscr{V}(x)$ a $\mathscr{V}(y)$ se rovná jedné, což odporuje předpokladu, že $\mathscr{E}$ deteguje jednoduché chyby. Existence kontrastní dvojice hodnot je tedy vyloučena.

Předpokládejme nyní, že neexistuje ani jedna kontrastní dvojice hodnot. Připusťme pro důkaz sporem, že $\mathscr{E}$ nedeteguje všechny jednoduché chyby. V tom případě existují dvě abstraktní hlásky $[x] \in \mathscr{E}$, $[y] \in \mathscr{E}$, mezi nimiž je vzdálenost menší

než dvě, tedy se rovná jedné (vzdálenost nemůže být nulová, neboť x a y jsou od sebe odlišné). Z toho vyplývá, že položíme-li $\mathscr{V}(x) = \{v_1(x), v_2(x), \ldots, v_i(x), \ldots\}$, $\mathscr{V}(y) = \{v_1(y), v_2(y), \ldots, v_i(y), \ldots\}$, existuje přirozené číslo j takové, že $v_j(x) \neq v_j(y)$ a $v_i(x) = v_i(y)$ pro každé $i \neq j$. To má za následek, že $\mathscr{V}(x) - \mathscr{V}(y) = \{v_j(x)\}$ a $\mathscr{V}(y) - \mathscr{V}(x) = \{v_j(y)\}$; hodnoty $v_j(x)$ a $v_j(y)$ tvoří tedy kontrastní dvojici, což však odporuje předpokladu. $\mathscr{E}$ tedy deteguje všechny jednoduché chyby.

Korolár. Buď potenciální fonetický systém $\{\mathscr{V}, P, E, \varphi\}$ takový, že jemu přiřazený prostor $\mathscr{E}$ deteguje jednoduché chyby. Aby to byl systém úplný, je nutné a stačí, aby množina $\mathscr{V}$ neobsahovala neslučitelné hodnoty.

Přihlédneme-li ke koroláru k tvrzení 1, můžeme tedy vyslovit toto tvrzení:

Buď potenciální fonetický systém $\{\mathscr{V}, P, E, \varphi\}$ takový, že jemu přiřazený prostor $\mathscr{E}$ deteguje jednoduché chyby. Aby to byl systém úplný, je nutné a stačí, aby každý člen rozkladu P byla množina vytvořená z jediného prvku.

Z definice pojmu „rys“ vyplývá také toto tvrzení:

Buď potenciální fonetický systém $\{\mathscr{V}, P, E, \varphi\}$ takový, že jemu přiřazený prostor $\mathscr{E}$ deteguje jednoduché chyby. Aby to byl systém úplný, je nutné a stačí, aby každý prvek množiny $\mathscr{V}$ byl rysem.

Tři právě vyslovená tvrzení ukazují, že potenciální fonetické systémy, které fungují jako kód detegující jednoduché chyby, jsou úplné jen v triviálních případech (viz zvláště poslední charakterizaci těchto systémů). Vysvětlení je nasnadě: úplnost fonetického systému odpovídá případu, kdy všech možných protikladů v systému je skutečně využito a kdy tedy je systém maximálně ekonomický a jeho redundance je nulová. Ale, jak víme, určitá redundance je vždy nutná, aby bylo možno detegovat a korigovat eventuální chyby, a v přirozených jazycích skutečně existuje. Přirozené jazykové systémy obsahují vždy určitou redundanci.

Je zřejmé, že se každý z tří charakteristických znaků úplnosti fonetických systémů detegujících jednoduché chyby stává znakem poloúplnosti těchto systémů, jakmile v jejich vyjádření nahradíme slovo „úplný“ slovem „poloúplný“ a slovo „neslučitelný“ slovem „homogenní“. Z toho vyplývá, že ve fonetických systémech detegujících jednoduché chyby se poloúplnost realizuje jen v některých triviálních případech.

10. Vyznačené a dovolené posloupnosti

Buď $\mathscr{F}$ určitá množina posloupností hlásek; říkáme, že tyto posloupnosti jsou vyznačené. V přirozených jazycích se za vyznačené posloupnosti obyčejně pokládají slova nebo fráze příslušného jazyka.

Vyznačené posloupnosti říkáme také vyznačený řetěz. Každý podřetěz (podposloupnost) vyznačeného řetězu (posloupnosti) nazýváme dovoleným řetězem nebo dovolenou posloupností. Je tedy zřejmé, že každá vyznačená posloupnost je dovolená, ale ne naopak. Každá podposloupnost dovolené posloupnosti je rovněž dovolená.

11. Potenciální fonematické systémy

Systém předmětů $\{\mathscr{V}, P, E, \varphi, \mathscr{F}\}$, v němž $\mathscr{V}$, P, E a φ jsou předměty skládající potenciální fonetický systém a $\mathscr{F}$ je množina vyznačených posloupností, se nazývá potenciální fonematický systém nebo prostě fonematický systém.

O vyznačených a dovolených posloupnostech vyslovíme tuto hypotézu:

Základní hypotéza: Jestliže ve vyznačené posloupnosti nahradíme hlásku x jinou hláskou, která je s ní absolutně ekvivalentní, pak nově získaná posloupnost je rovněž vyznačená. Z této základní hypotézy můžeme snadno odvodit toto: Jestliže v dovolené posloupnosti nahradíme nějakou hlásku jinou, která je s ní absolutně ekvivalentní, pak nově získaná posloupnost je rovněž dovolená.

Buď například S_x dovolená posloupnost obsahující x a buď y absolutně ekvivalentní s x. Buď S_y posloupnost získaná z S_x tím, že hlásku x nahradíme hláskou y. S_x je podposloupnost vyznačené posloupnosti σ_x. Buď σ_y posloupnost získaná ze σ_x tím, že hlásku x nahradíme hláskou y. Ze základní hypotézy vyplývá, že σ_y je vyznačená posloupnost. Na druhé straně σ_y obsahuje S_y; S_y je tedy dovolená posloupnost.

Podle této hypotézy jsou tedy posloupnosti, s nimiž pracujeme, posloupnostmi abstraktních hlásek; vlastnosti, které budeme uvažovat, jsou invariantní vzhledem k relaci absolutní ekvivalence.

Jsou-li dány dvě posloupnosti hlásek $x_1x_2 \ldots x_i \ldots x_n$ a $y_1y_2 \ldots y_i \ldots y_n$, říkáme, že tyto posloupnosti jsou absolutně ekvivalentní, jestliže x_i je absolutně ekvivalentní s y_i pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Z toho vyplývá, že posloupnost absolutně ekvivalentní s vyznačenou (dovolenou) posloupností je rovněž vyznačená (dovolená).

12. Relevantní hodnoty

Říkáme, že hodnota $v \in \mathscr{V}(x)$ je relevantní hodnota hlásky x, jestliže existuje hodnota v' taková, že v a v' tvoří kontrastní dvojici a jestliže existuje hláska y taková, že $\mathscr{V}(y) = (\mathscr{V}(x) - \{v\}) \cup \{v'\}$. O hodnotách v a v' říkáme, že tvoří kontrastní dvojici vzhledem k hlásce x.

Z definice samotné vyplývá toto:

Jestliže $v \in \mathscr{V}(x)$ je relevantní hodnota hlásky x, pak je v relevantní hodnota každé hlásky absolutně ekvivalentní s x.

Jestliže v a v' tvoří kontrastní dvojici vzhledem k hlásce x, pak v a v' tvoří kontrastní dvojici vzhledem ke každé hlásce absolutně ekvivalentní s x.

Tyto vlastnosti opravňují k vyslovení následujících definic:

Hodnota $v \in \mathscr{V}(x)$ je relevantní hodnotou abstraktní hlásky $[x]$, jestliže existuje hláska $y \in [x]$, která má relevantní hodnotu v.

Dvě hodnoty v a v' tvoří kontrastní dvojici vzhledem k abstraktní hlásce $[x]$, jestliže existuje hláska $y \in [x]$, vzhledem k níž tvoří v a v' kontrastní dvojici.

13. Vázané hodnoty

Je-li dána hláska x a dovolená posloupnost s, která obsahuje x, říkáme, že hodnota $v \in \mathscr{V}(x)$ je pro x vázanou hodnotou vzhledem k posloupnosti s, nastane-li jeden z těchto dvou případů: 1. v není relevantní hodnotou x; 2. pro každou hodnotu v' takovou, že v a v' tvoří kontrastní dvojici vzhledem k x, a pro každou hlásku y mající vlastnost $\mathscr{V}(y) = (\mathscr{V}(x) - \{v\}) \cup \{v'\}$ posloupnost získaná z s nahrazením hlásky x hláskou y není dovolená.

Z výše vyslovené základní hypotézy jasně vyplývá toto:

Jestliže hodnota v je pro hlásku x vázanou hodnotou vzhledem k dovolené posloupnosti s a jestliže u je hláska absolutně ekvivalentní s x, pak označíme-li t posloupnost získanou z s nahrazením hlásky x hláskou u, je t dovolená posloupnost a v je pro u vázaná hodnota vzhledem k posloupnosti t.

Říkáme, že hodnota $v \in \mathscr{V}(x)$ je pro x vázaná zleva, jestliže při jakékoli hlásce z, pro niž je posloupnost xz dovolená, je hodnota v pro x vázaná vzhledem k posloupnosti xz.

Říkáme, že hodnota $v \in \mathscr{V}(x)$ je pro x vázaná zprava, jestliže při jakékoli hlásce y, pro niž je posloupnost yx dovolená, je hodnota v pro x vázaná vzhledem k posloupnosti yx.

Říkáme, že hodnota $v \in \mathscr{V}(x)$ je pro x oboustranně vázaná, jestliže je pro x vázaná zleva i zprava.

Říkáme, že hodnota $v \in \mathscr{V}(x)$ je pro x nejblíže vázaná, jestliže při jakékoli dovolené posloupnosti typu yxz je hodnota v pro x vázaná vzhledem k yxz.

Pojmy „hodnota vázaná zprava", „hodnota vázaná zleva", „hodnota oboustranně vázaná" a „hodnota nejblíže vázaná" jsou rovněž invariantní vzhledem k relaci absolutní ekvivalence.

Tvrzení 6. Jestliže hodnota $v \in \mathscr{V}(x)$ je pro x vázaná zleva, pak je v pro x nejblíže vázaná hodnota.

Důkaz. Buď dovolená posloupnost typu yxz. Máme ukázat, že v je pro x vázanou hodnotou vzhledem k této posloupnosti. Připusťme pro důkaz sporem, že tento případ nenastane. Pak je v relevantní hodnota hlásky x; mimoto existuje hodnota v', která tvoří s v kontrastní dvojici vzhledem k x, a existuje hláska w s těmito vlastnostmi: 1. $\mathscr{V}(w) = (\mathscr{V}(x) - \{v\}) \cup \{v'\}$; 2. posloupnost ywz je dovolená.

Z toho, že posloupnosti yxz a ywz jsou dovolené, vyplývá, že jsou dovolené i podposloupnosti xz a wz. Vezmeme-li v úvahu, že v' tvoří kontrastní dvojici s v vzhledem k x, a přihlédneme-li k 1. vlastnosti hlásky w, můžeme konstatovat rozpor s hypotézou, že v je pro x hodnota vázaná zleva.

Obdobně může být dokázáno

Tvrzení 6'. Jestliže hodnota $v \in \mathscr{V}(x)$ je pro x vázaná zprava, pak v je pro x nejblíže vázaná hodnota.

Opak tvrzení 6 a 6' neplatí. Zato platí

Tvrzení 7. Existuje fonematický systém, který obsahuje hlásku z a hodnotu v nejblíže vázanou pro z, která však není pro z vázaná ani zleva ani zprava.

Důkaz. Budeme uvažovat fonematický systém definovaný takto: $\mathscr{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$; $E = \{x, y, z\}$; $\mathscr{V}_1 = \{v_1\}$; $\mathscr{V}_2 = \{v_2, v_3\}$; $\mathscr{V}(x) = \{v_1, v_2\}$; $\mathscr{V}(y) = \mathscr{V}(z) = \{v_1, v_3\}$. Budeme předpokládat, že existuje jediná vyznačená posloupnost $xyzyx$.

Hodnota v_3 je nejblíže vázaná pro z, neboť v jediné dovolené posloupnosti typu $\alpha z \beta$ — totiž v posloupnosti yzy — nahrazení relevantní hodnoty v_3 hodnotou v_2 vede k posloupnosti yxy, která není dovolená.

Hodnota v_3 není oboustranně vázaná pro z. Buď například dovolená posloupnost zy; hodnota v_3 je relevantní hodnota hlásky z a není vázaná vzhledem k posloupnosti zy, neboť nahrazením hodnoty v_3 hodnotou v_2 získáme posloupnost xy, která je rovněž dovolená; v_3 jako hodnota hlásky z tedy není vázaná zleva. Nahradíme-li na druhé straně v dovolené posloupnosti yz hodnotu v_3 hodnotou v_2, obdržíme posloupnost yx, která je rovněž dovolená. Hodnota v_3 tedy není vázaná zprava. Tím je tvrzení 7 zcela dokázáno.

Hodnotu $v \in \mathscr{V}(x)$ nazveme vázanou hodnotou pro x, jestliže hodnota v je pro x vázaná vzhledem k jakékoli dovolené posloupnosti obsahující x.

Tvrzení 8. Hodnota $v \in \mathscr{V}(x)$ je pro x vázaná hodnota právě tehdy, když je v pro x nejblíže vázaná hodnota.

Důkaz. Nutnost podmínky je zřejmá; zbývá zjistit, že uvedená podmínka je také dostačující. Připusťme, že v je nejblíže vázaná hodnota a připusťme pro důkaz sporem, že existuje dovolená posloupnost $x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x x_{i+1} \ldots x_n$, vzhledem k níž není v vázaná hodnota. To znamená, že existují hodnota v' a hláska y takové, že $\mathscr{V}(y) = (\mathscr{V}(x) - \{v\}) \cup \{v'\}$ a posloupnost $x_1 x_2 \ldots x_{i-1} y x_{i+1} \ldots x_n$ je dovolená. Jako podposloupnosti určitých dovolených posloupností jsou posloupnosti $x_{i-1} x x_{i+1}$ a $x_{i-1} y x_{i+1}$ rovněž dovolené. Přihlédneme-li k ostatním vlastnostem hodnot v a v' a hlásek x a y, vidíme, že v není pro x vázaná hodnota vzhledem k dovolené posloupnosti $x_{i-1} x x_{i+1}$, což odporuje hypotéze, že v je pro x nejblíže vázaná hodnota. Tím je tvrzení 8 dokázáno.

Korolár. Je-li hodnota $v \in \mathscr{V}(x)$ vázaná zleva nebo zprava, pak je v pro x vázaná hodnota.

Důkaz. Vyplývá bezprostředně z výše vyslovených tvrzení 6, 6' a 8.

Hodnotu $v \in \mathscr{V}(x)$ nazveme alternativní hodnotou zleva (zprava, oboustranně) pro x, jestliže v není pro x vázané zleva (zprava, oboustranně).

Hodnotu $v \in \mathscr{V}(x)$ nazveme (nejblíže) alternativní hodnotou pro x, jestliže v není pro x (nejblíže) vázané.

Z výše vyslovených tvrzení je možno odvodit další:

Tvrzení 9. Jestliže hodnota $v \in \mathscr{V}(x)$ je pro x nejblíže alternativní, pak je v pro x oboustranně alternativní.

Tvrzení 10. Hodnota $v \in \mathscr{V}(x)$ je pro x alternativní hodnotou právě tehdy, když je v pro x nejblíže alternativní.

Tvrzení 11. Jestliže $v \in \mathscr{V}(x)$ je pro x alternativní hodnotou, je v pro x oboustranně alternativní.

Tvrzení 12. Existuje fonematický systém, který obsahuje hlásku z a hodnotu v, která je pro z oboustranně alternativní, ale není pro ni nejblíže alternativní.

14. Pertinentní hodnoty

Množinu hodnot hlásky x, které jsou pro x alternativní zleva (zprava), označíme $\mathscr{A}_l(x)$, respektive $\mathscr{A}_p(x)$.

Množinu hodnot hlásky x, které jsou pro x oboustranně alternativní, označíme $\mathscr{A}_0(x)$.

Množinu hodnot hlásky x, které jsou pro x nejblíže alternativní, označíme $\mathscr{A}_n(x)$.

Množinu hodnot hlásky x, které jsou pro x alternativní, označíme $\mathscr{A}(x)$.

Z tvrzení 9, 10, 11, 12 může být odvozeno

Tvrzení 13. Pro každou hlásku x platí

$$\mathscr{A}(x) = \mathscr{A}_p(x) \subseteq \mathscr{A}_0(x)$$

a v některých fonematických systémech existují hlásky x, pro něž je $\mathscr{A}_n(x)$ vlastní podmnožinou množiny $\mathscr{A}_0(x)$.

Budeme nyní uvažovat v množině vyznačených posloupností ekvivalenci R, jejíž přirozená interpretace je tato: dvě vyznačené posloupnosti jsou R-ekvivalentní, mají-li tentýž význam.

Buď $v \in \mathscr{A}(x)$. Říkáme, že v je pro x pertinentní vzhledem k vyznačené posloupnosti s obsahující x, existují-li hodnota v' a hláska y takové, že 1. $\mathscr{V}(y) = (\mathscr{V}(x) - \{v\}) \cup \{v'\}$; 2. posloupnost σ získaná z posloupnosti s nahrazením hlásky x hláskou y je vyznačená; 3. σ není R-ekvivalentní s s.

Buď $v \in \mathscr{A}(x)$. Existuje-li vyznačená posloupnost s obsahující x a mající tu vlastnost, že v je vzhledem k ní pro x pertinentní, říkáme, že v je pertinentní hodnota hlásky x.

Jestliže ve výše uvedených definicích nahradíme množinu $\mathscr{A}(x)$ množinou $\mathscr{A}_0(x)$, dostaneme oboustranně pertinentní hodnotu hlásky x.

15. Fonémy

Označme $\mathscr{F}(x)$ množinu pertinentních hodnot hlásky x a $\mathscr{F}_0(x)$ množinu oboustranně pertinentních hodnot hlásky x. Dvojici $\{x, \mathscr{F}(x)\}$ nazveme fonémem přiřazeným hlásce x čili fonémem indukovaným hláskou x; obdobně nazveme dvojici $\{x, \mathscr{F}_0(x)\}$ oboustranným fonémem přiřazeným hlásce x čili oboustranným fonémem indukovaným hláskou x.

Říkáme, že dvě hlásky x a y jsou fonematicky ekvivalentní, jestliže $\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}(y)$; x a y jsou oboustranně fonematicky ekvivalentní, jestliže $\mathscr{F}_0(x) = \mathscr{F}_0(y)$. Označme $\mathscr{C}(x)$ množinu hlásek fonematicky ekvivalentních s x a $\mathscr{C}_0(x)$ množinu hlásek oboustranně fonematicky ekvivalentních s x. Dvojice $\{\mathscr{C}(x), \mathscr{F}(x)\}$ je obecný foném přiřazený hlásce x čili obecný foném indukovaný hláskou x; každá hláska $y \in \mathscr{C}(x)$ je alofon nebo varianta. $\mathscr{C}(x)$ je fyzická složka a $\mathscr{F}(x)$ relační složka příslušného fonému. Dvojice $\{\mathscr{C}_0(x), \mathscr{F}_0(x)\}$ je oboustranný obecný foném přiřazený hlásce x čili oboustranný obecný foném indukovaný hláskou x.

16. Neutralizace a archifoném

Nechť x má pertinentní hodnotu v. Buď s vyznačená posloupnost obsahující x a v' hodnota a y hláska mající vlastnosti 1, 2 a 3, obsažené v definici pertinentní hodnoty vzhledem k s. Buď τ vyznačená posloupnost obsahující x. Předpokládejme, že jsou splněny tyto podmínky: α) posloupnost τ' získaná z τ nahrazením hlásky x hláskou y je vyznačená; β) τ' je R-ekvivalentní s τ. Za těchto podmínek říkáme, že x definuje v posloupnosti τ neutralizační pozici rozdílu mezi v a v'. Jestliže x definuje v množině τ pro každou posloupnost s obsahující x, pro každou hodnotu v' a pro každou hlásku y mající vlastnosti 1, 2 a 3, obsažené v definici pertinentní hodnoty vzhledem k s, neutralizační pozici rozdílu mezi v a v', pak říkáme, že x definuje v množině τ pozici absolutní neutralizace čili pozici neutralizace rozdílu mezi v a ostatními hodnotami homogenními s v.

Jsou-li dány dva obecné fonémy $(\mathscr{C}(x), \mathscr{F}(x))$ a $(\mathscr{C}(y), \mathscr{F}(y))$, nazýváme archifonémem přiřazeným oběma fonémům množinu

$$\mathscr{F}(x) \cap \mathscr{F}(y)\,.$$

Archifoném je normální, jestliže každá z množin

$$\mathscr{F}(x) - \mathscr{F}(y), \quad \mathscr{F}(y) - \mathscr{F}(x)$$

obsahuje jeden a jen jeden prvek.

Existuje-li hláska z taková, že

$$\mathscr{F}(z) = \mathscr{F}(x) \cap \mathscr{F}(y)\,,$$

říkáme, že archifoném definovaný druhým členem poslední rovnice je realizovaný. Z toho vyplývá, že existuje foném $(\mathscr{C}(z), \mathscr{F}(z))$, který má jako relační složku archifoném $\mathscr{F}(x) \cap \mathscr{F}(y)$.

Každému typu protikladu mezi $\mathscr{F}(x)$ a $\mathscr{F}(y)$ odpovídá určitý typ archifonému. Jestliže $\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}(y)$, pak přiřazený archifoném je samo $\mathscr{F}(x)$. Jestliže $\mathscr{F}(x) \cap \mathscr{F}(y) = 0$, pak přiřazený archifoném je prázdný. Jestliže $\mathscr{F}(x) \subset \mathscr{F}(y)$, přiřazený archifoném je realizovaný; můžeme totiž psát $z = x$. Jestliže $\mathscr{F}(y) \subset \mathscr{F}(x)$, přiřazený archifoném je rovněž realizovaný, jak zjistíme, položíme-li $z = y$.

K pojmům neutralizace a archifonému, pokud jde o jejich lingvistický aspekt, viz též [103].

17. Pojem fonologického systému

V následujících výkladech zachováme myšlenkový postup, obsažený v článku [80], ale provedeme určitá zlepšení a zpřesnění.

Nechť je $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ volný monoid generovaný množinou abstraktních hlásek, kterou označíme $\mathscr{S}$. Mezi prvky $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ je také prázdná posloupnost ω, mající vlastnost $x\omega = \omega x = x$ pro jakékoli $x \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$. Označme $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ podmnožinu množiny $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ vytvořenou z vyznačených posloupností abstraktních hlásek a buď R relace kongruence v $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ (o pojmu kongruence viz kap. 30 oddílu I.) taková, že podmnožina $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ je uzavřená vzhledem k R (tj. pro $x \in \mathscr{F}(\mathscr{E})$ a xRy platí $y \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$). Systém takto definovaných předmětů $\{\mathscr{E}(\mathscr{S}), \mathscr{F}(\mathscr{S}), R\}$ nazveme fonologickým systémem; jde o fonologický systém jazyka, jehož fráze jsou prvky množiny $\mathscr{F}(\mathscr{S})$. Omezení relace R na množinu $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ (tj. relaci R uvažovanou pouze pro prvky množiny $\mathscr{F}(\mathscr{S})$) interpretujeme jako relaci synonymie; je tedy rozšířením relace R v kapitole 14.

Na základě tvrzení 19 I. oddílu platí pro x, y, z, $w \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$, xRy a zRw také $xzRyw$. Na základě určitých dvojic synonymních vyznačených posloupností obdržíme tedy nekonečné množství těchto dvojic.

Uzavřenost množiny $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ vzhledem k relaci R značí, že synonymie mezi y a $x \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ implikuje vyznačenost y, což ostatně vyžaduje sám pojem synonymie. Volba množiny $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ a relace R je zřejmě ovlivněna sémantikou a syntaxí.

18. Varianty

Jsou-li dány části množiny $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$, označíme $X_1X_2 \ldots X_n$ množinu posloupností tvaru $x_1x_2 \ldots x_n$, kde $x_i \in X_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Jestliže $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, pak klademe $X_1X_2 \ldots X_n = X^n$.

V následujících výkladech všechny uvažované pologrupy obsahují prázdnou posloupnost ω.

Buď X část $\mathscr{E}(\mathscr{S})$. Pologrupa $D(X)$ generovaná množinou X je nejmenší podpologrupa z $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ obsahující tuto množinu; to znamená, že $D(X)$ je průnikem všech podpologrup z $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ obsahujících množinu X.

Tvrzení 14. Pologrupa $D(X)$ generovaná množinou X splývá s množinou

$$A = X^0 \cup X^1 \cup \ldots \cup X^n \cup \ldots,$$

kde $X^0 = \{\omega\}$.

Důkaz. Je-li Y pologrupa obsahující X, pak Y obsahuje také množinu X^n pro jakékoli celé nezáporné n; tedy $A \subseteq Y$, z čehož vyplývá $A \subseteq \cap\, Y$, kde Y probíhá všechny pologrupy obsahující X, a tedy $A \subseteq D(X)$. Ale je zřejmé, že A je také pologrupa obsahující X, a tedy $D(X) \subseteq A$. Z toho vyplývá, že $D(X) = A$.

Říkáme, že mezi posloupnostmi x a y je relace variace nebo že x (resp. y) je variantou y (resp. x) a píšeme $x\mu y$, jestliže pro jakékoli posloupnosti z a w platí tyto dvě implikace: 1. jestliže $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, pak $zxwRzyw$; 2. jestliže $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, pak $zxwRzyw$.

Tvrzení 15. Jestliže $x\mu y$ a jestliže $x \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ nebo $y \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, pak platí xRy.

Důkaz. Stačí klást v definici relace variace $z = w = \omega$.

Tvrzení 16. Relace variace je relací kongruence v $\mathscr{E}(\mathscr{S})$.

Důkaz. Z reflexívnosti relace R vyplývá, že relace μ je reflexívní. Symetričnost relace μ je důsledkem definice této relace a symetričnosti relace R. Předpokládejme nyní, že platí $x\mu y$ a $y\mu z$. Mějme naopak $uxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$. Z $x\mu y$ lze odvodit $uxwRuyw$; protože $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ je uzavřené vzhledem k R, platí tedy $uyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$. Z $y\mu z$ lze nyní odvodit $uywRuzw$ a vzhledem k tranzitivnosti R také $uxwRuzw$. Tím jsme stanovili implikaci $uxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S}) \Rightarrow uxwRuzw$. Obdobně můžeme stanovit implikaci $uzw \in \mathscr{F}(\mathscr{S}) \Rightarrow uxwRuzw$. Relace μ je tedy tranzitivní; je to ekvivalence v $\mathscr{E}(\mathscr{S})$.

Předpokládejme nyní, že $x\mu y$, a dokažme, že $xv\mu yv$ platí pro jakékoli $v \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$. Předpokládejme, že $zxvw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$. Z $x\mu y$ vyplývá, že $zxvwRzyvw$. Jestliže $zyvw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, platí také na základě $x\mu y$ relace $zxvwRzyvw$. Z toho vyplývá, že platí $zv\mu yv$ a že relace μ je invariantní zprava. Obdobně lze dokázat, že μ je invariantní zleva; je to tedy relace kongruence.

Poznámka. Posloupnosti parazitní vzhledem k $\mathscr{F}(\mathscr{S})$, tedy posloupnosti, které nejsou obsaženy v žádné posloupnosti z $\mathscr{F}(\mathscr{S})$, tvoří jedinou kongruenční třídu.

Tvrzení 17. Množina $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ je uzavřená vzhledem k μ.

Důkaz. Předpokládejme, že platí $x \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ a $x\mu y$. Podle tvrzení 15 platí xRy. Avšak $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ je uzavřené vzhledem k R, tedy $y \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$.

19. Varianty v širším slova smyslu

Relace variace μ odpovídá vztahu volné variace, dobře známé ve fonologii. Je však známo, že dvě zvukové posloupnosti jsou ve fonologii považovány za varianty (alofony) téže entity nejen tehdy, je-li mezi nimi vztah volné variace, ale i v některých případech komplementární distribuce (o tomto typu distribuce viz 34. kap. I. oddílu). Abychom zahrnuli i tento případ, rozšíříme relaci μ takto: Vztah mezi posloupnostmi x a y nazveme relací variace v širším slova smyslu, jestliže pro jakékoli posloupnosti z a w takové, že $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ a $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, platí $zxwRzyw$. V tomto případě říkáme, že x (resp. y) je variantou y (resp. x) v širším slova smyslu a píšeme xvy.

Tvrzení 18. Je-li x variantou y, pak je jeho variantou v širším slova smyslu; opak však neplatí.

Důkaz. Jestliže $x\mu y$, $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ a $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, můžeme použít kterékoli z implikací 1 a 2 definice relace μ a obdržíme $zxwRzyw$; tedy xvy.

Abychom dokázali, že opak této věty neplatí, mějme $\mathscr{S} = \{a, b\}$ a $\mathscr{F}(\mathscr{S}) = \{aaa, aab, aba, abb\}$. Dohodněme se, že R bude označovat relaci definovanou rozkladem množiny $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ na distribuční třídy v širším slova smyslu (viz 29. kap. I. oddílu). Jak víme (z 30. kap. I. oddílu), R je v tomto případě relací kongruence a podle tvrzení 20 a 22 I. oddílu je $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ uzavřené vzhledem k R.

Položme nyní $x = b$ a $y = a$. Abychom dostali $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ a $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, je nutné a stačí, aby nastal jeden z těchto tří případů: $z = a$, $w = a$; $z = aa$, $w = \omega$; $z = ab$, $w = \omega$. Při každém z nich lze konstatovat, že platí $zxwRzyw$, tedy xvy. Naopak jestliže $z = \omega$ a $w = aa$, lze konstatovat, že platí $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ – neboť $zxw = aaa$ – ale neplatí $zxwRzyw$, neboť $zyw\,(= baa)$ nepatří do $\mathscr{F}(\mathscr{S})$, tedy nemůže být v téže distribuční třídě v širším slova smyslu jako zxw. Z toho vyplývá, že neplatí $x\mu y$.

Poznámka. Jestliže x nebo $y \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ a $x\mu y$, pak podle tvrzení 5 platí xRy. Ale ve výše podaném důkazu je obsažena také implikace $xRy \Rightarrow x\mu y$. Jestliže totiž x a y jsou v téže distribuční třídě v širším slova smyslu, pak pro $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ skutečně platí – podle tvrzení 18 I. oddílu – $zxwRzyw$; z téhož důvodu platí $zxwRzyw$ i tehdy, když $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$.

20. Podřazenost variant v širším slova smyslu

Foném je někdy definován jako množina hlásek, mezi nimiž je vztah volné variace nebo komplementární distribuce. To znamená, že dvě posloupnosti x a y jsou pokládány za tentýž foném právě tehdy, když xvy. K vztahům $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ totiž nikdy nedochází, jsou-li x a y v komplementární distribuci; tím je tedy žádané implikaci vyhověno. Ale tak dochází k dvojznačnosti, neboť relace v není ekvivalencí. Platí totiž

Tvrzení 19. Variační relace v širším slova smyslu není tranzitivní.

Důkaz. Mějme $\mathscr{S} = \{a, b, c, d, e, f\}$ a $\mathscr{F}(\mathscr{S}) = \{ae, ce, fa, cf, dbe, dae, dce, fae\}$. Dohodněme se, že R bude relace definovaná rozkladem $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ na distribuční třídy v širším slova smyslu. Ukážeme, že pro $x = a$, $y = b$ a $u = c$ platí xvy a yvu, ale neplatí xvu. Platí totiž $zaw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ a $zbw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ právě tehdy, když $z = d$ a $w = e$. Ale platí $dbeRdae$, neboť dbe a dae jsou vyznačené posloupnosti, jejichž jediný připuštěný kontext je prázdný. Tak jsme stanovili, že xvy. Rovněž platí yvu, neboť k relacím $zbw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ a $zcw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ dochází právě tehdy, když $z = d$ a $w = e$, a naopak platí $dbeRdce$. Neplatí však xvu, neboť pro $z = \omega$ a $w = e$ platí $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ a $zuw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, ale neplatí $zxwRzuw$; zxw je totiž připuštěno kontextem (f, ω), zatímco zuw tímto kontextem připuštěno není.

21. Fonematický základ a fonémy

Buď $X \subseteq \mathscr{E}(\mathscr{S})$. Říkáme, že X je základem fonologického systému $\{\mathscr{E}(\mathscr{S}), \mathscr{F}(\mathscr{S}), R\}$, jestliže existuje podmnožina $Y \subseteq \mathscr{E}(\mathscr{S})$ mající tyto tři vlastnosti: 1. $Y \subseteq D(X)$; 2. jestliže $x \in X$, $y \in Y$ a $u, v \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$ (přičemž alespoň jedna z posloupností u a v je neprázdná), pak nemůže platit $x = uyv$ (tj. posloupnost z Y nemůže být vlastní podmnožinou posloupnosti z X); 3. $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subseteq D(\mu(Y))$, kde $\mu(Y)$ označuje množinu variant posloupností z Y.

Na základě tvrzení 14 podmínka 1 znamená, že prvky podmnožiny Y jsou posloupnosti prvků základu X. Podmínka 2 vyjadřuje minimální charakter posloupností patřících do základu X, zatímco podmínka 3 dovoluje chápat každou frázi uvažovaného jazyka jako posloupnost variant určitých posloupností z Y. Jestliže, jak to činí S. Kanger [80], interpretujeme prvky podmnožiny Y jako slova, jejichž výslovnost je přísně standardizována, pak $\mu(Y)$ obsahuje všechny výslovnostní varianty slov z Y a tedy každá fráze jazyka $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ je posloupností variant slov z Y.

Ve zvláštním případě, kdy relace $x\mu y$ platí, jen když $x = y$, je základ X takový, že každá fráze z $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ je posloupností prvků základu X; je to bezprostřední důsledek tvrzení 14 a toho, že z relací $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subseteq D(Y)$ a $Y \subseteq D(X)$ vyplývá relace $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subseteq D(X)$ (neboť $D(D(X)) = D(X)$, zatímco z $M \subseteq N$ vyplývá, že $D(M) \subseteq D(N)$).

Mezi různými základy fonologického systému jsou nejdůležitější právě ty, které obsahují nejmenší počet prvků. Tak docházíme k tomuto pojmu: Základ X nazveme fonematickým základem, jestliže neexistuje žádný jiný základ, jehož kardinální číslo je nižší než kardinální číslo základu X. Tentýž fonologický systém může zřejmě mít několik fonematických základů. Můžeme pak dát přednost fonematickému základu majícímu tu vlastnost, že přiřazená množina Y má nejmenší kardinální číslo, nebo můžeme vzít v úvahu jiná kritéria.

Je-li mezi základy fonologického systému alespoň jeden konečný, pak mluvíme o systému s konečným fonematickým základem. Množina prvků fonematického

základu tvoří v tomto případě fonematický inventář uvažovaného systému, zatímco prvky samy jsou fonémy uvažovaného fonematického inventáře. Počet fonémů fonologického systému nazveme indexem tohoto systému.

22. Otázky existence a jednoznačnosti fonematického inventáře

Tvrzení 20. Každý fonologický systém má konečný fonematický základ. Index systému $\{\mathscr{E}(\mathscr{S}), \mathscr{F}(\mathscr{S}), R\}$ nemůže být větší než počet prvků množiny $\mathscr{S}$, která je vždy základem.

Důkaz. Množina $\mathscr{S}$ je základ systému, neboť pro $Y = \mathscr{F}(\mathscr{S})$ platí vždy $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subseteq D(\mathscr{S})$ a $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subseteq D(\mu(\mathscr{F}(\mathscr{S})))$. Mimoto žádná posloupnost nemůže být vlastní podmnožinou posloupnosti vytvořené z jediného prvku. Protože však předpokládáme, že $\mathscr{S}$ je konečná množina, je také konečným základem a index fonologického systému nemůže být větší než počet prvků množiny $\mathscr{S}$.

Tvrzení 21. Nejsou-li x a y parazitní vzhledem k $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ a platí-li implikace $xRy \Rightarrow x = y$, platí také implikace $x\mu y \Rightarrow x = y$. (Parazitními posloupnostmi se rozumějí parazitní fráze ve smyslu výkladů podaných ve 40. kap. I. oddílu.)

Důkaz. Předpokládejme, že $xRy \Rightarrow x = y$ a že $x\mu y$. Jestliže $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, pak platí $zxwRzyw$, tedy $zxw = zyw$ a tedy $x = y$. Podobně zjistíme pro $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, že $x = y$. Naopak určitě existuje takové z a takové w, že $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, neboť x není parazitní.

Tvrzení 22. Existuje fonologický systém, jehož fonematický základ není jednoznačně určen.

Důkaz. Mějme $\mathscr{S} = \{a, b\}$ a $\mathscr{F}(\mathscr{S}) = \{ab, abab, \ldots, (ab)^n, \ldots, ba, baba, \ldots, (ba)^n, \ldots\}$. Položme xRy pro $x, y \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ právě tehdy, když $x = y$. Na základě tvrzení 21 platí $x\mu y$ pro neparazitní x a y právě tehdy, když $x = y$. Z tvrzení 20 vyplývá základ $B = \{a, b\}$. Je jasné, že B je fonematický základ, tj. že index uvažovaného systému se rovná dvěma. Ale existuje ještě jeden fonematický základ; je to množina $B' = \{ab, ba\}$, neboť každá věta z $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ je konečnou posloupností prvků množiny B'.

V uvedeném případě je snadné si vybrat mezi dvěma základy; vhodnější je základ B, neboť obsahuje méně symbolů.

Bylo by možno se domnívat, že množina $\mathscr{S}$ je vždy fonematickým základem. Ale je snadné uvést takový příklad, kde $\mathscr{S}$ fonematickým základem není. Platí totiž

Tvrzení 23. Existuje fonologický systém, jehož index je vždy menší než počet prvků $\mathscr{S}$.

Důkaz. Mějme $\mathscr{S} = \{a, b\}$ a $\mathscr{F}(\mathscr{S}) = \{ab, (ab)^2, \ldots, (ab)^n, \ldots\}$. Položme xRy pro $x, y \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ právě tehdy, když $x = y$. Na základě tvrzení 21 platí $x\mu y$

pro neparazitní x a y právě tehdy, když $x = y$. Z tvrzení 20 vyplývá základ $B = \{a, b\}$. Tento základ však není fonematický, neboť existuje základ vytvořený z jediné posloupnosti, totiž $B' = \{ab\}$. Index uvažovaného systému se tedy rovná jedné.

23. Některé nesnáze s aplikací na přirozené jazyky

Jde-li o fonematický inventář přirozeného jazyka, je třeba dbát těchto dvou požadavků, které jsou oba stejně důležité:

a) Počet fonémů musí být co nejmenší;

b) Každá fráze daného jazyka musí být posloupností variant fonémů.

Definice fonematického inventáře, kterou jsme podali výše, je ve shodě s požadavkem a), ale nikoli s požadavkem b). Podle uvedených definic je totiž každá fráze daného jazyka posloupností variant posloupností fonémů, ale není vždy posloupností variant fonémů. Požadavku b) není vyhověno zvláště tehdy, jestliže bereme v úvahu prozodické rysy.

Podmínce b) by mohlo být vyhověno, kdybychom pozměnili definici základu takto: X je základem fonologického systému $\{\mathscr{E}(\mathscr{S}), \mathscr{F}(\mathscr{S}), R\}$, jestliže žádná posloupnost z $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ není vlastní podmnožinou některé posloupnosti z X a jestliže platí inkluze $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subseteq D(\mu(X))$.

V tomto případě však již není vyhověno podmínce a), jak ukazuje následující příklad z angličtiny. Označme o^n (resp. i^n) výraz vytvořený z hlásky o (resp. i) s n přízvuky; o^3 není variantou výrazu o^1, neboť existují kontexty, v nichž nahrazením výrazu o^3 výrazem o^1 nedostaneme synonymní posloupnost: i^2mpo^3rt a i^2mpo^1rt nejsou synonyma. Podobně o^5 není variantou o^3 nebo o^1, neboť i^4mpo^5rt není synonymní s i^4mpo^3rt ani s i^4mpo^1rt. Pokračujeme-li takto dále, můžeme konstatovat, že hláska o, je-li různě přízvukována, generuje velký počet fonémů. Jakmile se však vzdáme podmínky b) (abychom mohli „vyřešit“ homonymii slova jako import), dojdeme pouze k dvěma fonémům generovaným hláskou o, jednomu přízvučnému a jednomu nepřízvučnému.

24. Binarismus

Vraťme se nyní k výkladům v kapitolách 2–16.

Podle Romana Jakobsona [76], [77] základním pojmem fonematického rozboru není pojem fonému, ale pojem, který nazývá „binárním distinktivním rysem“. Použijeme-li terminologie, kterou jsme zavedli v dřívějších výkladech, odpovídá binární distinktivní rys pertinentní hodnotě za předpokladu, že každá množina homogenních hodnot je vytvořena právě z dvou prvků (z nichž jeden je kladný a označí-

me jej +, druhý záporný a označíme jej −). Relační složka každého fonému je tedy množinou takových „binárních distinktivních rysů“. Tato hypotéza je právě jednou ze základních myšlenek Jakobsonovy teorie.

V práci uveřejněné téměř před 30 lety R. Jakobson [75] píše na str. 35 toto:

„V logice se rozlišují dva druhy protikladů. První typ, protiklad kontradiktorních členů, je relace mezi přítomností a nepřítomností téhož prvku. Příklad: dlouhé samohlásky v protikladu k samohláskám bez délky. Druhý typ, protiklad kontrárních členů, je relace mezi dvěma prvky, které patří k témuž druhu prvků a které se od sebe nejvíce liší nebo které obsahují maximum nebo minimum určité vlastnosti, jež se může vyskytovat v různé míře. Příklad: vysoké samohlásky v protikladu k hlubokým.“

Popisy v pracích [25], [26], [49], [74], [119], [128], [131], [140] redukují fonematický rozbor na výhradně kontradiktorní členy; v tom se projevuje jazykový binarismus. Polemiky o této otázce dosud neskončily [50], [70]. Z hlediska popisu, který jsme podali v tomto oddílu, jsou dvě homogenní hodnoty v_1 a v_2 kontradiktorní členy, jestliže množina $\mathscr{V}_i$, jejímiž jsou prvky, je vytvořena právě jen z těchto dvou prvků; obsahuje-li naopak množina $\mathscr{V}_i$ alespoň jednu hodnotu jinou než v_1 a v_2, pak je existence kontradiktorních členů vyloučena. Jestliže například $\mathscr{V}_i = \{$neznělá, znělá$\}$, pak neznělá a znělá jsou kontradiktorní členy; jestliže však $\mathscr{V}_i = \{$neznělá, nepárová, znělá$\}$, pak neznělá a znělá jsou kontrární členy, zatímco členy neznělá a nepárová nebo nepárová a znělá nejsou ani kontradiktorní, ani kontrární.

Binární popisy mají mnoho předností nejen z důvodů lingvistických, ale i z důvodů matematických. Dovolují provést bezpečné analogie s teorií binárních kódů — která je již velmi rozvinuta — a s teorií Booleových algeber a funkcí (viz také Prietovu práci [121]).

Přihlédneme-li pouze k relační složce fonémů, ukáže nám tab. 3 binární znázornění většiny anglických souhláskových fonémů [51]:

Tab. 3

	p	b	m	f	v	k	g	t	d	θ	đ	n	s	z	č	ǯ	š	ž
samohláskový	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
souhláskový	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
gravisový	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
kompaktní	−	−	−	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
drsný	−	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+
nazální	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−	−	−
trvalý	−	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	+	+	−	−	+	+
znělý	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+

25. Jednoduchost fonologického popisu

Množinu fonémů A nazveme přirozenou třídou, jestliže počet hodnot společných těmto fonémům a nutných k charakterizaci množiny je menší než počet hodnot, jež charakterizují kterýkoli foném množiny A.

Může se stát, že množina hodnot společných fonémům množiny A není pro A charakteristická; v tom případě není A přirozenou třídou (viz níže příklad 4).

Příklad 1. Množina všech anglických souhlásek je přirozená třída, jelikož je charakterizována hodnotami souhláskovost a nevokaličnost, zatímco žádnou souhlásku nelze charakterizovat pouze dvěma hodnotami.

Příklad 2. Množina $\{s, z, č, ǯ, š, ž\}$ je charakterizována pouze dvěma hodnotami: negravisovost a drsnost. Tato množina je tedy přirozenou třídou, jelikož žádný z jejích prvků nelze charakterizovat pouze dvěma hodnotami.

Příklad 3. Množina $\{p, b, f, v, m\}$ je charakterizována hodnotami gravisovost a nekompaktnost. Je tedy rovněž přirozenou třídou.

Příklad 4. Množina $\{m, s\}$ není přirozenou třídou, neboť hodnoty společné souhláskám m a s jsou nevokaličnost, souhláskovost a nekompaktnost; existují však i jiné souhlásky, např. p, b, n, f, v, t, d, které mají rovněž tyto tři hodnoty.

Pojem přirozené třídy zavedl Morris Halle [51]. Navrhuje posuzovat jednoduchost fonologického popisu podle počtu použitých hodnot: popis je tím jednodušší, čím je tento počet menší. Názorným příkladem je tvoření plurálu anglických substantiv. Jeho jeden možný popis je tento: a) je-li konečný prvek kmene nevokalický, souhláskový, negravisový a drsný, připojuje se [iz]; b) je-li konečný prvek kmene nevokalický, souhláskový, neznělý a nedrsný nebo je-li nevokalický, souhláskový, neznělý, drsný a gravisový, připojuje se [s]; c) je-li konečný prvek kmene vokalický nebo je-li nevokalický, souhláskový, znělý a nedrsný nebo je-li konečně nevokalický, souhláskový, znělý, drsný a gravisový, připojuje se [z]. Je možný ještě jiný popis: A) je-li konečný prvek kmene nevokalický, souhláskový, negravisový a drsný, připojuje se [iz]; B) je-li konečný prvek kmene nevokalický, souhláskový a neznělý, připojuje se [s]; C) ve všech ostatních případech se připojuje [z].

Druhý popis je zřejmě jednodušší než první, užívá jen pěti hodnot, zatímco první jich užívá sedm. Je jasné, že k této úspoře došlo lepší klasifikací možných případů [51]. Protože určitý fonologický popis není nikdy jediný možný [24], nabízí se možnost výběru.

26. Booleovy algebry

Uvažujme množinu A a dvě binární operace definované v A, z nichž jednu označíme $\vee$, druhou $\wedge$. Každé dvojici prvků množiny A — které označíme x, y —

přiřadíme tedy dva zcela určité prvky této množiny, z nichž jeden označíme $x \vee y$, druhý $x \wedge y$. Předpokládáme, že je splněno těchto pět podmínek pro jakékoli x, y a z z množiny A:

1. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
2. $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$;
3. množina A obsahuje prvek e takový, že $x \wedge e = x$;
4. množina A obsahuje prvek 0 takový, že $x \vee 0 = 0 \vee x = x$;
5. ke každému prvku $x \in A$ existuje v množině A alespoň jeden prvek x' takový, že $x \wedge x' = 0$ a $x \vee x' = e$; prvek x' nazveme doplňkem prvku x.

Množina A opatřená dvěma binárními operacemi $\vee$ a $\wedge$ a mající pět výše uvedených vlastností se nazývá Booleova algebra.

Tvrzení 24. Je-li A Booleova algebra, pak platí $x \wedge x = x$ pro jakékoli $x \in A$.

Důkaz. Použitím vlastností 4, 5, 1 a pak znovu vlastnosti 5 obdržíme

$$x \wedge x = (x \wedge x) \vee 0 = (x \wedge x) \vee (x \wedge x') = x \wedge (x \vee x') = x \wedge e = x.$$

Tvrzení 25. Je-li A Booleova algebra, platí $(x')' = x$ pro jakékoli $x \in A$.

Důkaz. Použitím tvrzení 21 a pěti vlastností naší definice obdržíme

$$(x')' = 0 \vee [(x')' \wedge (x')'] = [x' \wedge (x')'] \vee [(x')' \wedge (x')'] = [x' \vee (x')'] \wedge (x')' = $$
$$= e \wedge (x')' = (x \vee x') \wedge (x')' = [x \wedge (x')'] \vee 0 = 0 \vee [x \wedge (x')'] = (x \wedge x') \vee$$
$$\vee [x \wedge (x')'] = x \wedge [x' \vee (x')'] = x \wedge e = x .$$

Tvrzení 26. Je-li A Booleova algebra, platí $x' \wedge x = 0$ a $x' \vee x = e$ pro jakékoli $x \in A$.

Důkaz. Z tvrzení 25 vskutku vyplývá, že $x' \wedge x = x' \wedge (x')'$ a tedy na základě 5. vlastnosti naší definice platí $x' \wedge x = 0$. Naopak z týchž důvodů platí $x' \vee x = x' \vee (x')' = e$.

Tvrzení 27. Je-li A Booleova algebra, je prvek x' přiřazený kterémukoli $x \in A$ jednoznačně určen.

Důkaz. Buďte x'_1 a x'_2 dva doplňky prvku x. Z tvrzení 25 vyplývá, že $x'_1 = [(x')']' = x'_2$.

Tvrzení 28. Je-li A Booleova algebra, platí $x \wedge 0 = 0 = 0 \wedge x$ pro jakékoli $x \in A$.

Důkaz. Platí

$$0 = x \wedge x' = x \wedge (x' \vee 0) = (x \wedge x') \vee (x \wedge 0) = 0 \vee (x \wedge 0) = x \wedge 0$$

a

$$0 = y \wedge y' = (0 \vee y) \wedge y' = (0 \wedge y') \vee (y \wedge y') = (0 \wedge y') \vee 0 = 0 \wedge y'.$$

Avšak z tvrzení 25 pro $y = x'$ vyplývá $x = y'$ a tím je tvrzení 28 dokázáno.

Korolár 1. Jestliže $0 = e$, pak $x = 0$ pro jakékoli $x \in A$.

Důkaz. Platí $0 = 0 \vee 0 = 0 \vee (x \wedge 0) = 0 \vee (x \wedge e) = x \wedge e = x$.

Korolár 2. Jestliže $0 \neq e$, pak $e \wedge x = x$ pro jakékoli $x \in A$.

Důkaz. Platí $e \wedge x = (x \vee x') \wedge x = (x \wedge x) \vee (x' \wedge x) = x \vee 0 = x$.

Příklad Booleovy algebry. Buď E jakákoli množina. Označme $\mathscr{P}(E)$ množinu částí množiny E. Je jasné – důkaz přenecháváme čtenáři – že $\mathscr{P}(E)$, opatřené operacemi sjednocení a průniku, je Booleova algebra ($\cup$ nahrazuje $\vee$, $\cap$ nahrazuje $\wedge$). Úlohu e přebírá množina E, úlohu 0 přebírá prázdná podmnožina množiny E. Je-li konečně $M \in \mathscr{P}(E)$, je M' doplněk podmnožiny M vzhledem k množině E. Je také snadné ověřit na tomto zvláštním případě tvrzení, jejichž důkaz jsme podali výše.

O definici Booleových algeber a jejich zmíněných vlastnostech viz práce [13] a [44], které systematicky a podrobně studují tyto matematické struktury.

27. Booleova algebra generovaná třídou množin

Uvažujme množinu E a vlastnosti $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, které lze přisoudit jejím prvkům. Předpokládejme, že každý prvek množiny E má alespoň jednu z uvažovaných vlastností. Označme a (resp. $b, c, \ldots$) množinu prvků množiny E majících vlastnost α (resp. $\beta, \gamma, \ldots$). Připomínáme, že $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}, \bar{c}, \ldots$) označuje doplněk množiny a (resp. $b, c, \ldots$) vzhledem k E. Pro zjednodušení zápisu budeme v této kapitole označovat průnik $\cap$ prostým položením prvků vedle sebe.

Uvažujme nyní všechny množiny, které je možno vytvořit z množin $a, b, c, \ldots$ operacemi sjednocení a průniku a operací vytvoření doplňků. Je jasné, že takto získaná třída množin je Booleova algebra, jejíž prvek e je E (množina prvků množiny E majících alespoň jednu z vlastností $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$), zatímco prvek 0 je prázdná množina (množina prvků množiny E, které nemají žádnou z vlastností $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$). O takto získané Booleově algebře říkáme, že je generována množinami $a, b, c, \ldots$, které jsou jejími generátory. Můžeme také říci, že tato Booleova algebra je generována vlastnostmi $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Máme-li například pouze dvě vlastnosti α a β, Booleova algebra generovaná těmito vlastnostmi je vytvořena z těchto množin: $0, E, a, b, ab, a\bar{b}, \bar{a}b$ (množina $\overline{ab}$ je prázdná).

Označme $\mathscr{B}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ Booleovu algebru generovanou vlastnostmi $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Každý průnik, v němž je každá z množin $a, b, c, \ldots$ zastoupena buď sama sebou,

nebo svým doplňkem, nazveme minimální množinou algebry $\mathscr{B}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$. Je možno dokázat, že je-li počet vlastností $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ rovný n, pak počet minimálních množin algebry $\mathscr{B}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ je nižší než 2^n nebo se rovná tomuto číslu. Jestliže například $n = 3$, dostaneme tyto minimální množiny: abc, $\bar{a}bc$, $a\bar{b}c$ $ab\bar{c}$, $\overline{ab}c$, $\bar{a}b\bar{c}$, $a\overline{bc}$, $\overline{abc}$. Na základě minimálních množin můžeme výše podaný popis znázornit takto:

Tab. 4

	abc	$\bar{a}bc$	$a\bar{b}c$	$\overline{ab}c$	$ab\bar{c}$	$\bar{a}b\bar{c}$	$a\overline{bc}$	$\overline{abc}$
a	+	–	+	–	+	–	+	–
b	+		–		+		–	
c	+				–			

Takového znázornění se právě užívá v některých fonologických popisech, např. v práci [26]. Jestliže vezmeme v úvahu vlastnosti zvukového charakteru a přijmeme binární fonologický popis, skutečně obdržíme pomocí právě vyložených pojmů velmi systematický obraz fonémů v jejich relačním aspektu.

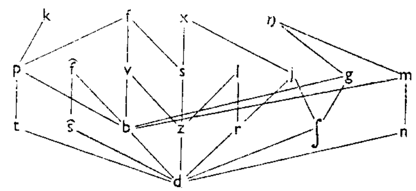
28. Fonémy a Booleovy algebry

Ukážeme si jako příklad znázornění německého souhláskového systému [150]. Uvažujme tyto vlastnosti: α = vokaličnost, β = souhláskovost, γ = kompaktnost, δ = gravisovost, λ = nosovost, μ = durativnost, ν = drsnost, ϱ = napjatost. Označme $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ a ϱ_1 odpovídající množiny fonémů. Německý souhláskový systém je částí Booleovy algebry. Skutečně platí:

$m - \beta_1\delta_1\lambda_1$	$v - \beta_1\delta_1\mu_1$	$s - \beta_1\mu_1\varrho_1$	$k - \beta_1\gamma_1\delta_1\varrho_1$
$p - \beta_1\delta_1\varrho_1$	$n - \beta_1\lambda_1$	$z - \beta_1\mu_1$	$g - \beta_1\gamma_1\delta_1$
$b - \beta_1\delta_1$	$t - \beta_1\varrho_1$	$\hat{s} - \beta_1\nu_1$	$x - \beta_1\gamma_1\mu_1\varrho_1$
$f - \beta_1\delta_1\mu_1\varrho_1$	$d - \beta_1$	$\eta - \beta_1\gamma_1\delta_1\lambda_1$	ʃ $- \beta_1\gamma_1$
$r - \alpha_1\beta_1$	$l - \alpha_1\beta_1\mu_1$	$j - \beta_1\gamma_1\mu_1$	ʃ̂ $- \beta_1\delta_1\nu_1$

Booleova algebra $\mathscr{B}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ připouští takzvaný „Hasseův diagram"; každý prvek této algebry lze znázornit bodem v rovině a narýsovat šipku od bodu P_1

k bodu P_2 právě tehdy, když každou vlastnost prvků množiny přiřazené bodu P_2 mají také prvky množiny přiřazené bodu P_1, ale existuje jedna jediná vlastnost, kterou mají prvky množiny přiřazené bodu P_1, ale nemají prvky množiny přiřazené bodu P_2. Tak obdržíme pro německý souhláskový systém diagram 1:

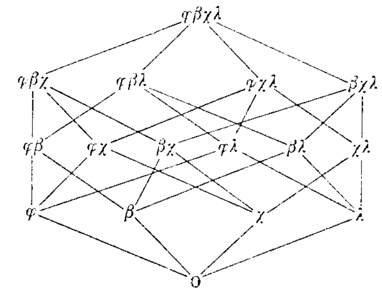


Tento diagram[3] má čtyři roviny; rovina řádu i ($1 \leqq i \leqq 4$) obsahuje souhlásky, které jsou charakterizovány tím, že se počet jejich vlastností rovná i. Toto znázornění odpovídá požadavkům Brøndalovým, který v článku [21] naznačil možnost hierarchie fonémů, „to jest systémových rozdílů řádových nebo rovinových mezi fonémy o variabilní komplexnosti: mezi typy abstraktnějšími, definovanými jednoduše, a typy konkrétnějšími nebo komplexnějšími, definovanými větším počtem prvků". S použitím čtyř artikulačních vlastností, totiž „back, front, high, low" (β, φ, χ, λ), podal Brøndal popis samohláskového systému, přičemž se řídil tímto principem [20]: „Bude především nezbytné odkonkretizovat základní pojmy, tj. vidět v kontrastech front-back a high-low nejen typy fyziologické artikulace, akustické timbry a psychologické reprezentace a obrazy; je třeba v nich vidět současně a jako základ všech těchto vnějších i vnitřních projevů symbolické hodnoty". Ungeheuer správně považuje Brøndala za prvního, kdo zavedl algebraické hledisko do třídění samohlásek [150]. Brøndalův popis vlastně chápe samohláskový systém jako část Booleovy algebry $\mathscr{B}$ (β, φ, χ, λ). Vzniká 16 typů samohlásek, totiž tyto (aby zápis nebyl příliš komplikovaný, budeme označovat množiny přiřazené vlastnostem β, φ, χ, λ týmiž písmeny):

1. neutrální (amorfní) samohláska charakterizovaná nepřítomností všech čtyř vlastností β, φ, χ, λ: [ə];
2. čtyři základní typy samohlásek charakterizované vždy jednou vlastností: [ε] = φ, [o] = β, [ʋ] = χ, [α] = λ;
3. šest různých samohlásek charakterizovaných vždy dvěma vlastnostmi: [ϕ] = $\varphi\beta$, [i] = $\varphi\chi$, [u] = $\chi\beta$, [e] = $\lambda\varphi$, [o] = $\lambda\beta$, [a] = $\chi\lambda$;
4. čtyři kombinované samohlásky charakterizované vždy třemi vlastnostmi: [ẹ] = $\chi\lambda\varphi$, [ọ] = $\chi\lambda\beta$, [ü] = $\varphi\beta\chi$, [ö] = $\varphi\beta\lambda$;
5. jedna polymorfní samohláska charakterizovaná všemi čtyřmi uvažovanými vlastnostmi: ruská samohláska [ы] = $\varphi\beta\chi\lambda$.

[3] Diagram 1 je převzat z článku [49], ale již tam byl zřejmě špatně otištěn; podle předcházejícího popisu německých souhlásek nemá být vedena šipka od [j] k [r], ale zato má být vedena od [j] k [z], od [s] k [t] a od [k] ke [g]. — *Pozn. překladatele.*

Tím obdržíme diagram 2:



Ekvivalentní popis obdržíme použitím binární metody, která nám sloužila k popisu anglického souhláskového systému. Příslušné znázornění podává tabulka 5:

Tab. 5

	ə	ε	o	ʋ	α	ϕ	i	u	e	o	a	ẹ	ọ	ü	ö	ы
φ	−	+	−	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	+
β	−	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	−	+	+	+	+
χ	−	−	−	+	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	+
λ	−	−	−	−	+	−	−	−	+	+	+	+	+	−	+	+

Podobně je možno zkoumat rumunský souhláskový systém na základě práce [102]. O fonematické struktuře rumunštiny viz též práce [3], [118], [134] a [153].

Popis fonémů pomocí Booleových funkcí najde čtenář v knize V. Belevitche [9].

Myšlenky rozvedené v kapitolách 27 a 28 jsou v podstatě myšlenky Ungeheuerovy [150].

O jiných aspektech fonologického rozboru viz [10], [52] a [87].

ODDÍL III

Morfematický rozbor

1. Úvod

Morfematický rozbor si klade za úkol stanovit kritéria rozkladu mluveného řetězu na minimální segmenty nadané lexikálním nebo gramatickým významem. Dále si klade za úkol klasifikaci těchto segmentů, vymezení jejich inventáře tím, že některé z nich bude považovat za ekvivalentní, a zkoumání zákonů jejich kombinace. Jde o jeden z nejobtížnějších jazykovědných problémů; přes četné práce, které byly o věci napsány za posledních téměř sto let, nemáme dosud uspokojivou obecnou teorii morfému. Termín „morfém", který zavedl Baudouin de Courtenay [8], byl již definován a vykládán mnoha způsoby; zračila se v nich obyčejně snaha přesně formulovat intuitivně chápaný pojem minimálního významového segmentu nebo třídy vzájemně ekvivalentních minimálních významových segmentů. Dnes však jsme v situaci, kterou vystihl Hilary Putnam [122] těmito slovy: „When we come to the notion of a morpheme, however, it is more difficult to know what to say. Speaking for myself, I should say that I have never seen a satisfactory definition of this concept in either semantical or nonsemantical terms".

Za této situace bude náš cíl dosti skromný. Nebudeme se snažit o popis takových jemností, jako jsou samohláskové nebo souhláskové alternace s morfologickou funkcí, rozdíl mezi koncovkou a gramatickým sufixem, diskontinuita některých morfémů apod. Pouze zkonstruujeme jednoduché modely dosti základních aspektů flexe; to je první aproximace morfematického rozboru, která se týká pravidelných konstrukcí některých přirozených jazyků a zakládá se hlavně na pojmu paradigmatu, chápaného intuitivně jako úhrnu flektivních tvarů slova. Často se říká, že morfematický rozbor opomíjí slovo. Ale kritéria segmentace mluveného řetězu vycházejí většinou, i když to někdy výslovně neříkají nebo to říkají jen nepřímo, z rozkladu na slova; výjimku tvoří jen malý počet kritérií, z nichž se zdá nejzdařilejším kritérium, které popsal Harris ve své studii [57]. Sami se nesnažíme tajit s tím, že za východisko svého zkoumání považujeme slova. Budeme tedy definovat morfém jako pojem, který má vztah k určitému paradigmatu, tj. úhrnu flektivních tvarů slova. Proto se pokusíme zkonstruovat také logický model pojmu „paradigma". Tato konstrukce samozřejmě nebude vyhovovat všem druhům přirozených jazyků a zvláště se nebude vztahovat na jazyky bez morfologie. Na druhé straně je třeba poznamenat, že takové jevy, jako jsou různé postupy lexikální derivace (např. tvoření deminutiv), vedou k řetězům, jejichž morfematické složky nelze detegovat pomocí

morfologických kritérií. Rozlišení derivace a flexe je dosud nerozřešený problém formální analýzy jazyka; je možné, že jde o pouhou konvenci. Ostatně bylo často poukazováno na relativnost a nejednoznačnost rozlišování mezi tím, co je gramatické a co gramatické není (viz např. [122]). Kritérium čistě syntaktické segmentace, které považuje za dané pouze rozlišování mezi přípustnými a nepřípustnými řetězy, mělo by vést také ke zjištění lexikálně derivačních morfémů. Ale dosud není jisté, zdali takové kritérium jako Harrisovo [57] je pro tento účel dosti přesné.

2. Potřeba studia opozic mezi uspořádanými množinami

Teorie opozic v jazyce, kterou vypracovali Trubeckoj a Cantineau, se vztahuje na opozice mezi množinami jazykových prvků. Taková teorie stačí například pro studium opozic mezi fonémy, chápanými jako množiny distinktivních rysů, nebo opozic mezi množinami morfémů ve smyslu Hjelmslevově. Chceme-li však studovat opozice mezi slovy chápanými jako množiny hlásek, dojdeme k tomuto zjištění: mezi rumunskými slovy un a nu je nulová opozice, neboť obě tvoří množinu $\{U, N\}$. Intuitivně to nelze přijmout, ale teorie jazykových opozic z toho dosud výslovně nevyvodila nutný důsledek, že je potřeba přesně definovat a zkoumat opozice mezi uspořádanými množinami jazykových prvků. V prvním oddílu této knihy jsme se zabývali logickým aspektem opozic mezi neuspořádanými množinami; nyní se budeme zabývat, aniž půjdeme do příliš velkých podrobností, opozicemi mezi množinami uspořádanými. Tak dojdeme k logickému modelu pojmu „paradigma" a na jeho základě k pojmu „morfém".

3. Řetězy, podřetězy a jejich prvky

Nechť E je množina prvků blíže neurčené povahy. Každou konečnou posloupnost prvků množiny E (při čemž týž prvek se může v rámci jedné posloupnosti vyskytnout několikrát) budeme v tomto oddílu nazývat řetězem. Budeme brát v úvahu i prázdný řetěz, který neobsahuje žádný prvek. Jsou-li x, y, z prvky množiny E, pak xyz, xyy, yxx, zzz jsou řetězy vždy po dvou navzájem různé. Existují řetězy, které se od sebe liší přímo druhem prvků (např. řetězy xyz a yxx); jiné se od sebe liší pouze pořádkem prvků (např. xyx a yxx).

Podposloupnost β řetězu α je podřetězem řetězu α, existují-li dvě posloupnosti γ a δ takové, že $\alpha = \gamma\beta\delta$. Například xy a yz jsou podposloupnosti řetězu xyz, avšak xz není podposloupností řetězu xyz, protože x a z spolu v tomto řetězu nesousedí.

V každém řetězu rozlišujeme jeho počáteční a koncový prvek. Podřetěz β řetězu α takový, že existuje řetěz γ, pro který platí $\alpha = \beta\gamma$, nazýváme počátečním podřetězem řetězu α; podřetěz ζ řetězu α takový, že existuje podřetěz ε, pro který platí $\alpha = \varepsilon\zeta$, nazýváme koncovým podřetězem řetězu α. Podřetězu, který není ani počáteční, ani koncový, říkáme střední podřetěz.

4. Uspořádané množiny

Uspořádaná opozice je uspořádaná dvojice řetězů. Uvažujme dva řetězy λ a μ. Opozici mezi λ a μ označíme (λ, μ). Největší počáteční podřetěz, společný řetězům λ a μ, se nazývá počáteční základ opozice (λ, μ). Abychom vyjádřili, že uvažujeme opozici (λ, μ) ve vztahu k jejímu počátečnímu základu, říkáme, že opozice (λ, μ) je počáteční opozice, a píšeme $(\lambda, \mu)_P$. Stejně můžeme uvažovat koncové opozice. Největší koncový podřetěz, společný řetězům λ a μ, se nazývá koncový základ opozice (λ, μ). Abychom vyjádřili, že uvažujeme opozici (λ, μ) ve vztahu k jejímu koncovému základu, říkáme, že opozice (λ, μ) je koncová opozice a píšeme $(\lambda, \mu)_k$.

Stejně můžeme uvažovat i střední opozice; v následujících výkladech se však budeme zabývat pouze opozicemi počátečními a koncovými. Počátečními opozicemi se budeme zabývat podrobněji; naše úvahy o těchto opozicích je možno na základě symetričnosti vztahovat i na opozice koncové. Uspořádané koncové nebo počáteční opozice budeme označovat výrazem krajní opozice.

5. Klasifikace počátečních opozic

Definujme operaci skládání řetězů. Jsou-li dány dva řetězy λ a μ, operace skládání vede k řetězu $\lambda\mu$, který obdržíme tím, že položíme řetěz μ vpravo od řetězu λ. Operace skládání je asociativní, ale není komutativní (je jasné, že tuto operaci můžeme definovat pro jakýkoli konečný počet řetězů). Příklad: Je-li $\lambda = xyz$ a $\mu = acb$, pak $\lambda\mu = xyzacb$.

Uvažujme počáteční opozici $(\lambda, \mu)_P$ a považujme v za příslušný počáteční základ. Existují dva jednoznačně určené řetězy λ' a μ' takové, že $\lambda = v\lambda'$ a $\mu = v\mu'$. Řetězy λ' a μ' se nazývají diferenční podřetězy opozice $(\lambda, \mu)_P$.

Opozici $(\lambda, \mu)_P$ nazýváme nulovou, jestliže $\lambda = \mu$, tj. jestliže diferenční podřetězy jsou prázdné.

Opozici $(\lambda, \mu)_P$ nazýváme privativní zleva nebo privativní ve prospěch μ, je-li λ' prázdný řetěz a μ' neprázdný řetěz. Opozici $(\lambda, \mu)_p$ nazýváme privativní zprava nebo privativní ve prospěch λ, je-li μ' prázdný řetěz a λ' neprázdný řetěz. Opozici $(\lambda, \mu)_P$, která je privativní zleva nebo zprava, nazýváme privativní. Příklady z ruštiny: Jestliže λ = дуг, μ = дуга, opozice $(\lambda, \mu)_P$ je privativní zleva. Jestliže λ = дуга, μ = дуг, opozice $(\lambda, \mu)_P$ je privativní zprava.*

Opozici $(\lambda, \mu)_P$ nazýváme disjunktní, jestliže odpovídající počáteční základ je prázdný řetěz. Je-li např. λ = город a μ = книга, opozice $(\lambda, \mu)_P$ je disjunktní; je-li λ = до, μ = то, opozice $(\lambda, \mu)_P$ je rovněž disjunktní.

Opozici $(\lambda, \mu)_P$ nazýváme ekvipolentní, není-li ani nulová, ani privativní, ani disjunktní. Jestliže například λ = дуга, μ = дуги, opozice $(\lambda, \mu)_P$ je ekvipolentní, neboť v = дуг, λ' = а, μ' = и; je-li λ = бумага, μ = быть, opozice $(\lambda, \mu)_P$ je rovněž ekvipolentní, neboť v = б, λ' = умага, μ' = ыть.

* V tomto oddílu někdy interpretujeme prvky řetězu jako písmena.

6. Relace mezi počátečními opozicemi

Dvě počáteční opozice $(\lambda_1, \mu_1)_P$ a $(\lambda_2, \mu_2)_P$ nazýváme homogenní, mají-li stejný počáteční základ; to znamená, že označíme-li v_1 počáteční základ opozice $(\lambda_1, \mu_1)_P$ a v_2 počáteční základ opozice $(\lambda_2, \mu_2)_P$, platí $v_1 = v_2$. Jestliže například λ_1 = дуг = $= \lambda_2$, μ_1 = дуга, μ_2 = дуги, pak v_1 = дуг $= v_2$; opozice $(\lambda_1, \mu_1)_P$ a $(\lambda_2, \mu_2)_P$ jsou tedy homogenní.

Je jasné, že relace homogennosti mezi počátečními opozicemi je ekvivalence. Rovněž je snadné dokázat, že jsou-li dány dvě homogenní opozice $(\lambda_1, \mu_1)_P$ a $(\lambda_2, \mu_2)_P$ a je-li $(\lambda_1, \mu_1)_P$ disjunktní, je i $(\lambda_2, \mu_2)_P$ disjunktní.

Neexistuje-li jiná počáteční opozice než $(\lambda, \mu)_P$, která by byla s touto opozicí homogenní, říkáme, že opozice $(\lambda, \mu)_P$ je singulární.

Dvě počáteční opozice $(\lambda_1, \mu_1)_P$ a $(\lambda_2, \mu_2)_P$ nazveme proporční, mají-li tytéž diferenční podřetězy, tj. jestliže $\lambda_1' = \lambda_2'$ a $\mu_1' = \mu_2'$, při čemž λ_1', μ_1' jsou diferenční podřetězy opozice $(\lambda_1, \mu_1)_P$ a λ_2', μ_2' jsou diferenční podřetězy opozice $(\lambda_2, \mu_2)_P$. Jestliže například λ_1 = дуг, λ_2 = луг, μ_1 = дуга, μ_2 = луга, platí $\lambda_1' = \lambda_2'$ = prázdný řetěz, $\mu_1' = \mu_2'$ = a; $(\lambda_1, \mu_1)_P$ je tedy proporční s $(\lambda_2, \mu_2)_P$.

Je jasné, že relace proporcionality mezi počátečními opozicemi je ekvivalence. Je také snadné dokázat, že jsou-li dány dvě proporční opozice $(\lambda_1, \mu_1)_P$ a $(\lambda_2, \mu_2)_P$ a je-li $(\lambda_1, \mu_1)_P$ nulová opozice, je i opozice $(\lambda_2, \mu_2)_P$ nulová; je-li opozice $(\lambda_1, \mu_1)_P$ privativní zleva, je i opozice $(\lambda_2, \mu_2)_P$ privativní zleva; je-li $(\lambda_1, \mu_1)_P$ privativní zprava, je i $(\lambda_2, \mu_2)_P$ privativní zprava; je-li $(\lambda_1, \mu_1)_P$ ekvipolentní nebo disjunktní, je i $(\lambda_2, \mu_2)_P$ ekvipolentní nebo disjunktní. Ale může nastat případ, že $(\lambda_1, \mu_1)_P$ je ekvipolentní, ale $(\lambda_2, \mu_2)_P$ ekvipolentní není nebo že $(\lambda_1, \mu_1)_P$ je disjunktní, ale $(\lambda_2, \mu_2)_P$ disjunktní není. Tato tvrzení můžeme dokázat podobným způsobem, jakým jsme dokázali příslušné teorémy v I. oddílu knihy.

7. Koncové opozice

Uvažujme dva řetězy λ a μ a nechť ω je největší koncový podřetěz, společný řetězům λ a μ. Vzhledem k ω nazveme opozici (λ, μ) koncovou a označíme ji $(\lambda, \mu)_k$. Jednoznačně určené řetězy λ'' a μ'' takové, že $\lambda = \lambda''\omega$ a $\mu = \mu''\omega$, jsou diferenční podřetězy opozice $(\lambda, \mu)_k$. Opozice $(\lambda, \mu)_k$ je nulová, jestliže $\lambda = \mu$, privativní zleva, jestliže $\lambda'' = 0$ a $\mu'' \neq 0$, privativní zprava, jestliže $\mu'' = 0$ a $\lambda'' \neq 0$, privativní, jestliže je privativní zleva nebo zprava, disjunktní, jestliže $\omega = 0$, ekvipolentní, jestliže není ani privativní, ani nulová, ani disjunktní. Příklady: Jestliže λ = от a μ = вот, je opozice $(\lambda, \mu)_k$ privativní zleva a opozice $(\mu, \lambda)_k$ privativní zprava. V obou případech totiž ω = от, λ'' = prázdný řetěz, μ'' = в. Jestliže λ = мужчины a μ = столы, je opozice $(\lambda, \mu)_k$ ekvipolentní, neboť ω = ы, tedy opozice $(\lambda, \mu)_k$ není disjunktní, a λ'' = мужчин, μ'' = стол, tedy opozice $(\lambda, \mu)_k$ není ani nulová, ani privativní.

8. Relace mezi koncovými opozicemi

Dvě koncové opozice $(\lambda_1, \mu_1)_k$ a $(\lambda_2, \mu_2)_k$ se nazývají homogenní, mají-li stejný koncový základ. Jestliže například λ_1 = но, $\mu_1 = \lambda_2$ = то, μ_2 = до, mají opozice $(\lambda_1, \mu_1)_k$ a $(\lambda_2, \mu_2)_k$ stejný koncový základ rovný nule.

Relace homogennosti mezi koncovými opozicemi je ekvivalence. Jsou-li dvě koncové opozice homogenní a je-li jedna z nich disjunktní, je i druhá disjunktní. Neexistuje-li žádná koncová opozice, která by byla homogenní s opozicí $(\lambda, \mu)_k$, říkáme, že opozice $(\lambda, \mu)_k$ je singulární.

Dvě koncové opozice nazveme proporční, mají-li tytéž diferenční podřetězy. Jestliže například λ_1 = но, λ_2 = на, μ_1 = до, μ_2 = да, jsou opozice $(\lambda_1, \mu_1)_k$ a $(\lambda_2, \mu_2)_k$ proporční, neboť $\lambda_1'' = \lambda_2''$ = н, $\mu_1'' = \mu_2''$ = д.

Relace proporcionality mezi koncovými opozicemi je ekvivalence. Lze dokázat, že tato relace si uchovává všechny vlastnosti, které má relace proporcionality mezi počátečními opozicemi (viz poslední část kapitoly 6).

9. Pravidelná morfologie

Uvažujme množinu E a tvořme řetězy, jejichž prvky patří do E. Buď $\mathscr{E}$ určitá množina řetězů tohoto typu. Prvky množiny $\mathscr{E}$ nazveme dovolenými slovy.

Uvažujme určitý rozklad Π množiny $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E} = \bigcup_j \mathscr{E}_j \quad (\mathscr{E}_p \cap \mathscr{E}_k = 0 \text{ pro } p \neq k)$$

a buď $\mathscr{F}$ určitá množina řetězů, jejichž prvky patří do $\mathscr{E}$. Trojici $\{\mathscr{E}, \Pi, \mathscr{F}\}$ nazveme jazykem; prvky množiny $\mathscr{F}$ nazveme dovolenými frázemi.

Prvek $\mathscr{E}_j$ rozkladu Π je pravidelný, má-li tuto vlastnost:

Jestliže $\lambda_1 \in \mathscr{E}_j$, $\lambda_2 \in \mathscr{E}_j$, $\mu_1 \in \mathscr{E}_j$ a $\mu_2 \in \mathscr{E}_j$, pak jsou opozice $(\lambda_1, \mu_1)_P$ a $(\lambda_2, \mu_2)_P$ homogenní.

Z této definice okamžitě vyplývá toto:

Jestliže $\mathscr{E}_j$ je pravidelná množina, existuje řetěz λ takový, že každý řetěz, který

je prvkem množiny $\mathscr{E}_j$, má tvar $\lambda\mu$, při čemž μ je v každém řetězu jiné; λ je počáteční základ společný všem počátečním opozicím mezi prvky množiny $\mathscr{E}_j$.

Jestliže například $\mathscr{E}_j$ je úhrn singulárových tvarů ruského substantiva завод, je $\mathscr{E}_j$ pravidelná množina. Vskutku platí $\mathscr{E}_j$ = {завод, завода, заводу, заводом, заводе} a je jasné, že kterákoli počáteční opozice mezi dvěma prvky této množiny má stejný základ завод. Tedy λ = завод.

10. Pravidelné množiny v angličtině

V angličtině tvoří flektivní tvary substantiva pravidelnou množinu, neboť substantivum má pouze dva flektivní tvary. Tak například množina {book, books} je pravidelná a λ = book[4]. Naproti tomu flektivní tvary adjektiva netvoří vždy pravidelnou množinu. Tak například množina {great, greater, greatest} není pravidelná, neboť opozice $(\text{great}, \text{greater})_p$ má základ great, zatímco opozice $(\text{greater}, \text{greatest})_p$ má základ greate; tyto opozice tedy nejsou homogenní.

11. Pravidelné množiny ve francouzštině

Ve francouzštině má substantivum dva flektivní tvary, jeden pro singulár a druhý pro plurál; flektivní tvary francouzského substantiva tvoří tedy vždy pravidelnou množinu. Francouzské adjektivum má obyčejně čtyři flektivní tvary; ty tedy tvoří pravidelnou množinu jen někdy. Tak například množina {grand, grands, grande, grandes} není pravidelná, neboť opozice $(\text{grand}, \text{grands})_p$ má základ grand, zatímco opozice $(\text{grande}, \text{grandes})_p$ má základ grande. Naproti tomu množina {douce, douces} je jasně pravidelná.

V jazycích se syntetickou flexí je slov, jejichž flektivní tvary tvoří pravidelné množiny, daleko méně než v jazycích s flexí analytickou.

Tak například v rumunštině, ruštině a latině, které jsou známy syntetickým rázem své flexe (jak nominální, tak verbální), je málo slov, jejichž flektivní tvary tvoří pravidelné množiny; naproti tomu francouzština, jejíž nominální flexe je velmi analytická, má mnoho substantiv a adjektiv tohoto typu.

Je-li v jazyce $\mathscr{L}$ každá množina $\mathscr{E}_j$ pravidelná, říkáme, že jazyk $\mathscr{L}$ má pravidelnou morfologii.

12. Paradigmatická morfologie

Nechť λ a μ jsou dvě dovolená slova s touto vlastností: neexistuje žádná dovolená fráze obsahující slovo λ taková, že by fráze získaná nahrazením slova λ

[4] Autor ovšem nebere v úvahu tzv. „saské genitivy" book's (v singuláru) a books' (v plurálu), které je možno chápat jako skupiny slov. — *Pozn. překladatele.*

slovem μ byla ještě dovolená. V tom případě říkáme, že λ a μ jsou v komplementární distribuci.

Uvažujme jazyk $\mathscr{L} = \{\mathscr{E}, \Pi, \mathscr{F}\}$, o němž předpokládáme, že má pravidelnou morfologii. Říkáme, že množina $\mathscr{E}_j$ z rozkladu Π je paradigmatem jazyka $\mathscr{L}$, jestliže dvě různá slova λ a μ, o nichž platí $\lambda \in \mathscr{E}_j$, $\mu \in \mathscr{E}_j$, jsou v komplementární distribuci. Je-li každá množina $\mathscr{E}_i$ paradigmatem jazyka $\mathscr{L}$, říkáme, že jazyk $\mathscr{L}$ má paradigmatickou morfologii. Každý jazyk, který má paradigmatickou morfologii, má tedy také pravidelnou morfologii; opak však neplatí.

Paradigmatická morfologie je ideální stav. Protože se anglická adjektiva nemění co do čísla, je morfologie anglických substantiv sice pravidelná, ale není paradigmatická. Morfologie francouzských substantiv se více blíží paradigmatické morfologii, ale úplně paradigmatická není ani ona.

13. Homologické třídy

Buď $\mathscr{L}$ jakýkoli jazyk. Říkáme, že dvě množiny $\mathscr{E}_m$ a $\mathscr{E}_n$, které jsou prvky rozkladu Π, jsou homologické, je-li možno mezi $\mathscr{E}_m$ a $\mathscr{E}_n$ stanovit vzájemně jednoznačnou korespondenci takovou, že jestliže platí $\lambda_m \in \mathscr{E}_m$, $\mu_m \in \mathscr{E}_m$, $\lambda_n \in \mathscr{E}_n$, $\mu_n \in \mathscr{E}_n$ a jestliže λ_n odpovídá λ_m a μ_n odpovídá μ_m, pak opozice $(\lambda_m, \mu_m)_p$ a $(\lambda_n, \mu_n)_p$ jsou proporční. Je jasné, že homologická relace je ekvivalence.

Takto získané ekvivalenční třídy jsou třídami homologickými. Zvláště v jazyce, který má paradigmatickou morfologii, jsou paradigmata rozdělena na homologické třídy.

Nechť $\mathscr{E}_m$ a $\mathscr{E}_n$ jsou dvě homologická paradigmata jazyka s paradigmatickou morfologií. Jestliže platí $\lambda \in \mathscr{E}_m$, $\mu \in \mathscr{E}_m$, $\lambda' \in \mathscr{E}_n$, $\mu' \in \mathscr{E}_n$ a jestliže λ' odpovídá λ a μ' odpovídá μ, jsou koncové opozice $(\lambda, \lambda')_k$ a $(\mu, \mu')_k$ proporční. Tato vlastnost je nutným důsledkem výše podaných definic.

14. Příklad na homologickou třídu v ruštině

Abychom uvedli příklad, předpokládejme, že $\mathscr{E}$ je slovník ruského jazyka a že pro každé $\lambda \in \mathscr{E}$ je množina $\mathscr{E}_j$ obsahující λ definována jako množina flektivních tvarů slova λ. Jestliže v tomto případě je $\mathscr{E}_m$ množina flektivních tvarů slova завод a $\mathscr{E}_n$ množina flektivních tvarů slova народ, je mezi $\mathscr{E}_m$ a $\mathscr{E}_n$ homologie. Skutečně $\mathscr{E}_m =$ = {завод, завода, заводу, заводом, заводе, заводы, заводов, заводам, заводами, заводах}, $\mathscr{E}_n$ = {народ, народа, народу, народом, народе, народы, народов, народам, народами, народах}.

Porovnáme-li mezi sebou prvky téže třídy z obou množin, vidíme, že je podmínce proporčnosti vyhověno. Například (народа, народу)$_p$ je proporční s (завода, заводу)$_p$, (народами, народах)$_p$ je proporční s (заводами, заводах)$_p$ atd.

15. Homologické třídy některých francouzských adjektiv

Z níže uvedené tabulky vyplývá, že nepovažujeme-li slova za řetězy hlásek, nýbrž za řetězy písmen, dělí se francouzská adjektiva nejméně na dvacet pět homologických tříd.

Nepřihlíželi jsme mimo jiné k adjektivům hébreu a fat, která nemají femininum.

Tab. 6

	Maximální diferenční podřetězy				Adjektiva patřící do příslušné třídy
	Maskulinum singuláru	Femininum singuláru	Maskulinum plurálu	Femininum plurálu	dvě adjektiva uvedená na jedné vodorovné řádce mají homologická paradigmata
1	prázdný řetěz	e	s	es	différent, bleu, méchant, petit, dévot
2	prázdný řetěz	le	s	les	différentiel, cruel, pareil, nul
3	l	le	ux	les	égal, normal, loyal, légal
4	au	lle	aux	lles	nouveau, beau, jumeau
5	f	ve	fs	ves	additif, craintif, neuf
6	x	se	x	ses	heureux, jaloux, glorieux
7	prázdný řetěz	p. ř.	s	s	analytique, sage, maigre, large
8	prázdný řetěz	e	prázdný ř.	es	divers, niais, ras, français
9	prázdný řetěz	te	s	tes	muet, sot, favori, coi
10	prázdný řetěz	ne	s	nes	moyen, bon, ancien
11	prázdný řetěz	se	prázdný ř.	ses	gras, épais
12	s	ce	s	ces	tiers
13	u	lle	us	lles	fou, mou
14	x	sse	x	sses	faux, roux
15	ux	ille	ux	illes	vieux
16	x	ce	x	ces	doux
17	c	que	cs	ques	public, turc, caduc, franc (franský)
18	prázdný řetěz	que	s	ques	grec
19	prázdný řetěz	he	s	hes	blanc, franc
20	is	îche	is	îches	frais
21	prázdný řetěz	ue	s	ues	long, oblong
22	r	se	rs	ses	voleur, trompeur
23	ur	resse	urs	resses	vengeur, chasseur
24	eur	rice	eurs	rices	conducteur
25	n	gne	n	gnes	bénin, malin[5]

[5] Pro úplnost by bylo třeba uvedených dvacet pět homologických tříd francouzských adjektiv rozmnožit o těchto jedenáct dalších:

Tab. 6a

	Maskulinum singuláru	Femininum singuláru	Maskulinum plurálu	Femininum plurálu	Adjektiva patřící do příslušné třídy
26	er	ère	ers	ères	entier, fier, amer
27	et	ète	ets	ètes	complet, inquiet
28	ef	ève	efs	èves	bref
29	ec	èche	ecs	èches	sec
30	ès	esse	ès	esses	exprès
31	l	lle	aux	lles	bel, nouvel
32	l	lle	us	lles	fol, mol
33	il	ille	ux	illes	vieil
34	prázdný řetěz	sse	s	sses	bêta, champi, traître
35	prázdný řetěz	ë	s	ës	aigu, contigu
36	prázdný řetěz	p. ř.	p. ř.	p. ř.	kaki

K tomu je třeba ještě poznamenat, že pět francouzských adjektiv, která mají v maskulinu singuláru po dvou tvarech (beau — bel, fou — fol, mou — molle, nouveau — nouvelle, vieux — vieille), jsou řazena každé do dvou různých homologických tříd, a že složená adjektiva, která se v jednotlivých tvarech mění v obou částech (např. sourd-muet, fem. sg. sourde-muette, mask. pl. sourds-muets, fem. pl. sourdes-muettes), je třeba chápat jako spojení dvou samostatných adjektiv. — *Pozn. překladatele.*

16. Maximální diferenční podřetězy

Abychom správně chápali uvedenou tabulku, musíme si ujasnit pojem „maximálních diferenčních podřetězů". Je-li dáno slovo λ, které je chápáno jako řetěz, jehož prvky jsou písmeny, interpretujeme jemu přiřazenou množinu $\mathscr{E}_j$ jako úhrn flektivních tvarů tohoto slova; tedy $\lambda \in \mathscr{E}_j$. Maximálním diferenčním podřetězem slova λ nazveme nejdelší koncový podřetěz tohoto slova, který je diferenčním podřetězem opozice $(\lambda, \mu)_P$ při $\mu \in \mathscr{E}_j$. Obecné schéma tohoto pojmu tedy vypadá takto: Buď jazyk $\{\mathscr{E}, \Pi, \mathscr{F}\}$ a buď $\mathscr{E}_j$ prvek rozkladu Π. Buď $\lambda \in \mathscr{E}_j$. Ke každé počáteční opozici $(\lambda, \mu)_P$ při $\mu \in \mathscr{E}_j$ existuje podřetěz λ' slova λ takový, že λ' je diferenční podřetěz opozice $(\lambda, \mu)_P$. Můžeme tedy říci, že jsme definovali funkci, která přiřazuje každému řetězu $\mu \in \mathscr{E}_j$ určitý koncový zcela určený podřetěz slova λ; je jím diferenční podřetěz λ' opozice $(\lambda, \mu)_P$. Označíme-li tuto funkci $\varphi_{\lambda,P}$, můžeme psát $\lambda' = \varphi_{\lambda,P}(\mu)$. Předpokládejme nyní, že λ je řetěz o konečné délce. V tom případě bude existovat řetěz $\mu_0 \in \mathscr{E}_j$, pro který funkce $\varphi_{\lambda,P}$ dosahuje největší hodnoty v tom smyslu, že délka řetězu $\varphi_{\lambda,P}(\mu_0)$ je pro jakékoli $\mu \in \mathscr{E}_j$ větší než délka řetězu $\varphi_{\lambda,P}(\mu)$ nebo že jsou délky obou řetězů stejné. Řetěz $\varphi_{\lambda,P}(\mu_0)$ nazveme maximálním diferenčním podřetězem slova λ vzhledem k počátečním opozicím nebo, je-li jasné, že jde o počáteční opozice, prostě maximálním diferenčním podřetězem slova λ.

Obdobně můžeme definovat maximální diferenční podřetěz slova λ vzhledem ke koncovým opozicím.

Mějme nyní $\lambda \in \mathscr{E}_j$; buď λ' maximální diferenční podřetěz slova λ vzhledem k počátečním opozicím a λ'' maximální diferenční podřetěz slova λ vzhledem ke koncovým opozicím. Existují dva jednoznačně určené podřetězy v' a v'' takové, že $\lambda = v'\lambda' = \lambda''v''$. Podřetěz v' nazveme minimálním počátečním základem řetězu λ a v'' minimálním koncovým základem řetězu λ.

Nyní vysvětlíme zavedené pojmy na příkladech vzatých z tabulky na str. 83. Buď např. λ = fou. Množina $\mathscr{E}_j$ při $\lambda \in \mathscr{E}_j$ = {fou, folle, fou, folles}. Řetěz fou se účastní čtyř počátečních opozic vzhledem k $\mathscr{E}_j$: $(\text{fou, fou})_p$, $(\text{fou, folle})_p$, $(\text{fou, fous})_p$, $(\text{fou, folles})_p$. Diferenční podřetězy slova fou jsou v těchto opozicích postupně tyto: prázdný řetěz, u, prázdný řetěz, u. Nejdelší z těchto řetězů je u, které je tedy maximálním diferenčním podřetězem slova fou. Z toho vyplývá, že minimální počáteční základ slova fou je fo. Uvažujme nyní koncové opozice slova fou vzhledem k $\mathscr{E}_j$: $(\text{fou, fou})_k$, $(\text{fou, folle})_k$, $(\text{fou, fous})_k$, $(\text{fou, folles})_k$. Diferenční podřetězy slova fou jsou v těchto opozicích postupně tyto: prázdný řetěz, fou, fou, fou. Nejdelší z nich je fou; fou je tedy maximální diferenční podřetěz slova fou vzhledem ke koncovým opozicím. Z toho vyplývá, že minimální koncový základ slova fou je prázdný řetěz.

17. Srovnání s klasifikací O. S. Kulaginové

Jak ukazuje výše uvedená tabulka, francouzská adjektiva se rozdělují nejméně do 25 homologických tříd. Z nich došla i O. S. Kulaginová k třídám 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 a 10 ([83], str. 193). Ale v této práci [83] je slovo égal řazeno do jiné třídy než slovo normal.

Homologii dvou slov téže třídy si můžeme snadno ověřit. Vezměme například slova muet a favori. Jestliže muet $\in \mathscr{E}_m$ a favori $\in \mathscr{E}_n$, pak $\mathscr{E}_m$ = {muet, muette, muets, muettes}, $\mathscr{E}_n$ = {favori, favorites, favoris, favorites}. Minimálním počátečním základem je v $\mathscr{E}_m$ muet, v $\mathscr{E}_n$ favori. Srovnáme slova získaná z minimálního základu připojením téhož řetězu. Dojdeme ke korespondencím muet — favori, muette — favorite, muets — favoris, muettes — favorites. Tím je každá počáteční opozice z množiny $\mathscr{E}_m$ proporční s příslušnou opozicí z množiny $\mathscr{E}_n$. Vyjdeme-li z diferenčních podřetězů jednotlivých opozic, dojdeme tedy k těmto zjištěním: opozice $(\text{muet, muet-te})_p$ je proporční s opozicí $(\text{favori, favori-te})_p$, $(\text{muet-s, muet-tes})_p$ je proporční s $(\text{favori-s, favori-tes})_p$ a tak dále. Množina $\mathscr{E}_m$ je tedy homologická s množinou $\mathscr{E}_n$.

18. Homologické třídy některých francouzských substantiv

Stanovit homologické třídy francouzských substantiv je daleko snazší. Je jich nejméně pět, jak vyplývá z této tabulky (viz [83], s. 190):

Tab. 7

Maximální diferenční podřetězy		Substantiva patřící do příslušné třídy
singulár	plurál	
prázdný řetěz	s	fonction, livre, cahier
prázdný řetěz	x	tableau, cadeau, bijou
il	ux	travail
l	ux	radical
prázdný řetěz	prázdný řetěz	cas[6]

K homologickým třídám francouzských sloves bychom mohli dojít podle návodu Kulaginové ve studii [83], str. 192.

Homologické třídy sloves v současné mluvené francouzštině lze stanovit na základě článku V. Hořejšího [73].

Homologické třídy rumunských slov je možno stanovit pro substantiva na základě prací [110] a [35], pro slovesa na základě práce [111].

Prací [111] a [110] již použila E. Domonkosová při vytvoření algoritmu pro strojový překlad z angličtiny do rumunštiny.

19. Morfémy a quasimorfémy

Nechť $\mathscr{L}$ je jazyk s paradigmatickou morfologií a nechť $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n$ jsou paradigmata tohoto jazyka. Řetěz λ nazveme morfémem jazyka $\mathscr{L}$ vzhledem k $\mathscr{E}_j$, je-li λ základem nebo diferenčním řetězem v počáteční opozici mezi dvěma prvky $\mathscr{E}_j$. Je-li λ základem, pak je základním morfémem vzhledem k $\mathscr{E}_j$; je-li diferenčním podřetězem, pak je diferenčním morfémem vzhledem k $\mathscr{E}_j$. Je tedy jasné, že pojem morfému se definuje vzhledem k určitému paradigmatu.

Na základě podaných definic lze odvodit toto:

1. V jazyce s paradigmatickou morfologií existuje vzhledem k určitému paradigmatu jediný základní morfém.

2. Jsou-li dvě paradigmata homologická, mají stejné diferenční podřetězy.

Pojem morfému jsme definovali pouze pro jazyky s paradigmatickou morfologií. Ale přirozené jazyky zpravidla nevyhovují této podmínce. Pro libovolný jazyk můžeme definovat pojem quasimorfému, který je ve zvláštních případech, kdy má jazyk paradigmatickou morfologii, totožný s pojmem morfému. Mějme jazyk $\mathscr{L} = \{\mathscr{E}, \Pi, \mathscr{F}\}$ a množinu $\mathscr{E}_j$, která je prvkem rozkladu Π. Každý řetěz, který je základem nebo diferenčním podřetězem počáteční opozice mezi prvky množiny $\mathscr{E}_j$, nazveme quasimorfémem vzhledem k $\mathscr{E}_j$. Budeme tedy rozeznávat základní quasimorfémy vzhledem k $\mathscr{E}_j$ a diferenční quasimorfémy vzhledem k $\mathscr{E}_j$. Uveďme příklad z ruštiny: Je-li $\mathscr{E}_j$ úhrn flektivních tvarů slova завод, pak paradigma $\mathscr{E}_j$ není pravidelné, neboť opozice (заводом, заводу)$_p$ není homogenní s opozicí (заводом, заводов)$_p$. Nelze tedy definovat morfémy vzhledem k $\mathscr{E}_j$. Můžeme však vzhledem k $\mathscr{E}_j$ definovat quasimorfémy. Existují základní quasimorfémy jako завод, завода, заводо, заводам a diferenční quasimorfémy jako a, у, ом, е, ам, ы, ах, ами, ми, и, в, х, м.

Pro úplnost by bylo třeba uvedených pět homologických tříd francouzských substantiv rozmnožit alespoň o další dvě:

Tab. 7a

Maximální diferenční podřetězy		Substantiva patřící do příslušné třídy
singulár	plurál	
il	ulx	ail
œil	yeux	œil

K tomu je třeba ještě poznamenat, že do tohoto výčtu nejsou pojata substantiva složená typu monsieur (pl. messieurs), coffre-fort (pl. coffres-forts), timbre-poste (pl. timbres-poste) ani substantiva cizího původu s cizím plurálem typu gentleman (pl. gentlemen) nebo lady (pl. ladies). — *Pozn. překladatele.*

20. Nerozložitelné quasimorfémy

Základní quasimorfém vzhledem k $\mathscr{E}_j$, který neobsahuje žádný jiný základní quasimorfém vzhledem k $\mathscr{E}_j$, se nazývá nerozložitelný základní quasimorfém nebo prostě nerozložitelný základ. V hořejším příkladě je slovo завод nerozložitelný základ.

Základní quasimorfém, který není nerozložitelný, nazveme rozložitelným základním quasimorfémem nebo prostě rozložitelným základem. V hořejším příkladě jsou quasimorfémy завода, заводов a заводом rozložitelné základy.

Diferenční quasimorfémy vzhledem k $\mathscr{E}_j$ je možno třídit na nerozložitelné diferenční quasimorfémy, které neobsahují jiné diferenční quasimorfémy vzhledem k $\mathscr{E}_j$, a na rozložitelné diferenční quasimorfémy. Mezi výše uvedenými diferenčními quasimorfémy jsou a, у, е, м, ы, х, и, в nerozložitelné, ом, ах a ами rozložitelné.

21. Vlastnosti homologických množin

Lze snadno ověřit tato tvrzení:

Jsou-li $\mathscr{E}_m$ a $\mathscr{E}_n$ dvě homologické množiny z rozkladu Π, pak

α) každý diferenční quasimorfém vzhledem k $\mathscr{E}_m$ je rovněž diferenčním quasimorfémem vzhledem k $\mathscr{E}_n$ a naopak;

β) nerozložitelný diferenční quasimorfém vzhledem k $\mathscr{E}_m$ je nerozložitelný také vzhledem k $\mathscr{E}_n$ a naopak;

γ) počet základních quasimorfémů vzhledem k $\mathscr{E}_m$ se rovná počtu základních quasimorfémů vzhledem k $\mathscr{E}_n$.

Nechť x a y jsou dva quasimorfémy vzhledem k určité množině $\mathscr{E}_j$ z rozkladu Π. Říkáme, že quasimorfémy x a y jsou slučitelné, existuje-li slovo z množiny $\mathscr{E}_j$, které obsahuje řetěz xy. V hořejším příkladu jsou quasimorfémy заводам a и slučitelné, завод a и neslučitelné.

Je jasné, že může nastat případ, že x a y jsou slučitelné, ale y a x jsou neslučitelné.

22. Relace dominace mezi quasimorfémy

Říkáme, že x dominuje vzhledem k $\mathscr{E}_j$ nad y zleva a píšeme $(\mathscr{E}_j)\ x \rightarrow y$, je-li x s y vzhledem k $\mathscr{E}_j$ slučitelné a jestliže nahrazením podřetězu xy výrazem x v jakémkoli slově z $\mathscr{E}_j$, které obsahuje podřetěz xy, obdržíme slovo, které patří rovněž do $\mathscr{E}_j$.

Říkáme, že x dominuje vzhledem k $\mathscr{E}_j$ nad y zprava a píšeme $x \rightarrow y(\mathscr{E}_j)$, je-li y s x vzhledem k $\mathscr{E}_j$ slučitelné a jestliže nahrazením podřetězu yx výrazem x v jakémkoli slově z $\mathscr{E}_j$, které obsahuje podřetěz yx, obdržíme slovo, které patří rovněž do $\mathscr{E}_j$.

Abychom uvedli příklad, považujme za $\mathscr{E}_j$ úhrn flektivních tvarů slova завод. Pak $(\mathscr{E}_j)$ завод → у, $(\mathscr{E}_j)$ завод → е, $(\mathscr{E})_j$ завод → ы, $(\mathscr{E}_j)$ завод → ов, $(\mathscr{E})_j$ ам → и, $(\mathscr{E}_j)$ а → х, $(\mathscr{E})_j$ завода → ми atd.

Je jasné, že dvě homologické množiny $\mathscr{E}_m$ a $\mathscr{E}_n$ jsou isomorfní vzhledem k relaci dominace zleva. To znamená, že mezi množinou quasimorfémů vzhledem k $\mathscr{E}_m$ a množinou quasimorfémů vzhledem k $\mathscr{E}_n$ je možno zjistit vzájemně jednoznačnou korespondenci, která zachovává relaci dominace zleva. Je-li například $\mathscr{E}_m$ úhrn flektivních tvarů slova завод a $\mathscr{E}_n$ úhrn flektivních tvarů slova народ, pak, jak víme, jsou množiny $\mathscr{E}_m$ a $\mathscr{E}_n$ homologické a jsou isomorfní vzhledem k relaci dominace zleva: tvar завод odpovídá tvaru народ, tvar заводами odpovídá tvaru народами, platí $(\mathscr{E})_m$ завод → ами, $(\mathscr{E})_n$ народ → ами atd.

23. Quasiparadigmatická morfologie

Buď $\mathscr{L} = \{\mathscr{E}, \Pi, \mathscr{F}\}$ libovolný jazyk. Mějme $\lambda \in \mathscr{E}$, $\mu \in \mathscr{E}$. Říkáme, že λ a μ jsou v kontrastní distribuci, existuje-li taková fráze jazyka $\mathscr{F}$ obsahující slovo λ, že nahrazením slova λ slovem μ dojdeme k frázi, která již nepatří do $\mathscr{F}$, a existuje-li taková fráze jazyka $\mathscr{F}$ obsahující slovo μ, že nahrazením slova μ slovem λ dojdeme k frázi, která již nepatří do $\mathscr{F}$.

Říkáme, že jazyk $\mathscr{L}$ má quasiparadigmatickou morfologii, jestliže pro libovolnou množinu $\mathscr{E}_m$ z rozkladu Π a pro $\lambda \in \mathscr{E}_m$, $\mu \in \mathscr{E}_m$ jsou λ a μ v kontrastní distribuci.

24. Metoda čtverce

Základní dosud nevyřešený problém morfematického rozboru je sám problém definice morfému a s ním přímo spojený problém segmentace textu, jeho rozklad na morfematické prvky. Je možno rozlišovat dva typy kritérií, která byla dosud pro řešení těchto problémů navrhována: a) morfologická kritéria, u nichž převládají paradigmatické zřetele a která implicite nebo explicite jako daná předpokládají slova a u každého slova jeho flektivní tvary; b) kritéria, u nichž převládají syntagmatické zřetele a která vycházejí především z rozboru promluvového řetězu a ze vztahů mezi jeho částmi a nepředpokládají znalost slov ani flektivních tvarů, ale pouze možnost rozlišovat v uvažovaném jazyce přípustné a nepřípustné řetězy.

Ze segmentačních kritérií prvního typu je třeba uvést především kritérium Greenbergovo, tzv. „metodu čtverce“ [46]. Provedeme rozbor některých aspektů tohoto kritéria ve světle pojmů, které jsme zavedli v tomto oddílu.

Především je třeba poznamenat, že J. Greenberg výslovně pracuje při každém morfematickém rozboru se slovy. Podle něho je každý předěl mezi dvěma slovy nutně také místem segmentace mluveného řetězu.

Pro Greenbergovo kritérium je charakteristické, že své úvahy zakládá na určitém počtu přirozených jazyků. Jedině tak je možno podle autora dojít k formální metodě segmentace. Zavádí především pojem čtverce a definuje ho jako množinu čtyř slovních tvarů majících tuto strukturu: AC, BC, AD, BD. Například anglické tvary eating, walking, eats, walks definují čtverec, neboť A = eat, B = walk, C = ing, D = s. Připouští také možnost, že by jedna ze složek A, B, C, D byla prázdná; k tomu dochází v případě anglických tvarů king, kingdom, duke, dukedom, kdy vzniká čtverec, jehož složka C je prázdná.

Z uvedených příkladů jasně vyplývá, že čtyři složky čtverce vedou k segmentaci čtyř tvarů, které tento čtverec tvoří. Je možno uvést další příklady z nejrůznějších jazyků. Například rumunské tvary casă, rată, casei, ratei[7] definují čtverec, v němž A = = cas, B = rat, C = ă, D = ei. Také zde můžeme konstatovat, že složky A, B, C, D vedou k segmentaci tvarů tvořících uvažovaný čtverec.

Ale jsou také čtverce jako tento (vzatý z mluvené podoby angličtiny): hammer, ham, badger, badge; i když je tento čtverec formálně správný, je nepřijatelný proto, že významový rozdíl mezi hammer a ham není stejný jako mezi badger a badge. V tomto případě složky čtverce nevedou k intuitivně přijatelné segmentaci uvažovaných tvarů.

Jak je možno formalizovat kritérium shody mezi významovým rozdílem tvarů AC, BC na jedné straně a tvarů AD, BD na straně druhé? J. Greenberg navrhuje toto řešení: Existuje-li jiný jazyk, v němž čtyři tvary odpovídající tvarům AC, BC, AD a BD tvoří rovněž čtverec, je významový rozdíl mezi AC a BC stejný jako mezi AD a BD.

7 Tvary casă, rată jsou nedeterminované nominativy a akuzativy singuláru, tvary casei, ratei determinované genitivy a dativy singuláru týchž substantiv. — *Pozn. překladatele.*

Například pro posouzení anglického čtverce eating, walking, eats, walks je takovým jiným jazykem italština. Příslušné italské tvary jsou mangiando, passeggiando, mangia, passeggia; tyto tvary definují rovněž čtverec. Tak tomu však není u tvarů hammer, badger, ham, badge; neexistuje pravděpodobně jiný jazyk, v němž by příslušné tvary tvořily rovněž čtverec.

25. Homologické čtverce

Takové kritérium nepřipadá nijak zvláštní, uvážíme-li, že v poslední době se sémantické otázky dosti běžně formalizují přihlížením k několika jazykům. Je třeba poznamenat, že od této praxe je možno upustit, předpokládáme-li jako daný rozklad Π, tj. předpokládáme-li, že u každého slova známe jeho flektivní tvary. V tom případě stačí se spokojit s požadavkem, aby AC a AD (resp. BC a BD) byly flektivní tvary téhož slova a aby BC bylo v jedné homologické třídě s AC a BD v jedné homologické třídě s AD. Například je možno konstatovat, že ve čtverci eating, walking, eats, walks tvary eating a eats patří k jednomu prvku rozkladu Π a tvary walking a walks patří rovněž k jednomu prvku rozkladu Π; walking patří do jedné homologické třídy s eating, walks patří do jedné homologické třídy s eats. Uvažovaný čtverec je tedy připustný. Naproti tomu čtverec hammer, badger, ham, badge připustný není, neboť hammer není flektivní tvar slova ham a badger není flektivní tvar slova badge.

Toto kritérium, které vychází z flektivních tvarů a z homologických tříd, klade jedinou postačující, ale ne nutnou podmínku pro existenci segmentačního předělu. Mimoto je příliš restriktivní. Ale má výhodu, že je formální a vylučuje jakoukoli dvojznačnost. Uvažujeme-li například čtverec walking, talking, walks, talks, pak $A =$ $=$ walk, $B =$ talk, $C =$ ing, $D =$ s, ale je možno také psát $A =$ w, $B =$ t, $C =$ alking, $D =$ alks. Tuto dvojznačnost je možno odstranit stanovením podmínky, že C a D musí být diferenční quasimorfémy vzhledem k úhrnu flektivních tvarů slova AC a také vzhledem k úhrnu flektivních tvarů slova BC. Je možno konstatovat, že $C =$ ing, a $D =$ s této podmínce vyhovují, ne však $C =$ alking a $D =$ alks. Přípustný je tedy pouze první čtverec.

Tím nabývají zvláštního významu čtverce AC, BC, AD, BD mající tyto vlastnosti: AD (resp. BD) je flektivní tvar slova AC (resp. BC); BC (resp. BD) patří do jedné homologické třídy s AC (resp. AD); C a D jsou diferenční quasimorfémy vzhledem k úhrnu flektivních tvarů slova AC a také vzhledem k úhrnu flektivních tvarů slova BC. Tyto čtverce nazveme homologické.

26. Morfonologické alternace. Několik návodů k řešení

J. Greenberg [46] připojuje dodatkem několik kritérií pro segmentaci tvarů, které nejsou členy žádného čtverce. Můžeme se pokusit o konfrontaci těchto kritérií s výše zavedenými modifikacemi. Spokojíme se poznámkou, že se zde nabízí mož-

nost řešit některé složitější problémy, které jsme naznačili v úvodu tohoto oddílu. Uvažujme například jev morfonologické alternace. Tvary man a men nelze zařadit do žádného čtverce. Proč říkáme, že dvojice man, men definuje morfonologickou alternaci? J. Greenberg klade jako podmínku existenci dvou jiných tvarů – například boy a boys – takových, že jsou splněny tyto čtyři podmínky: 1. významový rozdíl mezi tvary man a men je stejný jako mezi tvary boy a boys; 2. tvary boy a boys mohou být zaraženy do jednoho čtverce; 3. existuje kontext, který připouští tvary man a boy, ale ne tvary men a boys; 4. existuje kontext, který připouštějí tvary men a boys, ale ne tvary man a boy.

Je zřejmé, že tento příklad splňuje všechny podmínky. Skutečně existuje čtverec boy, lad, boys, lads; kontext (this, is good) připouštějí tvary boy a lad, ale ne tvary boys a lads; kontext (these, are good) připouštějí tvary boys a lads, ale ne tvary boy a lad.

Zatímco podmínky 2, 3 a 4 jsou dosti formální, aby mohly být vzaty v úvahu, nelze říci totéž o podmínce 1. Tu bychom mohli nahradit podmínkou existence jazyka, v němž tvary odpovídající formám man, boy, men a boys tvoří čtverec. Abychom se nemuseli uchylovat k jinému jazyku, mohli bychom se pokusit nahradit podmínky 1 a 2 podmínkou, aby tvary boy a boys mohly být zařazeny do jednoho homologického čtverce. To právě platí v uvedeném případě, neboť čtverec boy, lad, boys, lads je homologický. V rumunštině tvoří podobný případ alternace masă – mese. Také zde můžeme najít dvě formy – například casă a case – které vyhovují uvedeným podmínkám typu 1, 2, 3, 4 (tvar masă odpovídá tvaru man, tvar mese tvaru men, tvar casă tvaru boy, tvar case tvaru boys, tvar plasă tvaru lad, tvar plase tvaru lads).[8]

Složitější jevy morfonologické alternace se vyskytují v jazycích s bohatší flexí, než je angličtina, například v rumunštině. V nich existují alternace závislé na určitých koncovkách. Popis takových jevů v rumunštině a segmentace příslušných forem pomocí distribučních kritérií byly podány ve studii [37].

27. Metoda následníka

Nyní seznámíme čtenáře s čistě syntagmatickým přístupem Z. S. Harrise [57] k segmentaci mluveného řetězu. Problém, kterým se Harris zabývá, by mohl být formulován takto: Víme o každé posloupnosti fonémů, zdali je (v uvažovaném jazyce) správná nebo ne, a máme rozložit každou správnou posloupnost na minimální (nerozložitelné) významové segmenty. Aby mohl tento problém rozřešit, bere Z. S. Harris v úvahu pro každý počáteční segment uvažované posloupnosti počet různých fonémů, které se mohou vyskytnout po tomto segmentu. Princip jeho metody spočívá v tom, že vybírá z míst, kde tento počet dosahuje lokálního maxima, místa, kde je morfematický předěl. Tuto metodu jasněji ozřejmí příklad vzatý přímo z Harrise.

[8] Tvary mese, case, plase jsou plurály substantiv masă, casă, plasă. – *Pozn. překladatele.*

Uvažujme anglickou posloupnost He's clever [hijzklevər]. Ve správné posloupnosti začínající fonémem h může následovat na druhém místě jeden z těchto 9 fonémů: w, j, i, e, æ, a, ə, o, u. Ve správné posloupnosti začínající skupinou hi může následovat na třetím místě jeden z těchto 14 fonémů: p, t, k, d, g, δ, s, č, z, l, m, n, h, j. Ve správné posloupnosti začínající skupinou hij je možná na čtvrtém místě volba mezi 29 fonémy (p, d atd.). Ve správné posloupnosti začínající skupinou hijz je možná na pátém místě volba rovněž mezi 29 fonémy. Ve správné posloupnosti začínající skupinou hijzk volíme na šestém místě mezi 11 možnými fonémy. Pokračujeme-li tímto způsobem dále, dojdeme ještě k číslům 7, 8, 1 a 1. Obdržíme tedy číselnou posloupnost 9, 14, 29, 29, 11, 7, 8, 1, 1. Uvážíme-li, že číslo 7 není lokální maximum a že rozdíl mezi 7 a 8 je příliš malý, než abychom mohli číslo 8 za toto lokální maximum považovat, najdeme místa morfematického předělu pouze po třetím a čtvrtém členu; posloupnost hijzklevər se tedy skládá ze tří morfematických segmentů: hij – z – klevər.

Pokusme se nyní o formálnější vyjádření výše uvedeného kritéria segmentace.

Buď A množina fonémů určitého jazyka (foném zde chápeme v pojetí Harrisově a Hockettově, které jsme vyložili v II. oddílu této knihy). Buď $\mathscr{F}$ množina řetězů (nad A), které jsou přípustné (vyznačené) v uvažovaném jazyce. Buď $f \in \mathscr{F}$, $f = a_1a_2 \dots a_n$. Označme f_i řetěz $a_1a_2 \dots a_i$ $(1 \leqq i < n)$ a m_i počet prvků $a \in A$ takových, že existuje posloupnost $g = b_1b_2 \dots b_p$, $p \geqq i + 1$, $g \in \mathscr{F}$, kde $b_j = a_j$ pro $1 \leqq j \leqq i$ a $b_{i+1} = a$. Uvažujme posloupnost $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_{n-1}$. Výraz m_j nazveme lokálním maximem posloupnosti, jestliže $m_{j-1} \leqq m_j \geqq m_{j+1}$. Harrisův pokus spočívá v hledání míst morfematického předělu mezi výrazy s lokálními maximy; je-li tedy m_j lokální maximum, je mezi a_j a a_{j+1} jedno možné místo morfematického předělu v rámci posloupnosti f.

28. Kritérium obrácené posloupnosti

Úvahy, které jsme uvedli výše, tvoří pouze první aproximaci operace segmentace. Harrisův model počítá s několika dalšími etapami. Jsou totiž případy, že místo, které je intuitivně nebo z morfologických (paradigmatických) důvodů místem morfematického předělu, není přesto v rámci posloupnosti $\{m_i\}_{1 \leqq i \leqq n-1}$ výrazem s lokálním maximem. Provedeme rozbor několika případů tohoto druhu.

Uvažujme podle studie [57] anglickou posloupnost It disturbs me [itdistərbzmij]. Víme, že z morfologických důvodů je místo morfematického předělu mezi b a z; prvek m_9 posloupnosti $\{m_i\}_{1 \leqq i \leqq 12}$ však není výrazem s lokálním maximem $(m_9 = 3)$. Tak malé množství informace na přechodu mezi b a z je dáno snadno předvídatelnou přítomností fonému z; přítomnost segmentu it na počátku posloupnosti totiž vyžaduje, aby po b následovalo d nebo iŋ nebo z. Z této velmi restriktivní závislosti vyplývá tak malá hodnota prvku m_9. Správnost této motivace je možno si ověřit také na jiném příkladě; v anglické posloupnosti They disturb me [dejdistərbmij], kde již neexistuje restriktivní závislost zmíněného typu, platí $m_{10} = 29$, což potvrzuje

existenci místa morfematického předělu mezi b a m. Přechod od b k dalšímu morfému zde obsahuje mnohem větší množství informace než v předcházející posloupnosti. Harris se chce vyhnout této „nešťastné náhodě", dané závislostí zleva doprava, a aplikuje výše uvedené kritérium v obráceném pořádku. Tak docházíme k následující formalizaci:

Ponechme veličinám A, $\mathscr{F}$ a f uvedené významy a označme φ_i řetěz $a_ia_{i+1} \dots a_n$ $(1 < i \leqq n)$. Buď P_{m-i+1} počet prvků $b \in A$ takových, že existuje posloupnost $h = c_1c_2 \dots c_r$, $r \geqq n - i + 2$, $h \in \mathscr{F}$, kde $c_j = a_j$ pro $i \leqq j \leqq n$ a $c_{i-1} = b$. Uvažujme posloupnost $P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_{n-1}$. Výraz P_j bude lokálním maximem posloupnosti, jestliže $P_{j-1} \leqq P_j \geqq P_{j+1}$.

Dohodněme se, že budeme nazývat posloupnost $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_{n-1}$ přímou posloupností přiřazenou řetězu f, posloupnost $P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_{n-1}$ obrácenou posloupností přiřazenou řetězu f. Je pochopitelné, že při obrácené posloupnosti může docházet k „nešťastným náhodám" způsobeným závislostmi zprava doleva, stejně jako při přímé posloupnosti může docházet k „nešťastným náhodám" způsobeným závislostmi zleva doprava. Aby byly tyto „nešťastné náhody" vyloučeny, hledají se místa morfematického předělu mezi výrazy s lokálním maximem nejen v přímé posloupnosti, ale také v obrácené. Jinými slovy, abychom mohli mezi a_i a a_{i+1} klást místo morfematického předělu, stačí, aby byla splněna alespoň jedna z těchto dvou podmínek: 1. m_i je lokální maximum přímé posloupnosti; 2. P_{n-i} je lokální maximum obrácené posloupnosti.

Aplikujeme-li tuto metodu na posloupnost It disturbs me [itdistərbzmij], obdržíme hodnoty $m_9 = 3$ a $P_{13-9} = P_4 = 18$; m_9 sice není lokální maximum přímé posloupnosti, ale P_4 je lokální maximum obrácené posloupnosti; můžeme tedy mezi b a z klást místo morfematického předělu, což ostatně je v souhlase s intuitivním chápáním morfologické stavby.

Toto zdokonalení má význam nejen pro otázku morfematické segmentace, ale i pro otázku zjišťování závislosti mezi morfémy. Kdykoli je totiž splněna podmínka 1 a není splněna podmínka 2, je velmi pravděpodobné, že objevíme závislost zleva doprava; kdykoli platí podmínka 2 a neplatí podmínka 1, je velmi pravděpodobné, že jde o závislost zprava doleva.

Okolnost, že může platit podmínka 1 a nemusí platit podmínka 2 – nebo že naopak může platit podmínka 2 a nemusí platit podmínka 1 – lze někdy vysvětlit také jinak. Uvažujme například tuto posloupnost (viz [57]): Let me qualify this [letmijkwalifajđis]. Intuitivně klademe místo morfematického předělu mezi l a i, ale m_{10} (= 1) není lokální maximum přímé posloupnosti. Je to způsobeno velmi nízkou distribucí segmentu letmijkwal (v tom smyslu, že se spojuje doprava s velmi malým počtem morfémů), zatímco následující morfém připouští velmi vysoký počet kontextů. To znamená, že velká rozmanitost, pokud jde o místo morfematického předělu, se zde nezračí ve velkém počtu fonémů, které mohou následovat po l, ale ve velké pravděpodobnosti jejich výskytu a také výskytu morfémů, které za nimi začínají: po l totiž může následovat jediný foném, a to foném i. Uvažujeme-li obrácenou posloupnost, máme naopak $P_{17-10} = P_7 = 13$; P_7 je místní maximum obrácené posloupnosti a tím je dána možnost morfematického předělu mezi l a i.

Z tohoto posledního příkladu lépe vysvítá informační povaha Harrisova kritéria. Pracujeme-li stále s entropií nulového řádu, tj. měříme-li stále indeterminaci počtem fonémů, které se mohou vyskytovat v určité pozici, aniž přihlížíme také k pravděpodobnosti těchto fonémů v příslušném postavení, dojdeme k neuspokojivým výsledkům, kdykoli mezi těmito pravděpodobnostmi jsou značné rozdíly. Ale uvažování obrácené posloupnosti může naopak přinést podněty k zlepšení pokusů s předpovídáním využití entropie.

29. Další zlepšení: vkládání

Uvažování přímé i obrácené posloupnosti umožňuje neutralizaci účinku jednosměrných závislostí (doleva nebo doprava). Ale jsou také obousměrné závislosti, kde oba výrazy na sebe vzájemně působí. Tyto závislosti mohou vést k nepravidelnostem, jejichž účinek nemůže být neutralizován ani přímou, ani obrácenou posloupností. Harris navrhuje pro tyto případy další zlepšení své metody: vkládání. Vezměme například anglickou posloupnost This is new [đisiznjuw] [57]. Hledejme nejprve (ať správné či nesprávné) posloupnosti, které je možno vložit mezi první dva fonémy đ a i a které mají tu vlastnost, že celá takto získaná posloupnost je správná. Můžeme například vložit posloupnost əčæl, která vede k správné posloupnosti đəčælisiznjuw (The chalice is new); můžeme také vložit æth, které vede k správné posloupnosti That hiss is new, atd. Zkoumejme nyní, kolik různých fonémů se může vyskytovat na začátku nebo na konci posloupnosti „vložitelné“ mezi đ a i a pak mezi i a s. (Příkladem posloupnosti „vložitelné“ mezi i a s je jzmarkssowdætdəbok, která vede k správné posloupnosti These marks show that the box is new.) Tak pokračujeme pro všechny další pozice posloupnosti đisiznjuw. Místa morfematického předělu budou mezi pozicemi, kde počet různých fonémů, které se mohou vyskytovat na počátku nebo na konci posloupnosti „vložitelné“ na příslušném místě, dosahuje lokálního maxima.

Pokusme se nyní o formálnější vyjádření tohoto postupu. Buď $f = a_1 a_2 \dots a_i \dots \dots a_n$ vyznačená posloupnost ($a_i \in A$, kde A je množina fonémů). Označme g_i posloupnost $a_1 a_2 \dots a_i$ a h_i posloupnost $a_{i+1} a_{i+2} \dots a_n$ ($1 \leqq i \leqq n - 1$). Nechť je r_i = počet fonémů α takových, že existuje posloupnost φ začínající fonémem α a připuštěná kontextem $(g_i h_i)$, s_i = počet fonémů β takových, že existuje posloupnost ψ, jejímž konečným fonémem je β a která je připuštěna kontextem (g_i, h_i), $t_i = r_i + s_i$. (Posloupnosti φ a ψ jsou dílčí posloupnosti nebo fráze ve smyslu 40. kapitoly I. oddílu.) Číslo t_i je míra extrémní rozmanitosti vkládání možných v kontextu (g_i, h_i). Je tedy přirozené, že budeme t_i nazývat extrémní variací kontextu (g_i, h_i). Budeme-li nyní uvažovat posloupnost $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_{n-1}$, určíme její lokální maxima, to jest výrazy t_i takové, že $t_{i-1} \leqq t_i \geqq t_{i+1}$. Jakmile bude t_i lokální maximum, pokusíme se položit místo morfematického předělu v řetězu f mezi a_i

a a_{i+1}. Jinými slovy místa morfematického předělu v řetězu f hledáme mezi kontexty (g_i, h_i), jejichž extrémní hodnota t_i vykazuje lokální maximum. Právě touto metodou lze najít ve výše uvedeném příkladu místo morfematického předělu mezi s a i (v tomto případě g_3 = đis, h_3 = iznjuw).

30. Následníci následníků

Další zlepšení uvedeného modelu se týká nejen vlivu n prvních fonémů na indeterminaci fonému v postavení $n + 1$, ale také – pro každý možný foném v postavení $n + 1$ – fonémů možných v postavení $n + 2$ [57]. Uvažujeme-li například anglickou posloupnost It disturbed me [itdistərbdmij], dojdeme k 16 fonémům, které jsou možné po počátečním i. Šest z těchto 16 fonémů má 29 následníků (it, if, itch, is, ill, in; po každém z těchto šesti fonémů může být morfematický předěl); jediný foném má 18 následníků (j: eat, eager, easy, each, either atd.), jediný foném má 10 následníků (m: imp, imbibe, immune, immediate atd.) a u 8 fonémů je počet následníků nižší než 5 (ŋ: ink, English; d: idiot atd.). Dále zkoumáme, zdali mezi takto získanými čísly je určitá pravidelnost. Pro angličtinu můžeme například empiricky zjistit, že je-li foném v postavení $n + 1$ jednoznačně určen, zatímco v postavení $n + 2$ je možných zhruba 10 fonémů, je dosti pravděpodobné, že mezi pozicemi n a $n + 1$ je morfematický předěl. Ale má-li foném v postavení $n + 1$ pouze jednoho nebo dva následníky, je dosti pravděpodobné, že mezi postaveními n a $n + 1$ není morfematický předěl.

Tyto typy pravidelnosti mají ještě více než kritéria uvažovaná v předchozích kapitolách výlučně statistický charakter a jejich formalizace přesahuje rámec této knihy.

31. Jiná hlediska a jiné problémy morfematického rozboru. Analogie a neshody

Obyčejně se rozlišují tři základní problémy morfematického rozboru: a) rozklad posloupnosti na minimální významové segmenty (tyto segmenty odpovídají Harrisovým „morpheme alternants“ [53], Hockettovým a Greenbergovým „morphs“ [66], [46] a přibližně Hjelmslevovým „formants“ [63]); b) zavedení určité binární relace R mezi minimálními významovými segmenty (relace R je reflexívní a symetrická, ale není tranzitivní; vede k pojmu „morfém“, definovanému jako množina všech morfémových variant („morpheme alternants“) nebo morfů („morphs“), které jsou v relaci R s určitým morfem [53], [66]; c) kontextový popis morfémů a jejich funkcí [55]. Dosud jsme se zabývali hlavně prvním problémem. Některými aspekty problému druhého a třetího se budeme zabývat ve IV. oddílu.

Výše jsme uvažovali pouze ta hlediska, podle nichž morfém náleží do výrazového plánu. Je třeba poznamenat, že existuje ještě jiné hledisko, podle něhož je morfém prvkem plánu obsahového, při čemž vnější obal („formant") tohoto prvku náleží do plánu výrazového. Toto hledisko bylo rozvinuto v glosematice ([63], [64], [65]) a převzal je K. Togeby [145] a v poněkud odlišné formě S. K. Šaumjan [142]. Výklad tohoto hlediska přesahuje rámec této knihy.

Existuje určitá korespondence mezi základními morfémy a základními quasimorfémy studovanými v kapitolách 20 a 21 na jedné straně a Vendryesovými „sémantémy" [154] a Hjelmslevovými „plerémy" [63] na straně druhé. Dále existuje určitá korespondence mezi diferenčními morfémy a diferenčními quasimorfémy studovanými v kapitolách 19 a 20 na jedné straně a mezi Vendryesovými morfémy [154] na straně druhé. U Vendryese stejně jako u G. Gougenheima je protiklad sémantém – morfém v podstatě protiklad lexikální – gramatický; podobného druhu je Hjelmslevův protiklad plerém – morfém [63]. Naproti tomu deskriptivistické teorie morfému nikdy nepřihlížejí k tomuto rozdílu; je možno dokonce říci, že u deskriptivistů je morfematický rozbor prostředkem, jak se vyhnout diskusi rozlišování gramatické – negramatické.

Pojmy morfém a quasimorfém, které jsme zavedli a studovali v kapitolách 19, 20 a 21, mají počátek u Baudouina de Courtenay [8] a odpovídají v určitých aspektech Hockettovým a Greenbergovým morfům [66], [46] a Harrisovým morfémovým variantám [53]. K definicím, které jsme podali v kapitolách 19, 20 a 21, nás z velké části vedl kritický rozbor různých metod a snaha explicitně vyjádřit, co se obyčejně nechává nevyjádřené. Byla by zajímavá podrobná konfrontace s pojmy a metodami vyloženými v pracích [2], [17], [18], [41], [43], [56], [67], [84], [109], [113]. V pracích [12] a [36] najde čtenář syntetizující výklady a velmi užitečná zpřesnění.

Bylo by zajímavé diskutovat o neshodách mezi výše navrženými modely paradigmatu a quasiparadigmatu na jedné straně a mezi paradigmaty přirozených jazyků na straně druhé. Výše zkonstruovaný model nebere v úvahu otázku alternací s morfologickou platností (man – men v angličtině, masă – mese v rumunštině atd.), která značně komplikuje segmentaci mluveného řetězu (viz [54] a [59]). Nechali jsme stranou lexikální derivaci (např. tvoření deminutiv). Mimo předmět našich úvah také zůstalo základní rozlišování mezi dvěma velkými třídami morfémů, totiž mezi morfémy segmentálními – morfémy v pravém slova smyslu – a suprasegmentálními (týkajícími se přízvuku, intonace atd.)

Homologické třídy, které jsme studovali v kapitolách 13–15, jsou velmi užitečným nástrojem v aplikované a strukturální lingvistice (viz např. práce [35], [109], [110] a [111], kde je jich užíváno s větší či menší explicitností).

32. Izomorfismus mezi pojmem paradigmatu a pojmem abstraktní hlásky

Mezi pojmem paradigmatu ve smyslu kapitoly 12 a pojmem abtraktní hlásky ve smyslu kapitoly 8 II. oddílu je určitý izomorfismus. Označíme-li totiž E množinu

hlásek a φ absolutní ekvivalenci definovanou v E (viz kapitolu 7 II. oddílu), tvoří abstraktní hláska ϱ-ekvivalenční třídu.

Dohodněme se, že budeme považovat za nerozlišitelné dvě absolutně ekvivalentní hlásky, které se od sebe neliší co do pozice. V tom případě jsou dvě různé hlásky ϱ-ekvivalentní právě tehdy, když se od sebe liší jedině pozicí.

Jsou-li dány čtyři ϱ-ekvivalentní hlásky s_1, s_2, s_3 a s_4, jsou opozice (s_1, s_2) a (s_3, s_4) homogenní (tj. mají stejný základ). Společný základ je totiž dán množinou hodnot, které definují abstraktní hlásku, tj. množinou hodnot společných ϱ-ekvivalentním hláskám; je to právě množina ϱ-ekvivalentních hlásek (získaná odhlédnutím od pozice, v níž se tyto hlásky vyskytují). Můžeme tedy říci, že abstraktní hláska je pravidelná množina ve smyslu, který jsme dali tomuto termínu v 9. kapitole. Ale z toho, že dvě různé hlásky, které jsou ϱ-ekvivalentní, jsou právě proto neslučitelné v téže pozici, lze vyvodit, že dvě ϱ-ekvivalentní hlásky jsou v komplementární distribuci. Tedy abstraktní hláska a paradigma připouštějí tentýž logický model.

Morfologická homonymie a gramatické kategorie

1. Morfologická homonymie, zdroj nejednoznačností

Je dobře známo, že hlavní nesnáze, které vznikají při studiu kategorií čísla, pádu, jmenného rodu, času, způsobu apod., jsou způsobeny jevem, který je obyčejně označován jako morfologická homonymie. Kdyby každá gramatická kategorie měla své zvláštní jednoznačné vyjádření, kdyby bylo možno každému flektivnímu tvaru jednoznačně přiřadit určité gramatické hodnoty (morfémy ve smyslu Hjelmslevově), vše by se vyřešilo prostou vzájemně jednoznačnou korespondencí. Přibližně k této situaci dochází v tzv. aglutinujících jazycích (např. v maďarštině nebo v turečtině), i když stoprocentně aglutinující přirozené jazyky neexistují. Se zcela opačnou situací se setkáváme v jazycích, jako je francouzština, rumunština nebo ruština. Vezměme si například francouzské adjektivum mince. Tvarová shoda mezi formou pro maskulinum singuláru a formou pro femininum singuláru zakládá morfologickou homonymii; dochází tak k dvojznačnosti, kterou je možno odstranit pouze na základě kontextu (viz např. [112]). Odstranit morfologickou homonymii tvaru mince znamená uvažovat kontexty jako (feuille, 0) a (cahier, 0), z nichž první vyžaduje hodnotu femininum, druhý hodnotu maskulinum. K jiné situaci dochází, uvažujeme-li adjektivum grand; zde tvary pro maskulinum singuláru a pro femininum singuláru mají své zvláštní vyjádření a není třeba se uchylovat ke kontextu. Ale opačná situace neexistuje; není možné, aby existoval dvojznačný tvar grand takový, že by odpovídající tvar slova mince nevykazoval tutéž dvojznačnost. V tom případě říkáme, že morfologická homonymie tvaru grand je menší než morfologická homonymie tvaru mince. (O různých způsobech přesného měření morfologické homonymie pomocí korespondencí mezi plánem obsahu a plánem výrazu viz [86], [139] a [156].) Projevuje se to čistě kontextově: V každé správné větě, která obsahuje slovo grand, vede nahrazení tohoto slova slovem mince rovněž k správné větě; zato existuje správná věta, která obsahuje slovo mince a která již nedává správnou větu, jestliže v ní nahradíme slovo mince slovem grand (srovnej věty je possède une feuille mince a je possède une feuille grand).

2. Aspekty morfologické homonymie v rumunštině a v ruštině

Uvažujme nyní několik příkladů z rumunštiny. Lze konstatovat, že morfologická homonymie tvaru muncește je menší než morfologická homonymie tvaru lucrează, neboť tvar lucrează vyjadřuje současně singulár i plurál, což neplatí o tvaru muncește. Slovo muncește může být nahrazeno slovem lucrează v každé správné větě, aniž se tím poruší její správnost. Podobně je tomu u rumunských adjektiv integru a subțire; morfologická homonymie slova integru je menší než morfologická homonymie slova subțire.[9]

Přejděme nyní k několika příkladům z ruštiny. R. L. Dobrušin uvažuje v článku [38] na jedné straně substantiva jako окно, солнце, весло, лето, na druhé straně substantiva jako метро, пальто. Každé ze substantiv první skupiny má menší morfologickou homonymii, než je morfologická homonymie substantiv druhé skupiny. Například je možno ve správné větě vždy nahradit slovo окно slovem метро a získaná věta bude rovněž správná.

Podobně je možno konstatovat, že morfologická homonymie slova мразь je menší než morfologická homonymie slova печь; morfologická homonymie slova пускать je také menší než morfologická homonymie slova печь, ale nelze ji srovnávat s morfologickou homonymií slova мразь. Za těmito příklady (vzatými z knihy [128], str. 106—107) se skrývá příslušnost slova печь k dvěma slovním druhům (substantivu a slovesu).

3. Dominace a rodiny

R. L. Dobrušin si v článcích [38] a [39] všiml formální povahy morfologické homonymie. Uvažujme jazyk Φ nad slovníkem Γ. Fráze patřící do Φ se nazývají vyznačené. Jestliže $x \in \Gamma$ a $y \in \Gamma$, říkáme, že x dominuje nad y a píšeme $x \to y$, jestliže pro jakékoli fráze u a v z relace $uxv \in \Phi$ vyplývá relace $uyv \in \Phi$. Píšeme tedy pro francouzštinu grand → petit a grand → mince, pro rumunštinu muncește → → trăiește a muncește → lucrează[10], pro ruštinu окно → солнце, окно → метро a окну → метро atd.

Mějme dvě slova x a y. Jestliže platí $x \to y$, ale nikoli $y \to x$, je morfologická homonymie slova x menší než morfologická homonymie slova y. (Příklad: x = grand, y = mince). Jestliže $x \to y$ a $y \to x$, pak je morfologická homonymie slova x stejná jako morfologická homonymie slova y (x = grand, y = petit). Jestliže $x \to y$, pak morfologická homonymie slova x je menší než morfologická homonymie slova y nebo je stejná. Neplatí-li ani $x \to y$ ani $y \to x$, nelze morfologickou homonymii slov x a y spolu srovnávat (x = mince, y = jaloux).

Relaci dominace můžeme definovat nejen mezi slovy, ale i mezi frázemi. Jsou-li

[9] Tvar muncește je 3. osoba sg. indikativu prézentu a 2. osoba sg. imperativu, tvar lucrează je navíc též 3. osoba plurálu indikativu prézentu. — Tvar integru je pouze tvar pro maskulinum singuláru, zatímco tvar subțire je tvar pro maskulinum i femininum singuláru. — *Pozn. překladatele.*

[10] Tvar trăiește je stejně jako tvar muncește 3. osoba sg. indikativu prézentu a 2. osoba sg. imperativu. — O poměru tvarů muncește a lucrează viz pozn. 9. — *Pozn. překladatele.*

například f a g dvě fráze nad slovníkem Γ, říkáme, že f dominuje nad g a píšeme $f \to g$, jestliže z relace $ufv \in \Phi$ vyplývá relace $ugv \in \Phi$ pro jakýkoli kontext $\{u, v\}$ nad slovníkem Γ.

Buď x fráze nad Γ. Uvažujme množinu všech frází y takových, že $x \to y$ a $y \to x$ (pro stručnost můžeme psát $x \leftrightarrow y$). Je zřejmé, že tato množina je totožná s distribuční třídou fráze x v širším slova smyslu, o které jsme mluvili v 29. kapitole I. oddílu a kterou jsme označili $F(x)$. Množina $F(x)$ se také nazývá rodinou frází x v širším slova smyslu. Jestliže $a \in \Gamma$, množina slov b takových, že platí $b \to a$ a $a \to b$ (pro stručnost můžeme psát $a \leftrightarrow b$), je totožná s distribuční třídou slova a, o které jsme mluvili v 29. kapitole I. oddílu a kterou jsme označili $S(a)$. Podle terminologie O. S. Kulaginové [82], která dospěla k tomuto pojmu zcela jiným postupem, se množina $S(a)$ nazývá také rodinou slova a.

Je zřejmé, že relace dominace je reflexívní a tranzitivní v Γ; jde tedy o relaci quasiuspořádání v Γ. Na druhé straně, jelikož z relací $x \to y$ a $y \to x$ nevyplývá $x = y$, není $\to$ zpravidla relací uspořádání v Γ. Aby $\to$ bylo relací uspořádání v Γ, je nutné a stačí, aby se každá rodina redukovala na jediné slovo.

Je známo, že každé relaci quasiuspořádání lze přiřadit určitou ekvivalenci. Ekvivalence přiřazená relaci $\to$ je právě relace vzájemné dominace $\leftrightarrow$. Odpovídající ekvivalenční třídy jsou právě rodiny.

Intuitivně je relace dominace často srovnávána s binární relací R definovanou v Γ takto: mezi x a y je relace R (píšeme xRy), jestliže nahrazením slova x slovem y v každé frázi $f \in \Phi$, která obsahuje slovo x, dostaneme frázi, která patří rovněž do Φ.

Je zřejmé, že z relace $x \to y$ vyplývá xRy; je však důležité poznamenat, že opak tohoto tvrzení neplatí. Mějme například $\Gamma = \{x, y\}$, $\Phi = \{xxx, yyy\}$. Zřejmě platí xRy, ale neplatí $x \to y$, neboť fráze $f_1 x f_2$ je pro $f_1 = x$, $f_2 = x$ vyznačená, zatímco fráze $f_1 y f_2$ vyznačená není.

Poznamenejme konečně, že relace dominace je velmi blízká relaci jednosměrného nahrazování, které použil Harris [55] v morfematickém plánu jazyka.

4. Gramatický atom

Uvažujme jakoukoli frázi x. Při každém distribučním zkoumání je třeba přiřadit frázi x určité množiny frází, které charakterizují postavení fráze x z hlediska kontextu. Nejdůležitější a zároveň nejjednodušší je množina $F(x)$, kterou jsme uvažovali v 3. kapitole. Relace dominace umožňuje zavést ještě dvě množiny frází. Položme $A(x) = \{y; y \to x\}$ a $B(x) = \{z; x \to z\}$. Zřejmě platí $F(x) = A(x) \cap B(x)$. Příslušnost dvou frází do téže rodiny v širším slova smyslu je velmi restriktivní, je-li Φ přirozený jazyk. Abychom odhalili ještě jemnější a zároveň častější případy, musíme uvažovat také množiny $A(x)$ a $B(x)$. Místo x je možno rovněž uvažovat určitou množinu frází $\mathscr{F}$. Definujeme pak $A(\mathscr{F})$ jako množinu $\{y; y \to x$ pro jakoukoli frázi $x \in \mathscr{F}\}$ a $B(\mathscr{F})$ jako množinu $\{z; x \to z$ pro jakoukoli frázi $x \in \mathscr{F}\}$.

Zvláštní, velmi důležitý případ je ten, kdy $A(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{F}$; pak říkáme, že $\mathscr{F}$ je počáteční množina.

Abychom porozuměli významu těchto pojmů, uvažujme případ, kdy $\mathscr{F}$ je rodinou $S(x)$ slova $x \in \Gamma$, a omezme relaci $\to$ na množinu Γ.

Všechny prvky rodiny $S(x)$ mají tytéž gramatické hodnoty jako x; jestliže například x = pur a $y \in S(x)$, pak y je stejně jako pur tvar adjektiva pro maskulinum singuláru. Ale existují adjektivní tvary, které přesto, že jsou v maskulinu singuláru, nepatří do $S(x)$; to je například tvar mince. Nastává otázka: jakou formální operací je možno získat množinu všech adjektivních tvarů v maskulinu singuláru? Odpověď se nabízí okamžitě: je to přechod od $S(\text{pur})$ k $(B(S)\text{pur}))$. Tato odpověď je však možná jedině proto, že $A(S(\text{pur})) \subseteq S(\text{pur})$ (zde jde dokonce o rovnost), tedy proto, že $S(\text{pur})$ je počáteční množina slov. Například B $(S(\text{mince}))$ již neobsahuje všechny adjektivní tvary v maskulinu singuláru; $S(\text{mince})$ však není počáteční množina slov.

Z lingvistického hlediska spočívá vlastnost $S(x)$ být počáteční množinou v tom, že mezi flektivními tvary slova x je morfologická homonymie proti ostatním slovům y, patřícím k témuž slovnímu druhu jako x, minimální. Jinými slovy neexistuje slovo y, jehož flektivní tvary by vykazovaly chudší morfologickou homonymii, než jaká je mezi flektivními tvary slova x. Ale mohou existovat slova, která nelze srovnávat s x z hlediska morfologické homonymie; dvě taková slova jsou například tvary pur a pure.

Tyto úvahy vedou k potřebě studovat u každé počáteční rodiny $S(x)$ sjednocení $S(x) \cup B(S(x)) = B(S(x))$. Toto sjednocení je vytvořeno ze všech slov patřících k témuž slovnímu druhu jako x a majících tytéž gramatické hodnoty jako x; označíme je v tomto oddílu jako elementární gramatickou kategorii generovanou rodinou $S(x)$. V plánu výrazu tento pojem odpovídá kombinaci morfémů ve smyslu Hjelmslevově [64]. Takové spojení se někdy nazývá gramatém ([128], str. 77) a představuje jakýsi gramatický atom. Každá gramatická kategorie podle pojetí tradiční gramatiky je vlastně sjednocením elementárních gramatických kategorií. Jak hned uvidíme, je matematickým vyjádřením takového sjednocení výraz tvaru $E \cup B(E)$, kde E je určitá počáteční množina slov. Tento výzkum zahájil Dobrušin [38] a [39]; nezávisle na něm a způsobem dosti zastřeným jej dále rozvinul A. Sestier [137].

Model, kterým se zabýváme v tomto oddílu, vnáší určité jasno do pojmů synkretismus a neutralizace ([103], [120]). Jeho studium potvrzuje Hjelmslevovu hypotézu, podle níž neutralizace ve fonologii a synkretismus v gramatice představují vlastně tentýž jev. Na druhé straně lze touto metodou dospět také ke zobecnění pojmu neutralizace, které podal B. Trnka v [147]. Ke všem těmto otázkám viz [128], § 33.

Obvyklé gramatické kategorie jsou většinou zvláštním případem toho, co budeme dále označovat jako normální gramatické kategorie. Ale všimneme si také jiných než normálních gramatických kategorií, abychom mohli uvažovat určité výjimečné případy a abychom mohli své úvahy dostatečně zobecnit, jak to vyžaduje matematický výzkum. Základním problémem bude stanovení nutných a postačujících podmínek pro to, aby dvě počáteční množiny vedly k téže gramatické kategorii.

Poslední část IV. oddílu věnujeme gramatickým kategoriím, k nimž vedou nepočáteční množiny nebo množiny týkající se části množiny vyznačených frází.

Konečně je třeba poznamenat, že modely, jimiž se zabýváme v tomto oddílu, se týkají spíše pojetí gramatické kategorie, tedy toho, co je všem gramatickým kategoriím společné, než jejich specifických rysů.

5. Vlastnosti relace →

Předmětem našich dalších výkladů budou některé vlastnosti výše definované relace → a počátečních množin; určíme také vztah mezi těmito pojmy a pojmem rodiny. Je zřejmé, že dvě různé rodiny jsou vždy disjunktní; rodiny vytvářejí rozklad na Γ a příslušnost dvou slov k téže rodině definuje ekvivalenci. Této okolnosti, na kterou bylo upozorněno také v článku [82], využijeme v dalších výkladech.

Tvrzení 1. Jestliže $X \to Y$, $Z \subseteq X$ a $V \subseteq Y$, pak $Z \to V$.

Tvrzení 2. Jestliže $X_\alpha \to Y$ pro každé $\alpha \in I$, pak $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \to Y$.

Tvrzení 3. Jestliže $X \to Y_\alpha$ pro každé $\alpha \in I$, pak $X \to \bigcup_{\alpha \in I} Y_\alpha$.

Tvrzení 4. $X \to X$ právě tehdy, když existuje rodina F taková, že $X \subseteq F$.

Tvrzení 5. Jestliže $x \to y$, pak $F(x) \to F(y)$.

Tvrzení 6. Jestliže $X \subseteq F$, $Y \subseteq F$ a F je rodina, pak $X \to Y$ a $Y \to X$.

Tvrzení 7. Jestliže $X \to Y$, $Y \to X$, $X \neq 0$ a $Y \neq 0$, pak existuje rodina F taková, že $X \subseteq F$ a $Y \subseteq F$.

Poznámka. Zvláštní případ tvrzení 7 podal R. L. Dobrušin v [8], str. 56: Jsou-li F_1 a F_2 rodiny a jestliže $F_1 \to F_2$ a $F_2 \to F_1$, pak $F_1 = F_2$.

Tvrzení 8. Aby F byla rodina, je nutné a stačí, aby byly splněny tyto dvě podmínky: a) $F \to F$; b) jestliže $H \to H$ a $H \supseteq F$, pak $H = F$.

Tvrzení 9. Je-li A počáteční množina a jestliže $B \supseteq A$, pak je B rovněž počáteční množina.

Tvrzení 1, 2, a 3 bezprostředně vyplývají z definice relace →. Abychom došli k tvrzení 4, uvažujme dvě slova $x \in X$, $y \in X$. Z hypotézy $X \to X$ lze odvodit $x \to y$ a $y \to x$, tedy $y \in F(x)$ pro každé $y \in X$; to znamená, že $X \subseteq F(x)$ a $F(x)$ je hledaná rodina. Buď naopak $X \subseteq F$, kde F je rodina. Platí tedy pro $x \in X$, $y \in X$ relace $x \in F$, $y \in F$ a tedy $x \to y$ a $y \to x$. Z toho vyplývá, že $X \to X$, čímž jsme došli k tvrzení 4.

Tvrzení 5 vyplývá z tranzitivnosti relace →. Tvrzení 6 vyplývá z definice relace → a z definice pojmu rodiny.

Abychom došli k tvrzení 7, všimněme si, že z předpokladu vyplývá $x \to y$ a $y \to x$ pro $x \in X$, $y \in Y$ a tedy $Y \subseteq F(x)$; na druhé straně pro $x' \in X$ platí $y \to x'$ a $x' \to y$ a tedy na základě tranzitivnosti relace → platí $x \to x'$ a $x' \to x$ a v důsledku toho $X \subseteq F(x)$. Tak jsme dokázali tvrzení 7 tím, že jsme položili $F = F(x)$.

Tvrzení 4 je důsledek tvrzení 6 a 7.

Z tvrzení 5 a 7 lze odvodit tuto vlastnost, kterou konstatoval R. L. Dobrušin v článku [39], str. 56:

Jsou-li dány dvě různé rodiny F_1 a F_2, nastává jedna z těchto tří situací: 1. pro každé $x \in F_1$ a pro každé $y \in F_2$ platí $x \to y$; 2. pro každé $x \in F_1$ a pro každé $y \in F_2$ platí $y \to x$; 3. pro jakákoli $x \in F_1$ a $y \in F_2$ neplatí ani $x \to y$ ani $y \to x$.

Tvrzení 8 vyplývá z definice pojmu rodiny a z tvrzení 4.

6. Počáteční množiny, produktivní množiny a nasycený produkt

Tvrzení 9 vyplývá z definice počáteční množiny a vede k zavedení tohoto pojmu:

Počáteční množina A je minimální počáteční množina, jestliže neobsahuje jinou počáteční množinu než samu sebe.

Na druhé straně je třeba poznamenat, že počáteční množina A jaksi přestává být zajímavá, neexistuje-li žádný prvek y takový, že by platilo $A \to y$. Tak docházíme k zavedení tohoto pojmu:

Množina $X \subseteq \Gamma$ je produktivní, existuje-li slovo ξ takové, že $X \to \xi$.

Na základě tvrzení 9 lze konstatovat, že počáteční množiny obsažené v Γ tvoří vzhledem k operaci sjednocení komutativní pologrupu.

Evidentní jsou tato tvrzení:

Tvrzení 10. Každá množina obsažená v rodině je produktivní; zvláště je produktivní každá množina vytvořená z jediného slova.

Tvrzení 11. Je-li X produktivní množina a platí-li $Y \subseteq X$, pak je Y rovněž produktivní množina.

Z počátečních množin jsou zajímavé pouze ty, které jsou produktivní. Zvláštní pozornost zasluhují počáteční množiny, které jsou zároveň minimální a produktivní.

Jsou-li dány dvě množiny X a A a platí-li $X \subseteq \Gamma \supseteq A$, říkáme, že X je produktivní vzhledem k A, jestliže $X \to A$; říkáme také, že množina A je produkována množinou X. Jestliže naopak neexistuje množina $B \supseteq A$, $B \neq A$ taková, že by X bylo produktivní vzhledem k B, říkáme, že A je nasycený produkt množiny X a značíme je X_ι.

Snadno si můžeme ověřit tato tvrzení:

Tvrzení 12. Nasycený produkt množiny E je sjednocením všech množin produkovaných množinou E; nasycený produkt množiny je tedy jednoznačně určen.

Tvrzení 13. Nasycený produkt množiny je sjednocením rodin.

Poznámka. K tvrzení 12 dojdeme od tvrzení 3. K tvrzení 13 dojdeme od tvrzení 5 a 3.

Říkáme, že množina X je nasyceně produktivní vzhledem k A, jestliže $X = \{x; x \to A\}$.

Tvrzení 14. Ke každé množině $A \subseteq \Gamma$ existuje jednoznačně určená množina X, která je nasyceně produktivní vzhledem k A; X je totiž sjednocení všech množin produktivních vzhledem k A.

Tvrzení 15. Množina nasyceně produktivní vzhledem k určité množině A je sjednocením rodin.

Poznámka. K tvrzení 14 dojdeme od tvrzení 2. K tvrzení 15 dojdeme od tvrzení 2 a 5.

7. Gramatické kategorie a elementární gramatické kategorie

Uvažujme počáteční množinu A a označme $\mathscr{G}(A)$ sjednocení množiny A a jejího nasyceného produktu. $\mathscr{G}(A)$ je gramatická kategorie generovaná množinou A (zkráceně GK generovaná množinou A). Ve zvláštním případě, kdy A je rodinou, je $\mathscr{G}(A)$ elementární gramatická kategorie (zkráceně EGK) generovaná množinou A.

Snadno si můžeme ověřit tato tvrzení:

Tvrzení 16. Aby počáteční rodina F byla EGK, je nutné a stačí, aby rodina F byla nasyceným produktem sama sebe.

Tvrzení 17. Je-li rodina F počáteční množina, pak množina B je nasycený produkt množiny F právě tehdy, když B je EGK generovaná množinou F.

8. Elementární gramatické kategorie rumunských adjektiv

Použijeme výsledků, k nimž jsme dospěli v 32. kapitole I. oddílu. Jako dosud bude zápis $A \to E$ značit, že každé slovo množiny A dominuje nad každým slovem množiny E. Pak platí: S(frumos) $\to$ S(frumos), S(frumos) $\to$ S(vechi), S(frumos) $\to$ $\to$ S(precoce), S(frumos) $\to$ S(dibaci), S(frumos) $\to$ S(subțire), S(frumos) $\to$ S(june), S(frumos) $\to$ S(maro). Tím jsme vyčerpali slova, nad nimiž dominuje S(frumos); vyjdeme-li z toho, že S(frumos) je počáteční rodina, můžeme vytvořit elementární gramatickou kategorii, kterou generuje S(frumos). Platí

$\mathscr{G}(S$(frumos)) = S(frumos) $\cup$ S(vechi) $\cup$ S(precoce) $\cup$ S(dibaci) $\cup$ S(subtire) $\cup$ $\cup$ S(june) $\cup$ S(maro).

Lze pozorovat, že je možno formální metodou dospět k tomu, co je ze sémantického hlediska úhrnem nedeterminovaných adjektiv v nominativu singuláru maskulina pozitivu.

Nyní stanovíme slova, nad nimiž dominuje počáteční rodina S(frumoasă). Platí: S(frumoasă) $\to$ S(frumoasă), S(frumoasă) $\to$ S(precoce), S(frumoasă) $\to$ $\to$ S(subțire), S(frumoasă) $\to$ S(greoaie), S(frumoasă) $\to$ S(maro). Tím jsme vyčerpali slova, nad nimiž dominuje S(frumoasă); můžeme tedy vytvořit elementární gramatickou kategorii, kterou generuje S(frumoasă). Platí $\mathscr{G}(S$(fromuasă)) = S(frumoasă) $\cup$ $\cup$ S(precoce) $\cup$ S(subțire) $\cup$ S(greoaie) $\cup$ S(maro).

Lze pozorovat, že jsme formální metodou dospěli k tomu, co je ze sémantického hlediska úhrnem nedeterminovaných adjektiv v nominativu singuláru feminina pozitivu.

Nyní stanovíme slova, nad nimiž dominuje počáteční rodina S(frumoși). Platí S(frumoși) $\to$ S(frumoși), S(frumoși) $\to$ S(vechi), S(frumoși) $\to$ S(dibaci), S(frumoși) $\to$ S(subțiri), S(frumoși) $\to$ S(maro). Tím jsme vyčerpali slova, nad nimiž dominuje S(frumoși). Platí tedy

$\mathscr{G}(S$(frumoși)) = S(frumoși) $\cup$ S(vechi) $\cup$ S(dibaci) $\cup$ S(subțiri) $\cup$ S(maro).

Lze pozorovat, že jsme formální metodou dospěli k tomu, co je ze sémantického hlediska úhrnem nedeterminovaných adjektiv v nominativu plurálu maskulina pozitivu.

Nyní stanovíme slova, nad nimiž dominuje počáteční rodina S(frumoase). Platí S(frumoase) $\to$ S(frumoase), S(frumoase) $\to$ S(vechi), S(frumoase) $\to$ S(precoce), S(frumoase) $\to$ S(greoaie), S(frumoase) $\to$ S(subțiri), S(frumoase) $\to$ S(maro), S(frumoase) $\to$ S(june). Tím jsme vyčerpali slova, nad nimiž dominuje S(frumoase). Platí $\mathscr{G}(S$(frumoase)) = S(frumoase) $\cup$ S(vechi) $\cup$ S(precoce) $\cup$ S(greoaie) $\cup$ S(subțiri) $\cup$ $\cup$ S(june) $\cup$ S(maro).

Lze pozorovat, že jsme formální metodou dospěli k tomu, co je ze sémantického hlediska úhrnem nedeterminovaných adjektiv v nominativu plurálu feminina pozitivu.

Tím jsme vyčerpali elementární gramatické kategorie nedeterminovaných adjektiv, neboť z dvanácti distribučních tříd stanovených v 32. kapitole I. oddílu jsou pouze první čtyři počáteční distribuční třídy.

Metodologická poznámka. Abychom stanovili například elementární gramatickou kategorii, kterou generuje S(frumos), nepotřebovali jsme zjišťovat u každého adjektiva zvlášť, zdali nad ním dominuje nebo nedominuje S(frumos); k tomu by bylo zapotřebí obrovské práce. Vyšli jsme z jednoduché, ale důležité vlastnosti relace dominace (kap. 5, tvrzení 5): jestliže $x \to y$, pak $S(x) \to S(y)$. Pak stačilo, měli-li jsme stanovený inventář distribučních říd nedeterminovaných adjektiv, ověřit si relaci dominace pouze dvanáctkrát: vybrali jsme náhodně po jednom slově z každé z dvanácti distribučních tříd a ověřili jsme si, zdali nad ním dominuje nebo nedominuje slovo „frumos“. Prakticky to znamená, že isme konstatovali, že relace frumos $\to$ frumos, frumos $\to$ vechi, frumos $\to$ precoce, frumos $\to$ dibaci, frumos $\to$ subțire, frumos $\to$ june, frumos $\to$ maro jsou pravdivé, zatímco relace frumos → frumoasă, frumos → frumoşi, frumos → frumoase, frumos → greoaie, frumos → subţiri jsou nepravdivé.

Obdobně jsme postupovali i při konstatování dalších tří elementárních gramatických kategorií.

9. Neelementární gramatické kategorie rumunských nedeterminovaných adjektiv

Pokusme se provést sjednocení dvou z výše stanovených elementárních gramatických kategorií. Uvažujme například sjednocení

$$H_1 = \mathscr{G}(S(\text{frumos})) \cup \mathscr{G}(S(\text{frumoasă}))\,.$$

Podle tvrzení 9 v 5. kapitole je H_1 počáteční množina a tedy generuje gramatickou kategorii. Platí $H_1 \to S(\text{maro})$ a tím jsou vyčerpána slova, nad nimiž dominuje H_1. Ale distribuční třída $S(\text{maro})$ je obsažena v množině H_1 a tedy

$$\mathscr{G}(H_1) = H_1\,.$$

Tím jsme dokázali, že H_1 je gramatická (samozřejmě neelementární) kategorie. Lze pozorovat, že jsme formální metodou dospěli k tomu, co je ze sémantického hlediska úhrnem nedeterminovaných adjektiv v nominativu singuláru pozitivu.

Obdobně lze zjistit, že množina

$$H_2 = \mathscr{G}(S(\text{frumos})) \cup \mathscr{G}(S(\text{frumoşi}))$$

je gramatická kategorie, která je ze sémantického hlediska úhrnem nedeterminovaných adjektiv v nominativu maskulina pozitivu.

Množina

$$H_3 = \mathscr{G}(S(\text{frumoasă})) \cup \mathscr{G}(S(\text{frumoase}))$$

je gramatická kategorie, která je ze sémantického hlediska úhrnem nedeterminovaných adjektiv v nominativu feminina pozitivu.

Množina

$$H_4 = \mathscr{G}(S(\text{frumoşi})) \cup \mathscr{G}(S(\text{frumoase}))$$

je gramatická kategorie, která je ze sémantického hlediska úhrnem nedeterminovaných adjektiv v nominativu plurálu pozitivu.

Mějme nyní množinu $H_{14} = H_1 \cup H_4$. Podle tvrzení 9 v 5. kapitole je H_{14} počáteční množina, a tedy generuje gramatickou kategorii. Platí $H_{14} \to S(\text{maro})$ a tím jsou vyčerpána slova, nad nimiž dominuje H_{14}. Ale distribuční třída $S(\text{maro})$ je obsažena v H_{14} a tedy

$$\mathscr{G}(H_{14}) = H_{14}\,.$$

Tím jsme dokázali, že H_{14} je gramatická (neelementární) kategorie. Lze pozorovat, že jsme formální metodou dospěli k tomu, co je ze sémantického hlediska úhrnem nedeterminovaných adjektiv v nominativu pozitivu.

Obdobně lze zjistit, že množina $H_{23} = H_2 \cup H_3$ je gramatická kategorie; platí $H_{14} = H_{23}$.

Dosud jsme uvažovali pouze gramatické kategorie generované sjednocením i distribučních tříd. Takové gramatické kategorie budeme dále nazývat normální gramatické kategorie. Podle teorému 9, který uvádíme níže, je gramatická kategorie normální právě tehdy, když je sjednocením rodin. Ukážeme to na adjektivech.

Buď $A = S(\text{frumos}) \cup S(\text{vechi}) \cup S(\text{precoce}) \cup S(\text{dibaci}) \cup S(\text{subţire}) \cup S(\text{june}) \cup \{\text{gri}\}$, kde $\{\text{gri}\}$ označuje množinu obsahující jediné slovo „gri". Buď $B = S\,(\text{frumos}) \cup S(\text{vechi}) \cup S(\text{precoce}) \cup S(\text{dibaci}) \cup S(\text{subţire}) \cup S(\text{june}) \cup (S(\text{gri}) - \{\text{gri}\})$. Podle tvrzení 9 v 5. kapitole jsou A a B počáteční množiny a navíc není A obsaženo v B ani B v A. Platí $A \to S(\text{gri})$, $B \to S(\text{gri})$; tím jsme vyčerpali slova, nad nimiž dominují množiny A a B; tedy

$$\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = \mathscr{G}(S(\text{frumos}))\,.$$

Existuje tedy jedna a jen jedna distribuční třída, totiž S (gri), která má vlastnost

$$A \cup B \to S(\text{gri})\,;$$

$S(\text{gri})$ přitom obsahuje všechna slova množiny A, která nejsou obsažena v množině B, a všechna slova množiny B, která nejsou obsažena v množině A. Tato skutečnost, kterou si lze snadno ověřit, je důsledkem obecného teorému 1, uvedeného v kapitole 12. Tak je možno na základě určitých teorémů, k nimž jsme dospěli v rámci čistě deduktivní teorie, odlišovat logické premisy, které zajišťují určitou vlastnost, od faktů, jež se vyskytují pohromadě jen náhodně. Vlastnosti distribuční třídy $S(\text{gri})$, pokud jde o počáteční množiny A a B, jsou odrazem obecnějšího jevu, který osvětluje organickou souvislost mezi pojmem distribuční třídy na jedné straně a pojmem gramatické kategorie na straně druhé; to platí i tehdy, kdy gramatická kategorie není generována distribuční třídou.

10. Míra morfologické homonymie: společná část některých elementárních gramatických kategorií

Uvažujme znovu čtyři elementární gramatické kategorie, k nimž jsme dospěli v kapitole 8. Všimněme si, že některá slova patří k několika elementárním gramatickým kategoriím. Z tohoto hlediska se nedeterminovaná adjektiva dělí do čtyř tříd takto:

1. Adjektiva, která patří k jediné elementární gramatické kategorii a která označíme jako adjektiva s indexem jedna; sem patří adjektiva z $S(\text{frumos})$, $S(\text{frumoasă})$, $S(\text{frumoşi})$, $S(\text{frumoase})$.

2. Adjektiva, která patří k dvěma elementárním gramatickým kategoriím a která označíme jako adjektiva s indexem dvě; sem patří adjektiva z S(dibaci), S(subţire), S(june), S(greoaie), S(subţiri).

3. Adjektiva, která patří ke třem elementárním gramatickým kategoriím a která označíme jako adjektiva s indexem tři; sem patří adjektiva z S(vechi) a S(precoce).

4. Adjektiva, která patří ke čtyřem elementárním gramatickým kategoriím a která označíme jako adjektiva s indexem čtyři; sem patří adjektiva z S(gri).

Index adjektiva vyjadřuje míru morfologické homonymie, která se projevuje v paradigmatu příslušného adjektiva; čím je tento index větší, tím je větší počet homonymních vztahů v paradigmatu příslušného slova. Výše definovaný index je tedy možno chápat jako index morfologické homonymie. Jiným hlediskem tohoto problému se zabýváme v článku [86].

Index homonymie lze stanovit jednodušeji na základě tohoto zjištění: každé lovo z $S(x)$ má stejný index homonymie jako x.

Na základě těchto zjištění je zřejmé, že nazveme homonymní interferencí společnou část několika elementárních gramatických kategorií. Lze dokázat, že homonymní interference dvou elementárních gramatických kategorií $\mathscr{G}(A)$ a $\mathscr{G}(B)$ je

$$\mathscr{G}(A \cup B) - (A \cup B);$$

z toho vyplývá, že homonymní interference elementárních gramatických kategorií $\mathscr{G}(S(\text{frumos}))$ a $\mathscr{G}(S(\text{frumoasă}))$ je $\mathscr{G}(S(\text{frumos}) \cup S(\text{frumoasă})) - (S(\text{frumos}) \cup S(\text{frumoasă}))$. Obdobným způsobem je možno vyjádřit i ostatní homonymní interference.

11. Gramatické kategorie francouzských adjektiv

Vyjdeme-li z rozdělení adjektiv na distribuční třídy (viz I. oddíl, kap. 31), dojdeme ke čtyřem EGK:

1. $\mathscr{G}(S(\text{différent})) = S(\text{différent}) \cup S(\text{heureux}) \cup S(\text{analytique})$
2. $\mathscr{G}(S(\text{différente})) = S(\text{différente}) \cup S(\text{analytique})$
3. $\mathscr{G}(S(\text{différents})) = S(\text{différents}) \cup S(\text{heureux}) \cup S(\text{analytiques})$
4. $\mathscr{G}(S(\text{différentes})) = S(\text{différentes}) \cup S(\text{analytiques})$.

Sjednocením 1. a 2. EGK je GK obsahující všechny singulárové tvary francouzských adjektiv, sjednocením 3. a 4. EGK je GK obsahující všechny jejich plurálové tvary. Sjednocením 1. a 3. EGK je GK obsahující všechny tvary rodu mužského, sjednocením 2. a 4. EGK je GK obsahující všechny tvary rodu ženského.

Index morfologické homonymie tvarů différent, différents, différente a différentes se rovná jedné; index morfologické homonymie tvarů heureux, analytique a analytiques se rovná dvěma. Neexistuje adjektivní tvar, jehož index morfologické homonymie by byl větší než 2. Morfologická homonymie francouzských adjektiv je tedy mnohem menší než morfologická homonymie adjektiv rumunských.

12. Nutné podmínky pro to, aby dvě množiny generovaly tutéž gramatickou kategorii

Každá počáteční množina generuje GK; každé počáteční množině tedy odpovídá zcela určitá GK. Naskýtá se pak otázka, zda i opak tohoto tvrzení je pravdivý; to znamená, že je třeba určit, za jakých podmínek generují dvě počáteční množiny tutéž GK. V odpovědi na tuto otázku vyjdeme z pojmu symetrického rozdílu dvou množin A a B, který se označuje $A \Delta B$ a definuje se, jak známo, rovností $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Pak platí

Teorém 1. *Generují-li dvě počáteční množiny A a B tutéž GK a platí-li $A - B \neq 0 \neq B - A$, existuje rodina F taková, že $F \supseteq A \Delta B$ a $A \cup B \rightarrow F$.*

Důkaz. Předpokládejme, že množiny A a B generují tutéž GK. Platí

$$A \cup A_1 = B \cup B_1,$$

kde A_1 je nasycený produkt množiny A a B_1 je nasycený produkt množiny B. Z toho vyplývá, že

$$A - B \subseteq B_1 \quad (1)$$

$$B - A \subseteq A_1. \quad (2)$$

Ale z definice vyplývá

$$B \rightarrow B_1; \quad (3)$$

tedy na základě tvrzení 1 a s ohledem na (1) platí

$$B \rightarrow A - B. \quad (4)$$

Z definice vyplývá

$$A \rightarrow A_1; \quad (5)$$

tedy na základě tvrzení 1 a s ohledem na (2) platí

$$A \rightarrow B - A. \quad (6)$$

Z relace (4) a z tvrzení 1 lze odvodit

$$B - A \rightarrow A - B. \quad (7)$$

Z relace (6) a z tvrzení 1 lze odvodit

$$A - B \rightarrow B - A. \quad (8)$$

Na základě tvrzení 7 a s ohledem na nerovnost $A - B \neq 0 \neq B - A$ lze odvodit z relací (7) a (8), že existuje rodina F taková, že

$$A \Delta B \subseteq F. \quad (9)$$

Z relace (9) a z tvrzení 6 lze odvodit, že $A - B \to F$. Na základě relace (4) a vzhledem k trazitivnosti relace $\to$ platí

$$B \to F\,. \tag{10}$$

Vyjdeme-li znovu z relace (9) a z tvrzení 6, můžeme odvodit, že $(B - A) \to F$. Jelikož $B - A \neq 0$, platí pak na základě relace (6) a vzhledem k tranzitivnosti relace $\to$

$$A \to F\,. \tag{11}$$

Z relací (10) a (11) vyplývá s ohledem na tvrzení 2

$$A \cup B \to F\,. \tag{12}$$

Poznámka. Rodina F, jejíž existenci zaručuje teorém 1, je jednoznačně určena. Na základě hypotéz skutečně platí $A \Delta B \neq 0$. Ale také platí $A \Delta B \subseteq F$ a je známo, že jedno slovo patří do jediné rodiny.

Opak teorému 1 neplatí, jak vyplývá z tohoto tvrzení:

Existují dvě počáteční množiny A a B takové, že platí $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$, a rodina F taková, že $A \cup B \to F$ a $A \Delta B \subseteq F$, ale $B - A = 0$.

Buďte například $\Gamma = \{a, b, c\}$, $\Phi = \{abc, acc\}$, $A = \{b, c\}$, $B = \{b\}$. A a B jsou počáteční množiny a platí $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = \{b, c\}$. Rovněž platí $S(c) = \{c\}$, $A \Delta B = \{c\}$ a $B - A = 0$. Klademe-li $F = S(c)$, je všem podmínkám výroku vyhověno.

Nyní ukážeme, že z výroku teorému 1 nelze odstranit předpoklad $A - B \neq \neq 0 \neq B - A$. Platí totiž toto tvrzení:

Lze vytvořit dvě počáteční množiny A a B takové, že platí $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$, a takové, že neexistuje rodina F s vlastností $A \Delta B \subseteq F$.

Abychom to dokázali, položme $\Gamma = \{a, b, c, d\}$, $\Phi = \{ab, bc, cc, dd, cd, db, cb\}$, $A = \{a\}$, $B = \{a, c, d\}$. A a B jsou počáteční množiny a platí $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = \{a, c, d\}$. Na druhé straně $A \Delta B = B - A = \{c, d\}$. Kdyby existovala rodina F taková, že by platilo $\{c, d\} \subseteq F$, pak by platilo $d \in S(c)$, což však není možné, jelikož c nedominuje nad d.

Korolár 1. Jsou-li A a B dvě disjunktní počáteční množiny, pak generují různé GK.

Důkaz provedeme sporem: Předpokládejme, že A a B generují tutéž GK. Pak na základě teorému 1 existuje rodina F taková, že $A \Delta B \subseteq F$. Jelikož však A a B jsou disjunktní množiny, platí $A \Delta B = A \cup B$ a tedy $A \cup B \subseteq F$ a tím spíše $A \subseteq \subseteq F \supseteq B$. Jelikož A a B jsou počáteční množiny, lze odvodit, že $A = F = B$, což je v rozporu s tím, že $A \cap B = 0$.

Opak koroláru 1 neplatí; platí totiž toto tvrzení:

Existují dvě počáteční množiny A a B takové, že $A \cap B \neq 0$ a $\mathscr{G}(A) \neq \mathscr{G}(B)$.

Buďte například $\Gamma = \{a, b, c\}$, $\Phi = \{abc, acc, aac\}$, $A = \{b, c\}$, $B = \{b\}$. A a B jsou počáteční množiny a platí $\mathscr{G}(A) = \{b, c\}$, $\mathscr{G}(B) = \{a, b, c\}$; všechny podmínky výroku jsou tedy splněny.

Tvrzení 18. Mají-li dvě počáteční množiny A a B generovat tutéž GK, musí platit $A \cap B \to A \Delta B$.

Důkaz. Z předpokladu vyplývá, že $A \cup A_1 = B \cup B_1$, tedy $A - B \subseteq B_1$ a $B - A \subseteq A_1$. Lze odvodit, že $B \to A - B$ a $A \to B - A$; z toho plyne na základě tvrzení 1 žádaná podmínka.

Poznámka. Podmínka $A \cap B \to A \Delta B$ nestačí pro to, aby platilo $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$. Mějme například $\Gamma = \{a, b, c\}$, $\Phi = \{abc, acc, aac\}$, $A = \{b, c\}$, $B = \{b\}$. A a B jsou počáteční množiny; $A \cap B = \{b\}$, $A \Delta B = \{c\}$ a protože $b \to c$, platí $A \cap B \to A \Delta B$. Přesto platí $\mathscr{G}(A) = \{b, c\} \neq \{a, b, c\} = \mathscr{G}(B)$.

13. Postačující podmínky pro to, aby dvě počáteční množiny generovaly tutéž gramatickou kategorii

Teorém 2. *Buďte A a B dvě počáteční množiny takové, že $A - B \neq 0$ a $B - A \neq 0$. Existuje-li rodina F taková, že $A \cap B \to F \supseteq A \Delta B$, pak $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$ a $A_1 = B_1$.*

Důkaz. Vezmeme-li v úvahu, že předpoklady jsou symetrické vzhledem k A i k B, stačí dokázat, že $\mathscr{G}(A) \subseteq \mathscr{G}(B)$ a $A_1 \subseteq B_1$. První inkluzi lze vyjádřit jako $A \cup A_1 \subseteq B \cup B_1$. Nejprve je třeba ukázat, že $A - B \subseteq B_1$, to jest, že $B \to A - B$. Ale z předpokladu a z tvrzení 1 vyplývá, že $A \cap B \to A - B$. Z tvrzení 6 a z předpokladu také vyplývá, že $B - A \to A - B$. Použitím tvrzení 2 můžeme odvodit, že $B \to A - B$.

Nyní ukážeme, že $A_1 \subseteq B_1$. Mějme například slovo x takové, že $x \in A_1$; tedy $A \to x$. Na základě tvrzení 1 platí, že $A - B \to x$ a $A \cap B \to x$. Na základě relace $B - A \to A - B$ a vzhledem k tranzitivnosti relace $\to$ v $2^\Gamma - \{\emptyset\}$ lze odvodit, že $B - A \to x$, a protože platí také $A \cap B \to x$, dospějeme na základě tvrzení 2 k relaci $B \to x$ a teorém 2 je dokázán.

Teorém 2 se stane nesprávným, jestliže odstraníme předpoklad $A - B \neq 0 \neq \neq B - A$. Platí totiž toto tvrzení:

Existují dvě počáteční množiny A a B a rodina F takové, že $A \cap B \to F \supseteq \supseteq A \Delta B$, ale $\mathscr{G}(A) \neq \mathscr{G}(B)$.

Abychom to dokázali, položme $\Gamma = \{a, b, c\}$, $\Phi = \{abc, acc, aac\}$, $A = \{b, c\}$, $B = \{b\}$. A a B jsou počáteční množiny a je zřejmé, že $S(c) = \{c\}$. Položme $F = S(c)$. Platí $b \to c$ a $A \cap B = \{b\}$, tedy $A \cap B \to F$. Také platí $A \Delta B = \{c\}$, tedy $A \Delta F \subseteq F$. Na druhé straně $\mathscr{G}(A) = \{b, c\}$, $\mathscr{G}(B) = \{a, b, c\}$, tedy $\mathscr{G}(A) \neq \neq \mathscr{G}(B)$.

V souvislosti s teorémem 2 je třeba ještě poznamenat, že platí také toto tvrzení:

Jsou-li A a B dvě počáteční množiny takové, že $A_1 = B_1$ a $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$, pak existuje rodina F taková, že $A \cup B \to F$ a $A \Delta B \subseteq F$.

Abychom to dokázali, poznamenejme především, že jestliže $A - B \neq 0 \neq B - A$, je vyslovený závěr znám (viz teorém 1). Mějme tedy $A \subseteq B$. Platí $A \cup A_1 = B \cup B_1$, tedy $B - A \subseteq A_1$, což lze vyjádřit jako $A \to B - A$. Avšak $A_1 = B_1$ a tedy $B \to B - A$ a tím spíše $B - A \to B - A$. Na základě tvrzení 4 existuje rodina F taková, že $B - A \subseteq F$. Na druhé straně platí $A \Delta B = B - A$, tedy $A \Delta B \subseteq F$. Jelikož na základě tvrzení 2 platí $A \cup B \to B - A$, lze odvodit relace obsažené ve výroku.

14. Nutné a postačující podmínky pro to, aby $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$, jestliže $A - B \neq 0 \neq B - A$

Teorém 3. *Mají-li dvě počáteční množiny A a B takové, že $A - B \neq 0 \neq B - A$, generovat tutéž* GK, *je zároveň nutná a postačující každá z těchto dvou podmínek:*

1. *Existuje rodina F taková, že*

$$A \cap B \to F \quad \text{a} \quad F \supseteq A \Delta B .$$

2. *Existuje rodina F taková, že*

$$A \cup B \to F \quad \text{a} \quad F \supseteq A \Delta B .$$

Důkaz. Teorém 3 vyplývá z tvrzení 1 a z teorémů 1 a 2.

Poznámka. Jsou-li počáteční množiny A a B neproduktivní, platí $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$ právě tehdy, když $A = B$. V tomto případě totiž $A = \mathscr{G}(A)$ a $B = \mathscr{G}(B)$.

Abychom uvedli příklad, uvažujme tuto interpretaci: Γ = slovník francouzštiny, Φ = množina správných francouzských vět, $A = S(\text{beau}) \cup \{\text{mince}\}$, $B = S(\text{beau}) \cup \{\text{maigre}\}$. Položme $F = S(\text{maigre})$. Platí $A \cap B = S(\text{beau})$, $A \Delta B = \{\text{mince, maigre}\}$, $A \cap B \to F$, $A \cup B = S(\text{beau}) \cup \{\text{maigre, mince}\}$, $A \cup B \to F$.

15. Postačující podmínky pro to, aby $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$

Teorém 4. *Buďte A a B dvě počáteční množiny takové, že $A - B \neq 0$. Jestliže $B \to A - B$, pak $\mathscr{G}(B) \supseteq \mathscr{G}(A)$ a $B_1 \supseteq A_1$.*

Důkaz. Platí $\mathscr{G}(B) = B \cup B_1$, $\mathscr{G}(A) = A \cup A_1$ a máme dokázat, že

$$A \cup A_1 \subseteq B \cup B_1 , \tag{13}$$

$$A_1 \subseteq B_1 . \tag{14}$$

Dokažme nejprve pravdivost druhé inkluze. Pro $x \in A_1$ platí $A \to x$, tedy na základě tvrzení 1 platí

$$A - B \to x . \tag{15}$$

Vzhledem k tranzitivnosti relace $\to$ a na základě toho, že z předpokladu vyplývá $B \to A - B$ a $A - B \neq 0$, lze z relace (15) odvodit, že

$$B \to x ,$$

tedy $x \in B_1$; tím je inkluze (14) dokázána.

Abychom dokázali inkluzi (13), stačí nyní dokázat, že

$$A \subseteq B \cup B_1 ; \tag{16}$$

pro $x \in A$ skutečně platí buď $x \in B$, tedy $x \in B \cup B_1$, nebo $x \in A - B$; na základě předpokladu, že platí relace $B \to A - B$, platí tedy $B \to x$, to jest $x \in B_1$, a dostaneme inkluzi (16).

Odstraníme-li hypotézu $A - B \neq 0$, teorém 4 neplatí, jak vyplývá z tohoto tvrzení:

Existují dvě počáteční množiny A a B takové, že $B \to A - B$, $\mathscr{G}(B) \subset \mathscr{G}(A)$ a $B_1 \subset A_1$.

Abychom to dokázali, mějme $\Gamma = \{a, b, c\}$, $\Phi = \{abc, acc, aac\}$, $A = \{b\}$, $B = \{b, c\}$. Je zřejmé, že A a B jsou počáteční množiny. Platí $A - B = 0$, tedy $B \to A - B$. Rovněž platí $\mathscr{G}(A) = \{a, b, c\}$ $\mathscr{G}(B) = \{b, c\}$, $A_1 = \{a, b, c\}$, $B_1 = \{c\}$; všechny podmínky výroku jsou tedy splněny.

16. Nutné podmínky pro $\mathscr{G}(A) \subseteq \mathscr{G}(B)$

Teorém 5. *Buďte A a B dvě počáteční množiny takové, že $A - B \neq 0$. Jestliže $\mathscr{G}(A) \subseteq \mathscr{G}(B)$, pak*

$$B \to A - B \tag{17}$$

a

$$A_1 \subseteq B_1 . \tag{18}$$

Důkaz. Na základě teorému 4 je inkluze (18) důsledkem inkluze (17); stačí tedy dokázat inkluzi (17). Z předpokladu vyplývá inkluze (13), tedy pro $x \in A - B$ platí $x \in B_1$; to znamená, že $B \to x$. Avšak x je libovolné slovo z $A - B$; platí tedy inkluze (17) a teorém 5 je dokázán.

Teorém 4 přestává platit, odstraníme-li předpoklad, že $A - B \neq 0$. Platí totiž toto tvrzení:

Existují dvě počáteční množiny A a B takové, že $\mathscr{G}(A) \subset \mathscr{G}(B)$, $B \to A - B$ a $A_1 - B_1 \neq 0$.

Abychom to dokázali, mějme $\Gamma = \{a, b\}$, $\Phi = \{ab\}$, $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$. A a B jsou počáteční množiny a platí $\mathcal{G}(A) = A$, $\mathcal{G}(B) = B$, $A - B = 0$. Tedy $B \to A - B$ a $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B)$. Na druhé straně platí $A_1 = \{a\}$, $B_1 = 0$, tedy $A_1 - B_1 = \{a\} \neq 0$ a tvrzení je dokázáno.

Teorémy 4 a 5 osvětluje tento příklad: $A = S(\text{beau}) \cup S(\text{mince})$, $B = S(\text{beau})$. A a B jsou počáteční množiny, $B \subset A$, $B \to A - B$ a $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B)$, neboť faux $\in \mathcal{G}(B) - \mathcal{G}(A)$.

17. Další charakterizace počátečních množin, které generují tutéž gramatickou kategorii

Teorém 6. *Buďte A a B dvě počáteční množiny takové, že $A - B \neq 0$. Aby platilo $\mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(B)$, je zároveň nutná a postačující každá z těchto dvou podmínek:*

$$1.\ B \to A - B$$

$$2.\ B \to A - B \quad \text{a} \quad A_1 \subseteq B_1 .$$

Důkaz. Je to bezprostřední důsledek teorémů 4 a 5.

Korolár 2. Buďte A a B dvě počáteční množiny takové, že $A - B \neq 0 \neq B - A$. Aby platilo $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B)$, je nutné a postačující, aby

$$A \cup B \to A \,\Delta\, B \quad \text{a} \quad A_1 = B_1 .$$

Důkaz. Buď $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B)$. Platí $\mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(B)$ a na základě toho, že z předpokladu vyplývá $A - B \neq 0$, lze odvodit, že podmínka 2 teorému 6 je splněna. Ale rovněž platí $\mathcal{G}(B) \subseteq \mathcal{G}(A)$; vzhledem k $B - A \neq 0$ z toho tedy vyplývá rovněž na základě teorému 6, že $A \to B - A$ a $B_1 \subseteq A_1$. Tedy

$$B \to A - B, \quad A \to B - A \quad \text{a} \quad A_1 = B_1 .$$

Z toho vyplývá, že $A \to A - B$ a $B \to B - A$. Na základě tvrzení 2 a 3 obdržíme $A \cup B \to A \,\Delta\, B$ a korolár 2 je dokázán.

Poznámky. Korolár 2 přestává platit, vypustíme-li z jeho výroku předpoklad $A - B \neq 0 \neq B - A$. Platí totiž toto tvrzení:

Existují dvě počáteční množiny A a B takové, že

$$\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B), \quad A \cup B \to A \,\Delta\, B \quad \text{a} \quad A_1 \neq B_1 .$$

Mějme totiž $\Gamma = \{a, b, c\}$, $\Phi = \{abc, acc\}$, $A = \{b, c\}$, $B = \{b\}$. A a B jsou počáteční množiny a $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B) = \{b, c\}$. Platí $A \cup B = \{b, c\}$, $A \,\Delta\, B = \{c\}$ a z $b \to c$ vyplývá, že $A \cup B \to A \,\Delta\, B$. Konečně platí také $A_1 = \{c\}$, $B_1 = \{b, c\}$, tedy $A_1 \neq B_1$.

Korolár 3. Mají-li dvě počáteční množiny A a B takové, že $A - B \neq 0 \neq B - A$, generovat tutéž gramatickou kategorii, je nutná a postačující podmínka, aby $A \cup B \to A \,\Delta\, B$.

Důkaz. Nutnost podmínky vyplývá z teorému 1 nebo z koroláru 2. Dostatečnost podmínky je důsledkem teorému 4, aplikovaného nejprve na množiny A a B, potom na množiny B a A.

Poznámka. Je zřejmé na základě dosavadních příkladů, že vypustíme-li podmínku $A - B \neq 0 \neq B - A$, relace $A \cup B \to A \,\Delta\, B$ není ani nutná, ani postačující, aby platilo $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B)$.

Teorémy 1, 2 a 3, tvrzení 18 a koroláry 2 a 3 vedou k tomuto závěru:

Buďte A a B dvě počáteční množiny takové, že $A - B \neq 0 \neq B - A$. Aby platilo $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B)$, je zároveň nutná a postačující každá z těchto podmínek:

α) $A \cup B \to A \,\Delta\, B$,
β) existuje rodina F taková, že $A \cup B \to F$ a $A \,\Delta\, B \subseteq F$,
γ) existuje rodina F taková, že $A \cap B \to F \supseteq A \,\Delta\, B$,
δ) $A \cup B \to A \,\Delta\, B$ a $A_1 = B_1$,
ε) existuje rodina F taková, že $A \cap B \to F \supseteq A \,\Delta\, B$ a $A_1 = B_1$,
ζ) $A_1 = B_1$ a existuje rodina F taková, že $A \cup B \to F \supseteq A \,\Delta\, B$.

18. Podmínky, aby platilo $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B)$, jestliže $A \subseteq B$

Tvrzení 19. Buďte A a B dvě počáteční množiny takové, že $A \subseteq B$. Má-li platit $\mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(B)$, je nutné a stačí, aby $(A_1 - B_1) \subseteq B$ (A_1(popř. B_1) označuje vždy nasycený produkt množiny A (popř. B)).

Důkaz. Z $A \subseteq B$ na základě tvrzení 1 vyplývá $B_1 \subseteq A_1$. Má-li platit $A \cup A_1 \subseteq B \cup B_1$, je tedy nutné, aby platilo $A_1 - B_1 \subseteq B$. Naopak z $A \subseteq B$ a z $A_1 - B_1 \subseteq B$ vyplývá $A \cup A_1 \subseteq B \cup B_1$.

Korolár 4. Buďte A a B dvě počáteční množiny takové, že $A \subseteq B$. Má-li platit $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B)$, je nutné a stačí, aby $A \to (B - A)$ a $A_1 - B_1 \subseteq B$.

Důkaz. Podmínky jsou nutné. Buďte $A \subseteq B$ a $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B)$. Z tvrzení 19 vyplývá, že $A_1 - B_1 \subseteq B$. Ale $A \cup A_1 = B \cup B_1$, tedy $B - A \subseteq A_1$, to jest $A \to B - A$; nutnost podmínky je tím dokázána.

Podmínky jsou postačující. Platí $A \subseteq B$, $A \to B - A$, $A_1 - B_1 \subseteq B$ a je třeba dokázat, že $A \cup A_1 = B \cup B_1$. Inkluze $A \cup A_1 \subseteq B \cup B_1$ vyplývá z předpokladů $A \subseteq B$ a $A_1 - B_1 \subseteq B$. Inkluze $B \cup B_1 \subseteq A \cup A_1$ vyplývá z těchto skutečností: 1. z předpokladu vyplývá, že $A \to B - A$, tedy $B - A \subseteq A_1$; 2. z předpokladu $A \subseteq B$ lze odvodit, že $B_1 \subseteq A_1$.

Tím je korolár 4 dokázán.

Abychom jej doložili příkladem, mějme Γ = slovník rumunštiny, Φ = množina správných rumunských frází, $A = S(\text{precoce})$, $B = A \cup S(\text{cumsecade})$. Platí

$$A_1 = B\,, \quad B_1 = S(\text{cumsecade})\,, \quad \mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = B\,,$$
$$A_1 - B_1 \subset B\,.$$

19. Ekvivalentní počáteční množiny. Relace ϱ_F

Říkáme, že mezi dvěma počátečními množinami je relace ϱ, generují-li tutéž GK. Je zřejmé, že ϱ je ekvivalence. Je-li mezi A a B relace ϱ, píšeme $A\varrho B$.

Říkáme, že mezi dvěma počátečními množinami A a B je relace ϱ_F, je-li F rodina a platí-li

$$(A \cap B) \to F \supseteq (A \,\Delta\, B)\,.$$

V tom případě píšeme $A\varrho_F B$.

Na základě teorému 2 z $A\varrho_F B$ vyplývá $A\varrho B$, kdykoli $A - B \neq 0 \neq B - A$; v tom případě je na základě teorému 3 ekvivalence mezi $A\varrho_F B$ a

$$(A \cup B) \to F \supseteq (A \,\Delta\, B)\,.$$

Těchto vlastností často využijeme v dalších výkladech.

Lemma 1. Uvažujme tři počáteční množiny A, B, C, z nichž žádná není v ostatních dvou obsažena. Jsou-li F_1 a F_2 dvě rodiny takové, že

$$A\varrho_{F_1}B \quad \text{a} \quad B\varrho_{F_2}C\,,$$

pak

$$A \cap C \to F_1 \cup F_2 \supseteq A \,\Delta\, C\,. \tag{19}$$

Důkaz. Z předpokladů lze na základě teorému 3 odvodit

$$A \cup B \to F_1 \supseteq A \,\Delta\, B\,,$$
$$B \cup C \to F_2 \supseteq B \,\Delta\, C\,.$$

Platí tedy

$$A - C \subseteq (A - B) \cup (B - C) \subseteq F_1 \cup F_2\,, \tag{20}$$
$$C - A \subseteq (C - B) \cup (B - A) \subseteq F_2 \cup F_1\,.$$

Z (20) lze odvodit, že

$$A \,\Delta\, C \subseteq F_1 \cup F_2\,. \tag{21}$$

Z $A\varrho_{F_1}C$ lze odvodit $A \to F_1$, z $B\varrho_{F_2}C$ lze odvodit $C \to F_2$; použitím tvrzení 1 a 3 tedy obdržíme

$$A \cap C \to F_1 \cup F_2\,. \tag{22}$$

Existence relací (21) a (22) je důkazem lemmatu 1.

V dalších výkladech vyjádříme podmínku (19) relací

$$A\varrho_{F_1 \cup F_2}C\,. \tag{23}$$

Poznámky. Podmínka (19) se liší od podmínky 1 teorému 3 jen tím, že místo rodiny F máme sjednocení dvou rodin F_1 a F_2. Na druhé straně lze z $A\varrho_{F_1}B$ odvodit $A\varrho B$ a z $B\varrho_{F_2}C$ $B\varrho C$; vzhledem k tranzitivnosti ϱ tedy platí $A\varrho C$ a použitím teorému 3 lze tedy na základě nerovnosti $A - C \neq 0 \neq C - A$ odvodit existenci rodiny F takové, že $A\varrho_F C$. To znamená, že předpoklady lemmatu 1 zahrnují nejen relaci (23), ale také rodinu F takovou, že $A\varrho_F C$. Je tedy přirozená otázka, jaká je relace mezi takto získanou rodinou F a rodinami F_1 a F_2. K tomu stanovíme

Lemma 2. Uvažujme tři počáteční množiny A, B, C, z nichž žádná není obsažena v ostatních dvou. Jestliže $A\varrho_{F_1}B$ a $B\varrho_{F_2}C$, nastává jedna z těchto dvou možností:

$$\text{I.}\ A\varrho_{F_1}C \ \text{a}\ A \,\Delta\, C \subseteq A \,\Delta\, B\,;$$
$$\text{II.}\ A\varrho_{F_2}C \ \text{a}\ A \,\Delta\, C \subseteq B \,\Delta\, C\,.$$

Důkaz. Na základě lemmatu 1 platí relace (19). Na základě předpokladů platí $A\varrho C$; pomocí teorému 3 lze odvodit existenci rodiny F takové, že

$$A \cup C \to F \quad \text{a} \quad A \,\Delta\, C \subseteq F\,. \tag{24}$$

Ale na základě předpokladů platí také (21); vzhledem k tomu, že dvě různé rodiny jsou vždy disjunktní, můžeme tedy z relací (24) a (21) odvodit, že $F = F_1$ nebo $F = F_2$. Jestliže $F = F_1$, můžeme z relací (24) a (20) a s použitím předpokladů odvodit, že $A - C \subseteq A - B$, $C - A \subseteq B - A$, tedy $A \,\Delta\, C \subseteq A \,\Delta\, B$; platí tedy možnost I.

Jestliže platí $F = F_2$, můžeme stejným způsobem odvodit, že $A - C \subseteq B - C$ a $C - A \subseteq C - B$, tedy $A \,\Delta\, C \subseteq B \,\Delta\, C$; platí tedy možnost II. Tím je lemma 2 dokázáno.

20. Symetričnost a tranzitivnost relace ϱ_F

Lemma 3. Buďte A, B, C tři počáteční množiny, z nichž žádná není obsažena v ostatních dvou. Jestliže $A\varrho_F B$, pak $B\varrho_F A$. Jestliže $A\varrho_F B$ a $B\varrho_F C$, pak $A\varrho_F C$.

Důkaz. Z $A\varrho_F B$ lze odvodit

$$A \cap B \to F \supseteq A \,\Delta\, B\,. \tag{25}$$

Avšak platí $A \cap B = B \cap A$ a $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$ a tedy

$$B \cap A \to F \supseteq B \,\Delta\, A\,;$$

to znamená, že $B\varrho_F A$.

Předpokládejme nyní relace $A\varrho_F B$ a $B\varrho_F C$. Pak platí relace (25) a

$$B \cap C \to F \supseteq B \Delta C\,. \tag{26}$$

Ale, jak víme, relaci (25) je možno psát jako

$$A \cup B \to F \supseteq A \Delta B \tag{27}$$

a relaci (26) je možno psát jako

$$B \cup C \to F \supseteq B \Delta C\,. \tag{28}$$

Z relací (27) a (28) lze na základě tvrzení 2 odvodit

$$A \cup C \to F\,. \tag{29}$$

Na druhé straně na základě relací (20) platí

$$A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$$

a tedy je možno vzhledem k relacím (27) a (28) odvodit, že

$$A \Delta C \subseteq F\,. \tag{30}$$

Z relací (29) a (30) lze odvodit relaci $A\varrho_F C$. Tím je lemma 3 dokázáno.

21. Rodiny přiřazené určitým třídám ekvivalentních počátečních množin

Teorém 7. *Buď $\mathscr{G}$ gramatická kategorie. Předpokládejme, že existuje třída K počátečních množin takových, že platí-li $A \in K$ a $B \in K$, pak $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = \mathscr{G}$ a $A - B \neq 0 \neq B - A$. Za těchto podmínek existuje rodina F_K, která je jednoznačně určena třídou K a má tu vlastnost, že jestliže $A \in K$ a $B \in K$ $(A \neq B)$, pak $A\varrho_{F_K} K$.*

Důkaz. Obsahuje-li třída K pouze dvě počáteční množiny, je teorém 7 na základě teorému 1 dokázán; předpokládejme tedy, že třída K obsahuje alespoň tři počáteční množiny. Uvažujme čtyři množiny $A \in K$, $B \in K$, $C \in K$, $D \in K$, z nichž aspoň tři jsou vždy po dvou navzájem odlišné. (Obsahuje-li K pouze tři počáteční množiny, budou dvě z nich identické.) Dokážeme existenci rodiny F takové, že $A\varrho_F B$ a $C\varrho_F D$.

Jsou dvě možnosti:

1. $C = D$. V tomto případě máme tři různé počáteční množiny A, B, C.

Na základě předpokladů a teorému 1 existují dvě rodiny F_1 a F_2 takové, že $A\varrho_{F_1} B$ a $B\varrho_{F_2} C$. Předpokládejme pro důkaz sporem, že $F_1 \neq F_2$. Na základě lemmatu 2 platí

$$A\varrho_{F_1} C \tag{31}$$

nebo

$$A\varrho_{F_2} C\,. \tag{32}$$

Platí-li (31), lze na základě lemmatu 3 odvodit $C\varrho_{F_1} A$ a opět na základě lemmatu 3 obdržíme $C\varrho_{F_1} B$ a tedy $B\varrho_{F_1} C$, což však odporuje relaci $B\varrho_{F_2} C$.

Platí-li (32), lze na základě lemmatu 3 odvodit $C\varrho_{F_2} A$ a opět na základě lemmatu 3 obdržíme $B\varrho_{F_2} A$ a tedy $A\varrho_{F_2} B$, což však odporuje relaci $A\varrho_{F_1} B$.

Platí tedy $F_1 = F_2$.

Předpokládejme, že $F = F_1 = F_2$. Pak platí $A\varrho_F B$ a $B\varrho_F C$. Avšak $A \Delta C \subseteq \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \subseteq F$ a $A \cup B \cup C \to F$, tedy $A \cup C \to F \supseteq A \Delta C$ a $A\varrho_F C$.

2. Množiny A, B, C a D jsou vždy po dvou navzájem odlišné. Na základě téže úvahy jako v případě 1 existuje rodina F taková, že $A\varrho_F B$, $B\varrho_F C$ a $A\varrho_F C$. Zbývá dokázat, že $D\varrho_F C$. V každém případě existuje na základě teorému 1 rodina F' taková, že $D\varrho_F C$. Vezmeme-li množiny A, C a D a provedeme tutéž úvahu jako v případě 1, dojdeme k rovnici $F' = F$. Podobně lze dokázat, že $D\varrho_F A$ a $D\varrho_F B$.

Tím je teorém 7 dokázán.

Poznámky. Teorém 7 ukazuje, že za určitých předpokladů rodina F není závislá na množinách A a B vybraných z určité třídy K ϱ-ekvivalentních počátečních množin, kterou nazveme K, ale pouze na této třídě K. Existuje-li tedy maximální třída K, jednoznačně určená příslušnou GK, má rodina F přiřazená na základě teorému 7 třídě K vnitřní lingvistický význam, úzce spjatý s uvažovanou GK.

22. Hlavní rodiny a několik konkrétních příkladů z přirozených jazyků

Takto jsme definovali zákon, který přiřazuje každé dvojici $(\mathscr{G}, K)$ (kde $\mathscr{G}$ a K mají stejný význam jako ve výroku teorému 7) jednoznačně určenou rodinu $F(\mathscr{G}, K)$, kterou označíme jako hlavní rodinu gramatické kategorie $\mathscr{G}$ a třídy K.

Pro objasnění pojmu hlavní rodina uvažujme tento příklad z francouzštiny (kterého jsme částečně již užili): Buďte $A = S(\text{beau}) \cup \{\text{mince}\}$, $B = S(\text{beau}) \cup \cup \{\text{maigre}\}$, $C = S(\text{beau}) \cup \{\text{triste}\}$. A, B a C jsou počáteční množiny a platí $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = \mathscr{G}(C)$, neboť slova mince, maigre a triste patří do téže rodiny, nad kterou dominuje rodina $S(\text{beau})$. Na druhé straně platí $A - B \neq 0 \neq B - A$, $B - C \neq 0 \neq C - B$, $A - C \neq 0 \neq C - A$; množiny A, B, C tedy tvoří třídu K toho typu, který je obsažen ve výroku teorému 7. Z $A \Delta B = \{\text{mince, maigre}\}$ bezprostředně vyplývá, že hlavní rodina přiřazená dvojici $(\mathscr{G}(A), K)$ je $S(\text{mince})$. Ověření je velmi snadné: platí $B \Delta C = \{\text{maigre, triste}\}$, $A \Delta C = \{\text{mince, triste}\}$, $A \cup B = S(\text{beau}) \cup \{\text{mince, maigre}\}$, $B \cup C = S(\text{beau}) \cup \{\text{maigre, triste}\}$, $A \cup C = = S(\text{beau}) \cup \{\text{mince, triste}\}$; pro $F = S(\text{mince})$ tedy obdržíme s přihlédnutím k tomu, že maigre $\in S(\text{mince})$, triste $\in S(\text{mince})$, $A \cup B \to F \supseteq A \Delta B$, $B \cup C \to \to F \supseteq B \Delta C$ a $A \cup C \to F \supseteq A \Delta C$.

23. Příklady na hlavní rodiny z rumunštiny

Uvažujme nyní příklad z rumunštiny. Buďte $A = S(\text{mic}) \cup \{\text{subtire}\}$, $B = S(\text{mic}) \cup \{\text{moale}\}$, $C = S(\text{mic}) \cup \{\text{verde}\}$. A, B a C jsou počáteční množiny takové, že žádná z nich není obsažena v ostatních dvou. Platí

$$\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B) = \mathcal{G}(C) = S(\text{mic}) \cup S(\text{subţire}) \cup S(\text{precoce}) \cup S(\text{maro}) .$$

Můžeme uvažovat posloupnost počátečních množin $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tohoto typu: každá množina A_n má tvar $S(\text{mic}) \cup \{\alpha_n\}$, kde $\alpha_n \in S(\text{subţire})$ a $\alpha_n \neq \alpha_m$ pro $n \neq m$. Množiny $A_1, A_2, A_3, \ldots$ tvoří třídu K toho typu, který je obsažen ve výroku teorému 7. Označíme-li $\mathcal{G}$ gramatickou kategorii generovanou každým A_n, přiřazujeme dvojici $(\mathcal{G}, K)$ hlavní rodinu $F(\mathcal{G}, K)$. Je zřejmé, že $F(\mathcal{G}, K) = S(\text{subţire})$. Tak lze konstatovat, že neexistuje třída K taková, že by platilo $F(\mathcal{G}, K) = S(\text{mic})$. $S(\text{mic})$ je totiž obsaženo v každé počáteční množině, která generuje $\mathcal{G}$, a tedy platí-li $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B) = \mathcal{G}$ a $A - B \neq 0 \neq B - A$, pak platí $S(\text{mic}) \subseteq A \cap B$, avšak $S(\text{mic})$ neobsahuje množinu $A \,\Delta\, B$.

Naproti tomu existuje třída K počátečních množin takových, že $F(\mathcal{G}, K) = S(\text{precoce})$. Skutečně můžeme třídu K definovat takto: $A \in K$, jestliže $A = S(\text{mic}) \cup S(\text{subţire}) \cup \{\alpha\}$, kde $\alpha \in S(\text{precoce})$ a pro $A_1 \in K$ a $A_2 \in K$ jsou příslušná slova α_1 a α_2 různá. Třída K splňuje všechny podmínky výroku teorému 7. Je však zřejmé, že pro $A \in K$ platí $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}$. Přiřazená hlavní rodina $F(\mathcal{G}, K)$ je $S(\text{precoce})$.

Konečně můžeme vytvořit třídu K takovou, že $F(\mathcal{G}, K) = S(\text{maro})$. Stačí klást $A \in K$ právě tehdy, když $A = S(\text{mic}) \cup S(\text{subţire}) \cup S(\text{precoce}) \cup \{\alpha\}$, kde $\alpha \in S(\text{maro})$, zatímco pro $A_1 \in K$ a $A_2 \in K$ jsou přiřazená slova α_1 a α_2 různá. Ověření těchto tvrzení přenecháváme čtenáři.

24. Obaly a indukované gramatické kategorie

Je-li dána libovolná množina $E \subseteq \Gamma$, existuje GK obsahující E? Odpověď na tuto otázku je kladná, neboť Γ je počáteční množina a tedy $E \subseteq \mathcal{G}(\Gamma)$. Ale existuje ještě silnější vlastnost: Každá nepočáteční množina je obsažena v nasyceném produktu některé počáteční množiny. Není-li totiž E počáteční množina, pak existuje alespoň jedno slovo $a \,\bar{\in}\, E$ takové, že $a \to E$. Položme $A = \{x; x \in \Gamma, x \to E\}$. A nazveme obalem množiny E. Je totožný s nasyceně produktivní množinou vzhledem k E. Na základě tvrzení 2 platí $A \to E$. Na druhé straně je A počáteční množina. V opačném případě by totiž existovalo slovo $y \,\bar{\in}\, A$ takové, že by platilo $y \to A$ a tedy by na základě tranzitivnosti relace $\to$ platilo také $y \to E$, což odporuje definici obalu A.

Jelikož A je počáteční množina, generuje gramatickou kategorii $\mathcal{G}(A)$ a platí $E \subseteq \mathcal{G}(A)$. Říkáme, že $\mathcal{G}(A)$ je gramatická kategorie indukovaná množinou E.

Tvrzení 20. Je-li E nepočáteční množina, obsažená v Γ, tvoří množiny produktivní vzhledem k E Booleovu algebru, jejíž maximální prvek je obal množiny E.

K důkazu tohoto tvrzení stačí užít tvrzení 1 a 2.

Tvrzení 21. Každý obal je sjednocením rodin.

K důkazu stačí užít tvrzení 5.

25. Obaly množin, které indukují tutéž gramatickou kategorii

Mají-li dvě nepočáteční množiny X a Y tentýž obal, indukují tutéž GK.

Je přirozené, že budeme klást i opačnou otázku: Jestliže X a Y indukují tutéž GK, vyplývá z toho, že mají tentýž obal? Odpověď bude záporná; oba obaly mohou být různé, ale je mezi nimi nutně vztah inkluze. Platí totiž

Teorém 8. *Je-li A obalem X a B obalem Y a platí-li $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B)$, pak $A \subseteq B$ nebo $B \subseteq A$.*

Důkaz. Platí

$$A \to B - A \to Y .$$
$$B \to A - B \to X .$$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $B - A \neq 0 \neq A - B$; v tom případě obdržíme na základě tranzitivnosti relace $\to$ v $2^\Gamma - \{0\}$

$$A \to Y , \tag{33}$$
$$B \to X . \tag{34}$$

Jelikož B je obalem Y, lze z relace (34) odvodit

$$A \subseteq B ; \tag{35}$$

jelikož A je obalem X, lze z relace (34) odvodit

$$B \subseteq A . \tag{36}$$

Z (35) a (36) vyplývá $A = B$, což odporuje předpokladu, že $B - A \neq 0 \neq A - B$; alespoň jeden z obou rozdílů je tedy prázdný. Platí $B \subseteq A$, jestliže $B - A = 0$, a platí $A \subseteq B$, jestliže $A - B = 0$. Tím je teorém 8 dokázán.

26. Několik příkladů na obaly z rumunštiny

Abychom osvětlili pojem obalu, budeme uvažovat tuto situaci v rumunštině. Mějme $X = S(\text{subţire})$, $Y = S(\text{vechi})$. Množiny X a Y nejsou počáteční, neboť mic $\to$

$\to Y$, mic $\to X$, mic $\bar{\in} X$ a mic $\bar{\in} Y$. Určeme obaly množin X a Y. Obal A množiny X je S(mic) $\cup$ S(subţire) $\cup$ S(frumoasă), neboť z dvanácti rodin rumunských nedeterminovaných adjektiv dominují nad rodinou S(subţire) pouze rodiny S(mic), S(frumoasă) a S(subţire). Obal B množiny Y obdržíme sjednocením rodin, které dominují nad množinou Y. Dostaneme B = S(mic) $\cup$ S(frumoşi) $\cup$ S(înalte) $\cup$ S(vechi) $\cup$ $\cup$ S(dibaci) $\cup$ S(subţiri) $\cup$ S(june), $\mathcal{G}(A)$ = S(mic) $\cup$ S(subţire) $\cup$ S(frumoasă) $\cup$ $\cup$ S(precoce) $\cup$ S(maro) ,$\mathcal{G}(B)$ = S(mic) $\cup$ S(frumoşi) $\cup$ S(înalte) $\cup$ S(vechi) $\cup$ $\cup$ S(dibaci) $\cup$ S(subţiri) $\cup$ S(june) $\cup$ S(maro).

$\mathcal{G}(A)$ je GK indukovaná množinou X, $\mathcal{G}(B)$ je GK indukovaná množinou Y.

27. Normální gramatická kategorie. Pokrytí. Topologická interpretace

Množinu slov nazveme normální, je-li sjednocením rodin. GK, která může být generována normální počáteční množinou, nazveme normální GK.

Buď A množina slov. Položme

$$\bar{A} = \bigcup_{x \in A} S(x) .$$

Množinu $\bar{A}$ nazveme pokrytím množiny A.

Je zřejmé, že je-li A počáteční množina, je $\bar{A}$ normální počáteční množina.

Poznámky. Pojem pokrytí množiny lze interpretovat topologicky. Pokrytí $\bar{A}$ množiny A je právě topologickým uzávěrem této množiny v topologii, v níž se otevřené množiny definují jako sjednocení rodin. Γ se tak stává neoddělitelným topologickým prostorem, kdykoli existuje alespoň jedna rodina, která obsahuje více než jeden prvek.

Takto získaná topologie má tuto zvláštnost: otevřenou množinou není jen konečný průnik, ale každý průnik otevřených množin. Taková topologie se nazývá totální topologie (viz [60], [61], [146]).

Abychom osvětlili pojem pokrytí, uvažujme tento příklad z francouzštiny: Buď A = {beau, mince}. Pak $\bar{A}$ = S(beau) $\cup$ S(mince).

28. Struktura pokrytí nasyceného produktu

Nechť je A počáteční množina. Označme $(\bar{A})_1$ nasycený produkt pokrytí množiny A a $\overline{(A_1)}$ pokrytí nasyceného produktu množiny A. Platí

Tvrzení 22. Je-li A počáteční množina slov, pak

$$(\bar{A})_1 = \overline{(A_1)} .$$

Důkaz. Provedeme jej postupně.

1. Dokažme, že $\overline{(A_1)} = A_1$. Pro každé počáteční A je totiž jeho nasycený produkt normální množina a normální množina je jasně totožná se svým vlastním pokrytím.

2. Dokažme, že $(\bar{A})_1 \subseteq \overline{(A_1)}$. Platí-li $x \in (\bar{A})_1$, pak skutečně $\bar{A} \to x$ a tedy na základě tvrzení 1 platí $A \to x$, což se rovná relaci $x \in A_1$; tedy $x \in \overline{(A_1)}$.

3. Dokažme, že $A_1 \subseteq (\bar{A})_1$. Z $x \in A_1$ lze skutečně odvodit, že $A \to x$. Na druhé straně pro $y \in \bar{A}$ existuje rodina F taková, že $F \cap A \neq 0$ a $y \in F$. Buď $z \in F \cap A$. Platí $z \to x$ a $y \to z$, z čehož lze na základě tranzitivnosti relace $\to$ odvodit $y \to x$; tedy $\bar{A} \to x$, což se rovná relaci $x \in (\bar{A})_1$.

Výsledky, k nimž jsme dospěli v bodech 1 – 3, vedou bezprostředně k tvrzení 22.

Poznámka. Na základě tvrzení 22 lze přijmout jediný zápis

$$\bar{A}_1 = (\bar{A})_1 = \overline{(A_1)} .$$

29. Struktura normálních gramatických kategorií

Lemma 4. Pro jakoukoli počáteční množinu A platí $\mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(\bar{A})$.

Důkaz. Zřejmě platí $A \subseteq \bar{A}$; zbývá tedy dokázat, že $A_1 \subseteq \bar{A} \cup \bar{A}_1$. Buď $x \in A_1$. Na základě tvrzení 22 lze $\bar{A}_1$ interpretovat jako $\overline{(A_1)}$ a tedy $A_1 \subseteq \overline{(A_1)} \subseteq$ $\subseteq \bar{A} \cup \bar{A}_1$. Tím je lemma 4 dokázáno.

Poznámka. V některých případech je inkluze, o níž se mluví v lemmatu 4, ostrá. Platí toto tvrzení:

Existuje počáteční množina A taková, že $\mathcal{G}(A) \neq \mathcal{G}(\bar{A})$.

$\bar{A}$ je totiž sjednocení rodin a tedy $\mathcal{G}(A)$ je normální GK. Na druhé straně je $\mathcal{G}(A)$ na základě níže uvedeného teorému 9 normální GK právě tehdy, když je $\mathcal{G}(A)$ normální množina. Stačí tedy zvolit množinu A takovou, aby $\mathcal{G}(A)$ nebyla normální množina. V tom případě $\mathcal{G}(A) \neq \mathcal{G}(\bar{A})$.

Konkrétní příklad z rumunštiny: Buď A = {frumos} $\cup$ {frumoasă}. A je počáteční množina, $\mathcal{G}(A)$ však není normální množina, neboť průnik $\mathcal{G}(A) \cap S$(frumos) obsahuje jediné slovo frumos. Tedy $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(\bar{A})$.

Teorém 9. *Gramatická kategorie $\mathcal{G}$ je normální právě tehdy, když je $\mathcal{G}$ normální množina. Jestliže $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}$, pak $\mathcal{G}(\bar{A}) = \mathcal{G}$.*

Důkaz. Buď $\mathcal{G}$ normální GK. Existuje tedy normální počáteční množina A taková, že $\mathcal{G} = A \cup A_1$. Množina A_1 je jako nasycený produkt množiny A normální. Sjednocení dvou normálních množin je rovněž normální množina a tedy $\mathcal{G}$ je normální množina.

Buď naopak $\mathcal{G}$ GK, která není normální množinou. Pro $x \in \mathcal{G}$ tedy platí $S(x) \subseteq \mathcal{G}$. Buď A počáteční množina taková, že $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}$. Platí $\mathcal{G} = A \cup A_1$.

Podaří-li se nám dokázat, že $A \cup A_1 = \bar{A} \cup \bar{A}_1$, dokážeme pravdivost teorému 9, neboť bude platit $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(\bar{A})$, což je zřejmě normální GK. Vzhledem k lemmatu 4 zbývá pouze dokázat inkluzi

$$\bar{A} \cup \bar{A}_1 \subseteq A \cup A_1 . \tag{37}$$

Z bodu 1 důkazu tvrzení 22 vyplývá, že $\overline{(A_1)} = A$; zbývá tedy dokázat, že $\bar{A} \subseteq A \cup A_1$. Buď $x \in \bar{A}$. Ze samotné definice pokrytí vyplývá, že existuje $y \in A$ takové, že $x \in S(y)$. Ale z předpokladu vyplývá, že $A \cup A_1$ je normální množina; obsahuje tedy spolu s y i rodinu $S(y)$. Z toho vyplývá, že $x \in A \cup A_1$ a inkluze (37) je dokázána.

Tím je dokázán i teorém 9.

30. Struktura některých tříd ekvivalentních počátečních množin

Tvrzení 23. Je-li A normální počáteční množina a je-li B počáteční množina ϱ-ekvivalentní s A, pak $B - B_1$ je normální množina a platí $B \varrho \bar{B}$.

Důkaz. B_1 je jako každý nasycený produkt normální množina. Protože A je rovněž normální množina, lze odvodit, že $\mathscr{G}(A)$ je normální GK. Jelikož $B \cup B_1 = A \cup A_1 = \mathscr{G}(A)$ a vzhledem k tomu, že rozdíl dvou normálních množin je rovněž normální množina, je $B - B_1$ normální množina. Na základě teorému 9 lze odvodit, že $B \varrho \bar{B}$.

Tvrzení 24. Je-li A počáteční rodina a je-li B počáteční množina ϱ-ekvivalentní s A, pak $A \subseteq B$.

Důkaz. Z toho, že A je rodina, lze odvodit, že $A \subseteq A_1$, tedy $\mathscr{G}(A) = A_1$. Z toho vyplývá, že $B \cup B_1 = A_1$, a tudíž $B \subseteq A_1$. Platí tedy $A \to B$. Protože však B je počáteční množina, nutně platí $A \subseteq B$.

Poznámka. Z tvrzení 24 lze odvodit, že ϱ-ekvivalenční třída obsahuje nanejvýš jednu rodinu.

Množinu A nazveme dědičně počáteční, jestliže kterákoli její neprázdná podmnožina je počáteční množinou; jinými slovy A je dědičně počáteční množina, je-li každá část této množiny obsahující jen jedno slovo počáteční množinou.

Příkladem dědičně počáteční množiny je tato množina francouzských slov: {je, lui, ne}.

Tvrzení 25. Je-li A dědičně počáteční množina a je-li B počáteční množina ϱ-ekvivalentní s A, pak $A \subseteq B$.

Důkaz. Na základě tvrzení 18 platí $A \cap B \to A \,\Delta\, B$; z toho lze na základě tvrzení 1 odvodit $A \cap B \to A - B$. Avšak $(A - B) \cap (A \cap B) = 0$; kdyby tedy existovalo $x \in A - B$, množina $\{x\}$ by nebyla počáteční. To odporuje předpokladu, že A je dědičně počáteční množina. Tedy $A - B = 0$ a tvrzení 25 je dokázáno.

Korolár 5. ϱ-ekvivalenční třída nemůže obsahovat dvě různé dědičně počáteční množiny.

Počáteční množinu A nazveme autoproduktivní, jestliže platí $A \subseteq A_1$.

Tvrzení 26. Počáteční množina A je autoproduktivní právě tehdy, když je A počáteční rodina.

Důkaz. Je-li A rodina, pak $A \to A$; A je tedy autoproduktivní. Jestliže $A \subseteq A_1$, pak na základě tvrzení 1 platí $A \to A$; jelikož A je počáteční množina, lze tedy odvodit, že A je rodina.

Z tvrzení 24 a 26 lze ihned odvodit

Tvrzení 27. Je-li množina A počáteční a autoproduktivní, neexistuje žádná počáteční množina B taková, že by platilo $B \varrho A$ a $A - B \neq 0$.

31. Operace na ekvivalentních počátečních množinách

Teorém 10. *Jsou-li A a B dvě počáteční množiny, pak $A \cup B$ je rovněž počáteční množina a*

$$\mathscr{G}(A \cup B) = [\mathscr{G}(A) \cap \mathscr{G}(B)] \cup [A \cup B] .$$

Důkaz. Označme druhý člen uvedené rovnice D. Buď $x \in \mathscr{G}(A \cup B)$. Jestliže $x \in A \cup B$, pak zřejmě $x \in D$. Jestliže $x \in (A \cup B)_1$, je možno na základě rovnice $(A \cup B)_1 = A_1 \cap B_1$ odvodit, že $x \in \mathscr{G}(A) \cap \mathscr{G}(B)$ a tedy $x \in D$. Z toho vyplývá, že $\mathscr{G}(A \cup B) \subseteq D$.

Mějme nyní $y \in D$. Jestliže $y \in A \cup B$, pak zřejmě $y \in \mathscr{G}(A \cup B)$. Jestliže $y \in \mathscr{G}(A) \cap \mathscr{G}(B)$, pak je třeba na základě rovnice

$$\mathscr{G}(A) \cap \mathscr{G}(B) = (A \cap B) \cup (A_1 \cap B) \cup (A \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_1)$$

rozlišovat tyto čtyři případy: 1) $y \in A \cap B$; v tom případě platí $y \in A \cup B$, tedy $y \in \mathscr{G}(A \cup B)$; 2) $y \in A_1 \cap B$; platí $y \in B$, tedy $y \in A \cup B$, a $y \in (A \cup B)$; 3) $y \in A \cap B_1$; platí $y \in A \cup B$, tedy $y \in \mathscr{G}(A \cup B)$; 4) $y \in A_1 \cap B_1$; na základě rovnice $A_1 \cap B_1 = (A \cup B)_1$ vyplývá, že $y \in (A \cup B)_1$ a tedy opět platí $y \in \mathscr{G}(A \cup B)$. Tak jsme dokázali, že $D \subseteq \mathscr{G}(A \cup B)$ a teorém 10 je dokázán.

Teorém 11. *Jsou-li A a B dvě počáteční ϱ-ekvivalentní množiny, pak* **1.** *$A \cup B$ je ϱ-ekvivalentní s A a s B;* 2. *$A \cap B$ je počáteční množina;* 3. $\mathscr{G}(A) \subseteq \mathscr{G}(A \cap B)$.

Důkaz. Předpokládáme-li v teorému 10 navíc, že $A \varrho B$, tedy že $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$, obdržíme na základě inkluzí $A \subseteq \mathscr{G}(A)$ a $B \subseteq \mathscr{G}(B)$ rovnici

$$\mathscr{G}(A \cup B) = [\mathscr{G}(A) \cap \mathscr{G}(A)] \cup (A \cup B) = \mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) ;$$

tím je dokázán bod 1.

Bod 2 dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje slovo $x \in A \cap B$ takové, že $x \to A \cap B$. Je možno připustit, že $A - B \neq 0 \neq B - A$, neboť v opačném případě by platilo $A \cap B = A$ nebo $A \cap B = B$ a bod 2 by byl zřejmý. Pak však existuje na základě teorému 1 rodina F taková, že $A \cap B \to F \supseteq A \Delta B$. Na základě korolláru 1 lze odvodit, že $A \cap B \neq 0$. Na základě tranzitivnosti relace $\to$ v $2^\Gamma - \{0\}$ lze odvodit, že $x \to F$. Užijeme-li tvrzení 6, je zřejmé, že $x \to A \Delta B$. Z této relace a z $x \to A \cap B$ je možno odvodit na základě tvrzení 3, že $x \to A \cup B$. Platí však $x \in A \cap B$ a tedy platí alespoň jedna z relací $x \in A$ a $x \in B$. Platí-li $x \in A$, vyplývá z toho, že A není počáteční množina; platí-li $x \in B$, vyplývá z toho, že B není počáteční množina. Oba tyto závěry odporují předpokladu, a proto je $A \cap B$ počáteční množina.

Abychom dokázali bod 3, poznamenejme především, že jediný zajímavý případ je ten, kdy $A - B \neq 0 \neq B - A$. Použijeme teorému 4. Platí $A - (A \cap B) \neq 0$ a na základě teorému 1 platí také $A \cap B \to A - (A \cap B)$. Z toho vyplývá, že jsou splněny všechny předpoklady teorému 4 a tedy platí $\mathscr{G}(A) \subseteq \mathscr{G}(A \cap B)$.

Poznámky. Jsou ještě dvě možnosti, jak dokázat bod 3 teorému 11. Především přímo tím, že dokážeme, že libovolné slovo z $\mathscr{G}(A)$ patří rovněž do $\mathscr{G}(A \cap B)$. Druhý způsob vychází jednak z toho, že v případě $A - B \neq 0 \neq B - A$ platí $(A \cap B) \cup (A \cap B)_1 = (A \cup B) \cup (A \cap B)_1$ (tato rovnost vyplývá z teorému 3), na druhé straně z toho, že pro $X \subseteq Y$ platí inkluze $Y_1 \subseteq X_1$. Na základě těchto poznámek a s přihlédnutím k bodu 1 teorému 11 obdržíme rovnost

$$\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(A \cup B) = (A \cup B) \cup (A \cup B)_1 \subseteq (A \cup B) \cup (A \cap B)_1 =$$
$$= (A \cap B) \cup (A \cap B)_1 = \mathscr{G}(A \cap B)\,.$$

Naskýtá se přirozeně otázka, zdali inkluze obsažená v bodu 3 teorému 11 může být také ostrá. Odpověď je kladná; platí totiž

Teorém 12. *Existují dvě počáteční ϱ-ekvivalentní množiny A a B takové, že* $\mathscr{G}(A \cap B) \neq \mathscr{G}(B)$.

Důkaz. Nechť $\Gamma = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\Phi = \{ebf, ecf, bef, eaf, edf, cef, efd, efb, efc\}$, $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$. Je zřejmé, že A a B jsou počáteční množiny; množina $\{a\}$ je totiž počáteční a platí $\{a\} \subseteq A \cap B$. Platí také $A_1 = \{b, c\}$, $B_1 = \{b, c\}$, tedy $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = \{a, b, c\}$. Na druhé straně $A \cap B = \{a\}$ a $\mathscr{G}(\{a\}) = \{a, b, c, d\}$, tedy $\mathscr{G}(A \cap B) \neq \mathscr{G}(B)$. Teorém 12 je dokázán.

Poznámka. Osvětlením teorému 12 je tento příklad z rumunštiny: Nechť $A = S(\text{frumos}) \cup \{\text{cumsecade}\}$, $B = S(\text{frumos}) \cup \{\text{maro}\}$. Množiny A a B jsou počáteční a platí $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = S(\text{frumos}) \cup S(\text{maro})$. Avšak $A \cap B = S(\text{frumos})$ a tedy $\mathscr{G}(A \cap B) \neq \mathscr{G}(A)$, neboť subțire $\in \mathscr{G}(A \cap B) - \mathscr{G}(A)$.

Úplnou indukcí obdržíme

Korolár 6. Jsou-li $A', A'', \ldots, A^{(n)}$ počáteční množiny vždy po dvou navzájem ϱ-ekvivalentní, pak

$$A = \bigcup_{p=1}^{n} A^{(p)} \quad \text{a} \quad B = \bigcap_{p=1}^{n} A^{(p)}$$

jsou počáteční množiny; A je ϱ-ekvivalentní s $A^{(p)}$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$.

Nyní obdržíme ihned

Korolár 7. Počáteční množiny, které generují tutéž gramatickou kategorii, tvoří pologrupu vzhledem k operaci sjednocení.

32. Gramatická kategorie generovaná gramatickou kategorií

A nazveme minimální (resp. maximální) počáteční množinou vzhledem ke GK $\mathscr{G}$, jestliže pro každou počáteční množinu B takovou, že $\mathscr{G} = \mathscr{G}(B)$, platí $A \subseteq B$ (resp. $B \subseteq A$). Počáteční množinu, která je minimální nebo maximální vzhledem ke GK $\mathscr{G}$, nazveme extrémní počáteční množinou vzhledem ke $\mathscr{G}$.

Z $A \subseteq \mathscr{G}(A)$ lze odvodit, že každá GK je počáteční množina, tedy sama generuje GK, kterou označíme $\mathscr{G}(\mathscr{G}(A))$. Platí

Teorém 13. $\mathscr{G}(\mathscr{G}(A)) = \mathscr{G}(A)$.

Důkaz. Je třeba dokázat, že

$$A \cup A_1 = (A \cup A_1) \cup (A \cup A_1)_1\,, \tag{38}$$

což je v podstatě inkluze $(A \cup A_1)_1 \subseteq A \cup A_1$. Nechť $x \in (A \cup A_1)_1$. Pak platí $A \cup A_1 \to x$ a na základě tvrzení 1 platí $A \to x$; to znamená, že $x \in A_1$. Tím je dokázána inkluze (38) a v důsledku toho i teorém 13.

Korolár 8. Je-li A počáteční množina, je $\mathscr{G}(A)$ maximální počáteční množina vzhledem ke $\mathscr{G}(A)$.

33. Involuční množiny

Počáteční množinu A nazveme involuční, platí-li $A_1 \subseteq A$.

Tvrzení 28. Je-li A involuční množina a platí-li $B \varrho A$ $(B \neq A)$, pak platí $B \subseteq A$ a B není involuční množina.

Důkaz. Z $A_1 \subseteq A$ a $B \varrho A$ lze odvodit, že $A = B \cup B_1$, a tedy $B \subseteq A$. Kdyby platilo $B_1 \subseteq B$, platilo by také $A = B$, což by odporovalo předpokladu; množina B tedy není involuční.

Poznámka. Je zřejmé, že počáteční množina A je involuční právě tehdy, když $A = \mathcal{G}(A)$. Pojem involuční počáteční množiny je tedy totožný s pojmem gramatické kategorie. (Viz k tomu teorém 13.)

Teorém 14. *Sjednocení dvou involučních počátečních množin A a B je rovněž involuční množina.*

Důkaz. Na základě tvrzení 9 je $A \cup B$ počáteční množina. Platí $(A \cup B)_1 = A_1 \cap B_1$. Z předpokladu však vyplývá, že $A_1 \subseteq A$ a $B_1 \subseteq B$, tedy $A_1 \cap B_1 \subseteq A \cap B$ a $(A \cup B)_1 \subseteq A \cap B$. Z $A \cap B \subseteq A \cup B$ pak vyplývá, že $(A \cup B)_1 \subseteq A \cup B$ a teorém 14 je dokázán.

Poznámka. Na základě poznámky k tvrzení 28 je možno teorém 14 vyjádřit také takto:

Teorém 14'. *Sjednocení dvou gramatických kategorií je rovněž gramatická kategorie.*

Při operaci průniku zaniká vlastnost být GK, ale tato operace má zajímavý lingvistický význam ve spojitosti s morfologickou homonymií. Viz k tomu kap. 10.

34. Klasifikace gramatických kategorií

Nyní je možno roztřídit GK takto: Především existují dvě velké třídy GK: produktivní a neproduktivní. GK se nazývá produktivní, může-li být generována produktivní počáteční množinou, tj. počáteční množinou, jejíž nasycený produkt není prázdný. V opačném případě je GK neproduktivní. Případ neproduktivních GK osvětluje

Tvrzení 29. Je-li $\mathcal{G}$ neproduktivní GK a je-li A počáteční množina taková, že $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A)$, pak $A = \mathcal{G}$.

Důkaz. Z předpokladu vyplývá, že $A \cup A_1 = \mathcal{G}$. Kdyby platilo $A \subset \mathcal{G}$, pak by A_1 nebyla prázdná množina a tedy množina A by byla produktivní; to by však odporovalo předpokladu, že $\mathcal{G}$ je neproduktivní.

Dohodněme se, že počáteční množinu, která generuje GK, budeme nazývat generátorem této GK. Tvrzení 29 tedy říká, že každá neproduktivní GK je GK s jediným generátorem.

Produktivní GK se dělí na dvě třídy: především existují GK generované jedinou počáteční množinou, za druhé pak GK generované alespoň dvěma počátečními množinami. GK generované jedinou počáteční množinou jsou produktivní GK s jediným generátorem, zatímco GK generované alespoň dvěma počátečními množinami jsou produktivní GK s několika generátory.

GK je možno také třídit na normální a nenormální. Zvláštním důležitým případem normálních GK jsou elementární GK. Jiným důležitým případem normálních GK jsou gramatické kategorie generované obaly.

Výše provedené třídění lze znázornit tímto schématem:

- Gramatické kategorie
  - neproduktivní (s jediným generátorem)
  - produktivní
    - s jediným generátorem (který je totožný s příslušnou GK)
    - s několika generátory

- Gramatické kategorie
  - normální
    - elementární
    - neelementární
  - nenormální

Je třeba poznamenat, že na základě teorému 14' je každé sjednocení elementárních normálních GK normální (neelementární) GK. Neelementární normální GK se přirozeně uplatňují při formálním popisu tradičních morfologických kategorií. Příklad byl podán v kapitole 9.

Třídění GK na normální a nenormální je nezávislé na třídění GK na produktivní a neproduktivní. Jsou možné tyto typy GK: 1. normální a neproduktivní; 2. nenormální a neproduktivní; 3. normální s jediným produktivním generátorem ($= \mathcal{G}$); 4. nenormální s jediným produktivním generátorem ($= \mathcal{G}$); 5. normální s produktivním generátorem $\neq \mathcal{G}$; 6. nenormální s produktivním generátorem $\neq \mathcal{G}$.

35. Logická možnost různých typů gramatických kategorií

Teorém 15. *Existuje produktivní gramatická kategorie, která je normální a má jediný generátor.*

Důkaz. Buď $\Gamma = \{a, b, c\}$, $\Phi = \{abc, acc, aac\}$, $A = \{a, b\}$. A je počáteční množina a platí $A_1 = \{a\}$, tedy $\mathcal{G}(A) = \{a, b\}$. Platí také $S(a) = \{a\}$, $S(b) = \{b\}$; $\mathcal{G}(A)$ je tedy normální GK. Na základě $A_1 \neq 0$ je možno odvodit, že $\mathcal{G}(A)$ je produktivní GK. Existuje jediná počáteční množina, která je vlastní podmnožinou $\mathcal{G}(A)$; je to množina $\{b\}$. Platí však $\mathcal{G}(\{b\}) = \{a, b, c\}$, tedy $\mathcal{G}(\{b\}) \neq \mathcal{G}(A)$. Z toho vyplývá, že GK $\mathcal{G}(A)$ nepřipouští jiný generátor než A. Tím je teorém 15 dokázán.

Teorém 16. *Existuje produktivní gramatická kategorie, která je normální a má alespoň dva generátory.*

Důkaz. Buď $\Gamma = \{a, b, c\}$, $\Phi = \{abc, acc, aac\}$, $A = \{b\}$. A je počáteční množina a platí $\mathcal{G}(A) = \Gamma$. Rovněž však platí $\mathcal{G}(\Gamma) = \mathcal{G}(A)$; $\mathcal{G}(A)$ tedy připouští více než jeden generátor.

Na druhé straně je $\mathcal{G}(A)$ produktivní, protože je A produktivní; protože Γ je normální množina, je tedy $\mathcal{G}(A)$ normální GK. Tím je teorém 16 dokázán.

Teorém 17. *Existuje normální gramatická kategorie, která je neproduktivní.*

Důkaz. Buď $\Gamma = \{a, b, c\}$, $\Phi = \{abc, aca, aac\}$, $A = \{a, c\}$. A je počáteční množina a platí $A = S(a) \cup S(c)$; A je tedy normální množina, z čehož vyplývá, že $\mathscr{G}(A)$ je normální GK. Vzhledem k $A_1 = 0$ dostaneme $\mathscr{G}(A) = \{a, c\}$. Jediné počáteční množiny obsažené v $\mathscr{G}(A)$ jsou A a $\{c\}$. Množina A však není produktivní, zatímco $\mathscr{G}(\{c\}) = \{c\} \neq \mathscr{G}(A)$; neexistuje tedy žádná produktivní počáteční množina B taková, že by platilo $\mathscr{G}(B) = \mathscr{G}(A)$. Z toho vyplývá, že $\mathscr{G}(A)$ je neproduktivní, a teorém 17 je dokázán.

Teorém 18. *Existuje nenormální gramatická kategorie, která je produktivní a má jediný generátor.*

Důkaz. Buď $\Gamma = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $\Phi = \{ag, bg, hd, he, cg, hc, fg, hf, cc\}$, $A = \{a, c, d\}$. Je zřejmé, že A je počáteční množina a že $S(a) = \{a, b\}$, $S(d) = \{d, e\}$, $S(c) = \{c\}$; A tedy není normální počáteční množina. Na druhé straně $A_1 = \{c\}$, tedy A je produktivní a $\mathscr{G}(A) = A$. Z toho vyplývá, že A je produktivní GK, a na základě teorému 9 není tato GK normální.

Nyní dokážeme, že množina A je jediný generátor gramatické kategorie $\mathscr{G}(A)$. Jediná počáteční množina, která je vlastní podmnožinou $\mathscr{G}(A)$, je totiž $\{a, d\}$; platí však $\mathscr{G}(\{a, d\}) = \{a, c, d, f\}$ a tedy $\mathscr{G}(\{a, d\}) \neq \mathscr{G}(A)$. Tím je teorém 18 dokázán.

Teorém 19. *Existuje nenormální gramatická kategorie, která je produktivní a má alespoň dva generátory.*

Důkaz. Buď $\Gamma = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m\}$, $\Phi = \{gaf, gbf, hck, hdk, gef, hek, elm\}$, $A = \{a, c, e\}$. Je zřejmé, že A je počáteční množina a že $A_1 = \{e\}$; množina A je tedy produktivní. Z toho vyplývá, že $\mathscr{G}(A)$ je produktivní GK a platí $\mathscr{G}(A) = \{a, c, e\}$. Na druhé straně $\mathscr{G}(A)$ není normální množina, neboť $S(a) = \{a, b\}$ a $b \,\bar{\in}\, \mathscr{G}(A)$. Z toho lze odvodit na základě teorému 9, že $\mathscr{G}(A)$ není normální GK.

Poznamenejme konečně, že množina $B = \{a, c\}$ je počáteční a že $B_1 = \{e\}$; tedy $\mathscr{G}(B) = \mathscr{G}(A)$. Z toho vyplývá, že $\mathscr{G}(A)$ připouští jiný generátor než A. Tím je teorém 19 zcela dokázán.

Teorém 20. *Existuje nenormální gramatická kategorie, která je neproduktivní.*

Důkaz. Buď $\Gamma = \{a, b, c, d, e\}$, $\Phi = \{abc, adc, ebc, edc\}$, $A = \{a, b, c\}$. Je zřejmé, že A je neproduktivní počáteční množina. Platí $\mathscr{G}(A) = A$; $\mathscr{G}(A)$ není normální množina, neboť $S(a) = \{a, e\}$. Na základě teorému 9 lze odvodit, že $\mathscr{G}(A)$ je nenormální GK.

Na druhé straně jediné počáteční množiny obsažené v $\mathscr{G}(A)$ jsou $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ a $\{a, c\}$. Lze konstatovat, že $\mathscr{G}(\{c\}) \neq \mathscr{G}(A)$, $\mathscr{G}(\{a, b\}) \neq \mathscr{G}(A)$, $\mathscr{G}(\{b, c\}) \neq \mathscr{G}(A)$ a $\mathscr{G}(\{a, c\}) \neq \mathscr{G}(A)$. Z toho vyplývá, že neexistuje produktivní počáteční množina B taková, že by platilo $\mathscr{G}(B) = \mathscr{G}(A)$; $\mathscr{G}(A)$ je tedy neproduktivní GK. Tím je teorém 20 dokázán.

36. Příklady na různé typy gramatických kategorií

Nechť Γ = slovník francouzštiny, Φ = množina správně tvořených francouzských frází.

Uvažujme nejprve zájmeno je. Množina {je} je počáteční rodina a platí $\mathscr{G}$({je}) = {je}. Tato GK je produktivní, normální a připouští jediný generátor.

Rodina S(beau) je počáteční. GK $\mathscr{G}$(S(beau)) je normální, produktivní (platí S(beau) $\rightarrow$ S(beau)) a připouští jiný generátor než S(beau), totiž $\mathscr{G}$(S(beau)).

Množina A = S(maison) $\cup$ (chantais) je počáteční, normální a neproduktivní. $\mathscr{G}(A)$ je normální, ale není produktivní, neboť $\mathscr{G}(A) = A$ a A je jediný generátor $\mathscr{G}(A)$.

Množina B = {maison, chantais} je počáteční, nenormální a neproduktivní, neboť $\mathscr{G}(B)$ = B; $\mathscr{G}(B)$ je neproduktivní GK, neboť B je její jediný generátor. B však není normální množina a proto není $\mathscr{G}(B)$ normální GK.

Mějme nyní Γ = slovník rumunštiny, Φ = množina správně tvořených rumunských frází. Uvažujme množinu A = {frumoşi} $\cup$ S(subtire) $\cup$ S(maro). Platí $A \rightarrow S$(maro) a množina A je tedy produktivní; z toho vyplývá, že $\mathscr{G}(A)$ je produktivní a platí $\mathscr{G}(A) = A$. Množina $\mathscr{G}(A)$ tedy není normální. Z toho lze odvodit na základě teorému 9, že $\mathscr{G}(A)$ není normální GK. Konečně je možno poznamenat, že $\mathscr{G}(A)$ připouští dva generátory jiné než A; například množina {frumoşi} $\cup$ S(subţire) je generátorem gramatické kategorie $\mathscr{G}(A)$, neboť platí frumoşi $\rightarrow$ maro a S(subţire) $\rightarrow$ maro.

37. Gramatické quasikategorie

R. L. Dobrušin zavedl v článku [39] toto zobecnění pojmu počáteční rodina (naše terminologie je jiná než v citovaném článku): Rodina F je quasipočáteční, nastává-li jeden z těchto dvou případů:

1. F je počáteční rodina; 2. existuje vyznačená fráze tvaru f_1xf_2 taková, že $x \in F$ a že pro každou rodinu F^* mající vlastnost $F^* \rightarrow F$ $(F^* \cap F = 0)$ a pro každé $y \in F^*$ fráze f_1yf_2 není vyznačená.

Každá počáteční rodina je rovněž quasipočáteční, ale ne naopak.

Buď F quasipočáteční rodina. Položme jako obvykle $F_1 = \{u; v \rightarrow u$ pro jakékoli $v \in F\}$. Množinu $F \cup F_1$ nazveme elementární gramatickou quasikategorií generovanou rodinou F (zkráceně EGQK generovanou rodinou F).

Jako příklad quasipočáteční rodiny, která není počáteční, se v článku [39] uvádí rodina F ruských slov это a то. Označíme-li S rodinu slov красное, зеленое, широкое, ..., můžeme konstatovat, že $S \rightarrow F$ a že S je jediná rodina, která dominuje nad F. Mějme nyní vyznačenou frázi это шел человек. Nahradíme-li slovo это jakýmkoli slovem z S – například slovem красное – obdržíme frázi красное шел человек, která již není vyznačená, neboť adjektivum красное nemůže stát v tomto kontextu vedle slovesa шел. Z toho lze odvodit, že F je quasipočáteční rodina, která však není počáteční; rodina F tedy generuje elementární gramatickou quasikategorii, která není EGK.

Zobecněním uvedeného příkladu obdržíme

Teorém 21. *Nechť F^* a F jsou dvě různé rodiny takové, že $F^* \to F$. Je-li F^* jediná rodina, která dominuje nad F, pak je F quasipočáteční rodina.*

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že rodina F není quasipočáteční. Pak pro každou vyznačenou frázi $f = f_1 x f_2$, kde $x \in F$, existuje rodina F_f taková, že pro $y \in F_f$ je fráze $f_1 y f_2$ rovněž vyznačená. Protože však F^* je jediná rodina, která dominuje nad F, lze odvodit, že $F_f = F^*$ pro jakoukoli vyznačenou frázi f, která obsahuje slovo $x \in F$. Z toho vyplývá, že $F \to F^*$. Z předpokladu však vyplývá, že $F^* \to F$; platí tedy $F = F^*$, což je v rozporu se skutečností, že F a F^* jsou navzájem různé. Z toho vyplývá, že rodina F je quasipočáteční.

38. Quasipočáteční množiny a gramatické quasikategorie. Poznatky C. V. Crăciuna

Množina $A \subset \Gamma$ je quasipočáteční, je-li počáteční nebo existuje-li pro každé $x \in A$ kontext (f_1, f_2) takový, že $f_1 x f_2$ je vyznačená fráze, ale pro $y \,\bar{\in}\, A$ takové, že platí $y \to A$, fráze $f_1 y f_2$ vyznačená není. Buď A quasipočáteční množina a A_1 její nasycený produkt. Sjednocení $A \cup A_1$ nazveme gramatickou quasikategorií (GQK); je to GQK generovaná množinou A. V práci [31] se ukazuje, že sjednocení dvou quasipočátečních množin je rovněž quasipočáteční množina a že každá GQK je quasipočáteční množina. Podrobný výzkum GQK byl proveden v práci [31].

Označme P třídu počátečních množin, Q třídu quasipočátečních množin, které nejsou počáteční, R třídu quasipočátečních množin. Platí tedy $R = P \cup Q$ a $P \cap Q = 0$. Některé závěry, k nimž se dochází v práci [31], jsou tyto:

a) Jestliže $A \,\bar{\in}\, Q$ a $B \,\bar{\in}\, Q$, pak $A \cup B \,\bar{\in}\, Q$;

b) Jestliže $A \in Q$ a $B \in Q$, pak $A \cup B \in Q$;

c) Jestliže $A \in R$ a $B \supset A$, pak $B \in R$.

Označme $\mathscr{F}_1$ rodinu EGK, $\mathscr{F}_2$ rodinu GK, $\mathscr{F}_3$ rodinu EGQK, $\mathscr{F}_4$ rodinu GQK. Platí $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}_4$, $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_3 \subset \mathscr{F}_4$.

39. Gramatické kategorie tvořené frázemi. Jazyky s konečným počtem stavů

Relace dominace může být definována nejen mezi dvěma slovy nebo dvěma množinami slov, ale také mezi dvěma frázemi, resp. dvěma množinami frází. Jsou-li f a g dvě fráze a označíme-li množinu vyznačených frází Φ, říkáme, že f dominuje nad

g a píšeme $f \to g$, jestliže pro jakékoli dvě fráze u a v vyplývá z relace $ufv \in \Phi$ relace $ugv \in \Phi$. Jsou-li A a B dvě množiny frází, říkáme, že A dominuje nad B a píšeme $A \to B$, jestliže pro každé $x \in A$ a každé $y \in B$ platí $x \to y$.

Je zřejmé, že je-li dána fráze x, množina $F(x)$ frází y takových, že platí $x \to y$ a $y \to x$, je totožná s tím, co jsme v I. oddílu nazvali distribuční třídou fráze x v širším slova smyslu. Jestliže mimoto neexistuje žádná fráze z taková, že by platilo $z \,\bar{\in}\, F(x)$ a $z \to F(x)$, říkáme, že $F(x)$ je počáteční distribuční třída v širším slova smyslu.

Je-li distribučních tříd v širším slova smyslu konečný počet, říkáme, že Φ je jazyk s konečným počtem stavů. Takové jazyky jsou podrobně zkoumány v pracích [5], [30], [29], [33], [81], [99], [123]. V podstatě jde o jazyky, které mohou být generovány pomocí konečného automatu.

Nechť je A počáteční množina frází. Neexistuje tedy žádná fráze $x \,\bar{\in}\, A$ taková, že by platilo $x \to A$. Gramatická kategorie generovaná množinou A je sjednocení množiny A s množinou frází y takových, že $A \to y$. Většina vlastností, které jsme zjistili u GK, jejichž prvky jsou slova, mají také GK, jejichž prvky jsou fráze. Kdykoli je A počáteční distribuční třída v širším slova smyslu, je GK generovaná množinou frází A elementární gramatická kategorie (EGK) generovaná množinou frází A. V jazyce s konečným počtem stavů je počet EGK tvořených frázemi rovněž konečný. Existuje-li naopak pouze konečný počet EGK tvořených frázemi, existuje pouze konečný počet počátečních distribučních tříd v širším slova smyslu (neboť dvě různé třídy generují různé EGK).

40. Gramatická kategorie a kontextový uzávěr

Uvažujme počáteční množinu frází, kterou označíme A. Označme $\mathscr{G}(A)$ GK generovanou množinou A a A_φ kontextový uzávěr této množiny (viz 43. kapitolu I. oddílu).

Teorém 22. *Platí $\mathscr{G}(A) = A_\varphi$.*

Důkaz. Buď $x \in \mathscr{G}(A) - A$. Pro každé $y \in A$ tedy platí $y \to x$. Z toho vyplývá, že pro jakýkoli kontext $\{u, v\} \in \mathscr{C}(A)$ platí $uxv \in \Phi$ (viz 43. kapitolu I. oddílu). Z toho vyplývá, $x \in A_\varphi$. Jestliže naopak $x \in A$, pak platí opět $x \in A_\varphi$, neboť každá množina je obsažena ve svém kontextovém uzávěru.

Mějme nyní $x \in A_\varphi$. Pro každé $\{u, v\} \in \mathscr{C}(A)$ tedy platí $uxv \in \Phi$. Relace $\{u, v\} \in \mathscr{C}(A)$ je však ekvivalentní s relací $uyv \in \Phi$ pro každé $y \in A$. Platí-li tedy $uyv \in \Phi$ pro každé $y \in A$, platí $uxv \in \Phi$. Z toho lze odvodit, že $A \to x$, tedy $x \in \mathscr{G}(A)$.

Poznámky. Teorém 22 vede k dalším poznatkům o GK, použijeme-li výsledků zkoumání kontextového uzávěru (například teorému 5 ze 43. kapitoly I. oddílu). Použijeme-li naopak výsledků zkoumání GK, obdržíme řadu poznatků o kontextovém uzávěru. Jako jediný příklad uveďme důsledek teorémů 13 a 22, jímž je

Korolár 9. Pro každou počáteční množinu frází A platí $(A_\varphi)_\varphi = A_\varphi$ (to znamená, že kontextový uzávěr kontextového uzávěru počáteční množiny A je totožný s kontextovým uzávěrem množiny A).

Článek [137] od A. Sestiera, v němž byl zaveden pojem kontextového uzávěru pro zvláštní případ množin slov, dává mnoho podnětů pro zkoumání GK.

41. Podněty pro další rozšíření pojmu gramatické kategorie

V článku [130] pojednává I. I. Revzin o některých zvláštnostech paradigmat ruského slovesa; aby mohl konstatovat určité rozdíly mezi ruštinou a polštinou na jedné straně a mezi nominálními a verbálními paradigmaty na straně druhé, pokouší se o rozšíření pojmu EGK. Uvažujme například tvary читает a читал. Žádný z těchto dvou tvarů nedominuje nad druhým; například fráze я читал je vyznačená, fráze я читает vyznačená není; podobně je vyznačená fráze она читает, není vyznačená fráze она читал. Označme Δ_1 množinu frází, které neobsahují zájmena я a ты; je zřejmé, že nahradíme-li slovo читал v jakékoli frázi z Δ_1, která je obsahuje, slovem читает, dostaneme frázi, která patří rovněž do Δ_1. Označíme-li Δ_2 množinu frází, které neobsahují podmět ženského nebo středního rodu, můžeme konstatovat, že nahradíme-li slovo читает v jakékoli frázi z Δ_2, která je obsahuje, slovem читал, dostaneme frázi, která patří rovněž do Δ_2. Tak můžeme zkoumat relaci dominace jen vzhledem k části množiny vyznačených frází Φ. Takovéto zrelativnění pojmu dominace vede k odpovídajícímu zrelativnění pojmu GK. Výše uvedené příklady však zachycují jinou situaci, kterou je třeba studovat: které jsou části $\Delta \subset \Phi$ takové, že z dominace $x \to y$ vyplývá tatáž dominace vzhledem k Δ? V následujících kapitolách vyslovíme tyto problémy přesněji a pokusíme se o jejich řešení.

42. Dominované prodloužení, dominující prodloužení a distribuční prodloužení

Je-li dána množina frází Δ, označíme $D(\Delta)$ množinu všech frází x takových, že existují fráze $y \in \Delta$, pro které platí $y \to x$. Označme $D_1(\Delta)$ množinu všech frází z takových, že existují fráze $u \in \Delta$, pro které platí $z \to u$. Říkáme, že $D(\Delta)$ je dominované prodloužení množiny Δ, zatímco $D_1(\Delta)$ je její dominující prodloužení. Je zřejmé, že platí

Tvrzení 30. Platí tyto relace:

$$D(\Delta_1) \cup D(\Delta_2) = D(\Delta_1 \cup \Delta_2)\,, \quad D_1(\Delta_1) \cup D_1(\Delta_2) = D_1(\Delta_1 \cup \Delta_2)\,,$$
$$D(\Delta_1) \cap D(\Delta_2) = D(\Delta_1 \cap \Delta_2)\,, \quad D_1(\Delta_1) \cap D_1(\Delta_2) = D_1(\Delta_1 \cap \Delta_2)\,,$$
$$D(D(\Delta)) = D(\Delta) \supseteq \Delta\,, \quad D_1(D_1(\Delta)) = D_1(\Delta) \supseteq \Delta\,.$$

Všechny tyto relace vlastně bezprostředně vyplývají z tranzitivnosti a reflexívnosti relace dominace.

Označme AB součin množin frází A a B, tj. množinu frází $z = xy$, kde $x \in A$ a $y \in B$. Pak platí

Tvrzení 31. Platí tyto rovnosti:

$$D(\Delta_1\Delta_2) = D(\Delta_1)\,D(\Delta_2) \quad \text{a} \quad D_1(\Delta_1\Delta_2) = D_1(\Delta_1)\,D_1(\Delta_2)\,.$$

Tyto relace bezprostředně vyplývají z definic.

Množinu Δ nazýváme D-invariantní, jestliže $\Delta = D(\Delta)$, a D_1-invariantní, jestliže $\Delta = D_1(\Delta)$.

Zaveďme také množinu $S(\Delta)$ vytvořenou z frází x takových, že existují fráze $y \in \Delta$ mající tyto vlastnosti: $y \to x$ a $x \to y$ (což zapisujeme také $x \leftrightarrow y$). Množinu $S(\Delta)$ nazveme distribuční prodloužení množiny Δ. Je zřejmé, že platí

Tvrzení 32. Platí tyto relace:

$$S(\Delta_1 \cup \Delta_2) = S(\Delta_1) \cup S(\Delta_2)\,, \quad S(\Delta_1 \cap \Delta_2) = S(\Delta_1) \cap S(\Delta_2)\,,$$
$$S(\Delta_1\Delta_2) = S(\Delta_1)\,S(\Delta_2)\,, \quad S(S(\Delta)) = S(\Delta)\,,$$
$$\Delta \subseteq S(\Delta) \subseteq D(\Delta) \cap D_1(\Delta)\,.$$

Kdykoli $S(\Delta) = \Delta$, říkáme, že Δ je S-invariantní množina. Z poslední inkluze vyplývá

Tvrzení 33. Je-li množina Δ D-invariantní nebo D_1-invariantní, je také S-invariantní.

Všimněme si následující vlastnosti, které využijeme v dalších výkladech: Jestliže $x = uv$, $y = u'v'$, $u \to u'$ a $v \to v'$, pak $x \to y$.

Tvrzení 34. D-invariantní části množiny Φ tvoří Booleovu algebru.

Důkaz. Stačí dokázat, že sjednocení dvou D-invariantních částí je rovněž D-invariantní část a že doplněk D-invariantní části vzhledem k Φ je rovněž D-invariantní. Buďte Δ_1 a Δ_2 D-invariantní. Platí $D(\Delta_1) = \Delta_1$, $D(\Delta_2) = \Delta_2$. Na základě tvrzení 30 platí $D(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \Delta_1 \cup \Delta_2$, tedy $\Delta_1 \cup \Delta_2$ je D-invariantní. Mějme nyní D-invariantní množinu Δ. Na základě tvrzení 30 platí $D(\Phi - \Delta) = D(\Phi) - D(\Delta) = \Phi - \Delta$, tedy $\Phi - \Delta$ je invariantní.

Stejným způsobem je možno dokázat

Tvrzení 35. D_1-invariantní části množiny Φ tvoří Booleovu algebru.

Použitím tvrzení 32 místo tvrzení 30 obdržíme stejným způsobem

Tvrzení 36. S-invariantní části množiny Φ tvoří Booleovu algebru.

Rovněž platí

Tvrzení 37. Jsou-li Δ_1 a Δ_2 D-invariantní, pak součin $\Delta_1\Delta_2$ je rovněž D-invariantní.

Důkaz. Na základě tvrzení 31 platí $D(\Delta_1\Delta_2) = D(\Delta_1)\, D(\Delta_2) = \Delta_1\Delta_2$.

Poznámka. Tvrzení 37 platí i tehdy, jestliže D-invarianci nahradíme D_1-invariancí nebo S-invariancí.

43. Δ-dominace a gramatická Δ-kategorie

Uvažujme dvě fráze x a y a množinu frází Δ obsaženou ve Φ (Φ je množina všech vyznačených frází). Říkáme, že x Δ-dominuje nad y a píšeme

$$x \underset{\Delta}{\rightarrow} y\,,$$

jestliže pro každou dvojici frází u a v vyplývá z relace $uxv \in \Delta$ relace $uyv \in \Delta$.

Je zřejmé, že relace Δ-dominace je v množině frází reflexívní a tranzitivní. Většina vlastností relace $\rightarrow$ platí i pro relaci $\underset{\Delta}{\rightarrow}$.

Jsou-li dány dvě množiny frází A a B, říkáme, že A Δ-dominuje nad B a píšeme

$$A \underset{\Delta}{\rightarrow} B\,,$$

jestliže pro všechny fráze x a y, $x \in A$ a $y \in B$ x Δ-dominuje nad y.

Označme A_1 množinu frází, nad nimiž Δ-dominuje A. Sjednocení $\mathscr{G}_\Delta(A) = A \cup A_1$ nazveme gramatickou Δ-kategorií ($\mathscr{G}\Delta - K$) generovanou množinou A. Uvažuje se zejména případ, kdy A je Δ-počáteční, tj. kdy neexistuje žádná fráze $x \,\bar{\in}\, A$, která by Δ-dominovala nad A.

Je-li dána fráze x, označme $F(x)$ množinu frází y takových, že $y \underset{\Delta}{\rightarrow} x$ a $x \underset{\Delta}{\rightarrow} y$. Říkáme, že $F(x)$ je Δ-distribuční třída (v širším slova smyslu).

Je-li A Δ-distribuční třída v širším slova smyslu, nazveme $G_\Delta(A)$ elementární gramatickou Δ-kategorií (EGKΔ-K); je to EGKΔ-K generovaná třídou A.

Je zřejmé, že všechny vlastnosti GK a EGK platí i pro $G\Delta$-K a pro $EG\Delta$-K. GK jsou vlastně $G\Delta$-K a EGK jsou $EG\Delta$-K (pro $\Delta = \Phi$); studium $G\Delta$-K je tedy vlastně studium GK v jazyce Δ. Přesto vznikají některé nové problémy: α) Pro které podmnožiny množiny Φ je možno tvrdit, že při přechodu od Φ k Δ zůstávají zachovány relace dominace ?; β) Za jakých podmínek zůstává při přechodu od Φ k Δ zachována příslušnost k téže distribuční třídě v širším slova smyslu? Těmito problémy se budeme zabývat v další kapitole.

44. Dědičnost dominací a dvojí dominací

Uvažujme množinu $\Delta \subset \Phi$ a dvě fráze x a y. Říkáme, že uspořádaná dvojice (x, y) je Δ-dědičná dominací, nastává-li jeden z těchto dvou případů: 1. $x \rightarrow y$

a $x \underset{\Delta}{\rightarrow} y$; 2. x nedominuje nad y. Je-li každá uspořádaná dvojice frází Δ-dědičná dominací, říkáme, že Δ je množina dědičná dominací.

Teorém 23. *Buď $\Delta \subset \Phi$. Množina Δ je dědičná dominací právě tehdy, když je D-invariantní.*

Důkaz. Předpokládejme, že Δ je dědičné dominací a uvažujme frázi $x \in D(\Delta)$. Existuje tedy fráze $y \in \Delta$ taková, že $y \rightarrow x$. Z toho, že množina Δ je dědičná dominací, lze odvodit, že $y \underset{\Delta}{\rightarrow} x$. Z toho vyplývá, že pro každý kontext $\{u, v\}$ takový, že $uyv \in \Delta$, platí $uxv \in \Delta$. Uvažujme případ $u = v = \emptyset$ (= prázdná fráze). Platí $\emptyset y \emptyset = y \in \Delta$ a tedy platí také $x \in \Delta$. Dále platí $D(\Delta) \subseteq \Delta$, z čehož vyplývá $\Delta = \Delta(D)$. Tím je dokázána D-invariance množiny Δ.

Předpokládejme nyní, že Δ je D-invariantní, a uvažujme dvě fráze x a y takové, že $x \rightarrow y$. Buď $\{u, v\}$ kontext, pro který platí $uxv \in \Delta$. Platí tedy $uyv \in D(\Delta)$ a jako důsledek D-invariance množiny Δ lze odvodit, že $uyv \in \Delta$, z čehož vyplývá relace $x \underset{\Delta}{\leftrightarrow} y$. Tím je dokázáno, že množina Δ je dědičná dominací. Je dokázán také teorém 23.

Uvažujme znovu množinu $\Delta \subset \Phi$. Říkáme, že Δ je množina dědičná dvojí dominací, jestliže pro každou dvojici frází x a y takových, že platí $x \leftrightarrow y$, platí také $x \underset{\Delta}{\rightarrow} y$.

Teorém 24. *Buď $\Delta \subset \Phi$. Množina Δ je dědičná dvojí dominací právě tehdy, když je S-invariantní.*

Důkaz. Předpokládejme, že množina Δ je dědičná dvojí dominací, a uvažujme frázi $x \in S(\Delta)$. Existuje tedy fráze $y \in \Delta$ taková, že $x \leftrightarrow y$. Na základě toho, že množina Δ je dědičná dvojí dominací, lze odvodit, že $x \underset{\Delta}{\leftrightarrow} y$. Z toho vyplývá, že pro každý kontext $\{u, v\}$ platí $uxv \in \Delta$ a $uyv \in \Delta$ nebo $uxv \,\bar{\in}\, \Delta$ a $uyv \,\bar{\in}\, \Delta$. Zvláště v případě $u = v = \emptyset$ a s ohledem na $y \in \Delta$ lze odvodit, že $x \in \Delta$, tedy $S(\Delta) = \Delta$. Tím je S-invariance množiny Δ dokázána.

Předpokládejme nyní, že Δ je S-invariantní, a uvažujme dvě fráze x a y takové, že $x \leftrightarrow y$. Buď $\{u, v\}$ kontext, pro který $uxv \in \Delta$. Platí tedy $uyv \in S(\Delta)$ a v důsledku S-invariance množiny Δ lze odvodit, že $uyv \in \Delta$, z čehož vyplývá $x \underset{\Delta}{\rightarrow} y$. Na základě symetričnosti relace $x \leftrightarrow y$ platí také $y \underset{\Delta}{\rightarrow} x$, tedy $x \underset{\Delta}{\leftrightarrow} y$. Tím je dokázáno, že množina Δ je dědičná dvojí dominací.

Teorém 25. *Buď $\Delta \subset \Phi$. Je-li Φ jazyk s konečným počtem stavů a je-li Δ množina dědičná dvojí dominací, je Δ rovněž jazyk s konečným počtem stavů.*

Důkaz. Z předpokladu o množině Φ vyplývá, že počet distribučních tříd v širším slova smyslu, který označíme N, je konečný. Z předpokladu o množině Δ vyplývá, že dvě fráze, které patří do téže distribuční třídy v širším slova smyslu, patří do téže Δ-distribuční třídy v širším slova smyslu. Z toho vyplývá, že počet Δ-distribučních tříd v širším slova smyslu nemůže být větší než hodnota N; tím spíše je tedy toto číslo konečné a Δ je jazyk s konečným počtem stavů.

45. Operace na dědičných množinách

Tvrzení 38. Části množiny Φ, které jsou dědičné dominací, tvoří Booleovu algebru.

Důkaz. Bezprostřední důsledek tvrzení 34 a teorému 23.

Tvrzení 39. Části množiny Φ, které jsou dědičné dvojí dominací, tvoří Booleovu algebru.

Důkaz. Bezprostřední důsledek tvrzení 36 a teorému 24.

Tvrzení 40. Je-li Δ_1 a Δ_2 množiny dědičné dominací (resp. dvojí dominací), je součin $\Delta_1\Delta_2$ rovněž dědičný dominací (resp. dvojí dominací).

Důkaz. Bezprostřední důsledek tvrzení 37, následující poznámky a teorémů 23 a 24.

Korolár 10. Je-li n kladné celé číslo a je-li Δ množina dědičná dominací (resp. dvojí dominací), pak množina $\Delta^n (= \Delta \dots \Delta, \Delta$ opakované $n$krát) je rovněž dědičná dominací (resp. dvojí dominací).

Uvažujme nyní novou operaci, která je velmi důležitá v teorii konečných automatů (viz například práce [33], [81], [99] a [123]). Je-li dána množina $\Delta \subset \Phi$, položme

$$\mathrm{cl}\,(\Delta) = \Delta^0 \cup \Delta^1 \cup \dots \cup \Delta^n \cup \dots,$$

kde Δ^0 označuje množinu vytvořenou pouze prázdnou frází.

Teorém 26. *Je-li množina Δ dědičná dominací (resp. dvojí dominací), je* $\mathrm{cl}\,(\Delta)$ *rovněž dědičné dominací (resp. dvojí dominací).*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že množina Δ je dědičná dominací. Na základě teorému 23 stačí dokázat, že $D(\mathrm{cl}\,(\Delta)) = \mathrm{cl}\,(\Delta)$, aby bylo možno tvrdit, že $\mathrm{cl}\,(\Delta)$ je dědičné dominací. Buď $x \in D(\mathrm{cl}\,(\Delta))$. Existuje tedy fráze $y \in \mathrm{cl}\,(\Delta)$ taková, že $y \to x$. Z relace $y \in \mathrm{cl}\,(\Delta)$ vyplývá, že existuje kladné celé číslo n takové, že $y \in \Delta^n$. Ale na základě koroláru 10 a toho, že Δ je množina dědičná dominací, lze odvodit, že množina Δ^n je rovněž dědičná dominací a tedy v důsledku teorému 23 platí $D(\Delta^n) = \Delta^n$. Na druhé straně platí $x \in D(\Delta^n)$. V důsledku toho platí $x \in \Delta^n$, z čehož vyplývá relace $x \in \mathrm{cl}\,(\Delta)$. Tím byla dokázána D-invariance množiny $\mathrm{cl}\,(\Delta)$, což je samo důkazem první části teorému 26.

Předpokládáme-li nyní, že množina Δ je dědičná dvojí dominací, je možno stejným způsobem dokázat, že $S(\mathrm{cl}\,(\Delta)) = \mathrm{cl}\,(\Delta)$, a na základě teorému 24 je možno odvodit, že $\mathrm{cl}\,(\Delta)$ je rovněž dědičné dvojí dominací.

Poznámky. Výsledky, k nimž jsme dospěli, ukazují, že existuje paralela mezi třídou událostí reprezentovatelných konečnými automaty na jedné straně

a třídou množin dědičných dominací na straně druhé. Operace, které zachovávají dědičnost dominací, jsou skutečně přesně ty, které zachovávají reprezentovatelnost konečnými automaty ([81], [99], [123]). Paralela stejného typu existuje mezi dědičností dvojí dominací a reprezentovatelností konečnými automaty.

Na základě tvrzení 30 a 32 a teorémů 23 a 24 lze odvodit

Tvrzení 41. Pro jakékoli $\Delta \subset \Phi$ je dominované prodloužení množiny Δ dědičné dominací, zatímco distribuční prodloužení množiny Δ je dědičné dvojí dominací.

Ihned přicházíme k

Teorému 27. *Buď $\mathscr{C}$ třída množin majících tyto vlastnosti:*

1. *Je-li Δ konečná množina a je-li obsažena ve Φ a platí-li $\Delta = D(\Delta)$, pak $D(\Delta) \in \mathscr{C}$;*
2. *Platí-li $\Delta_1 \in \mathscr{C}$ a $\Delta_2 \in \mathscr{C}$, pak $\Delta_1 \cup \Delta_2 \in \mathscr{C}$ a $\Delta_1\Delta_2 \in \mathscr{C}$;*
3. *Platí-li $\Delta \in \mathscr{C}$, pak $\mathrm{cl}\,(\Delta) \in \mathscr{C}$.*

Nejmenší třída $\mathscr{C}$ mající vlastnosti 1, 2 *a* 3 *obsahuje pouze množiny dědičné dominací.*

Otázka: Je možno tvrdit, že nejmenší třída mající vlastnosti 1, 2 a 3 obsahuje všechny části množiny Φ, které jsou dědičné dominací?

Teorém 27 zůstává pravdivý, nahradíme-li v jeho výroku výraz $D(\Delta)$ výrazem $S(\Delta)$ a výraz „dominace“ výrazem „dvojí dominace“. Platí tedy

Teorém 27'. *Buď $\mathscr{C}$ třída množin obsažených ve Φ a majících tyto vlastnosti:* 1. *je-li Δ konečná množina a platí-li $S(\Delta) = \Delta$, pak $S(\Delta) \in \mathscr{C}$;* 2. *platí-li $\Delta_1 \in \mathscr{C}$ a $\Delta_2 \in \mathscr{C}$, pak $\Delta_1 \cup \Delta_2 \in \mathscr{C}$ a $\Delta_1\Delta_2 \in \mathscr{C}$;* 3. *platí-li $\Delta \in \mathscr{C}$, pak $\mathrm{cl}\,(\Delta) \in \mathscr{C}$.*

Nejmenší třída mající vlastnosti 4, 2 *a* 3 *obsahuje pouze množiny dědičné dvojí dominací.*

Otázka: Je možno tvrdit, že nejmenší třída mající vlastnosti 4, 2 a 3 obsahuje všechny části množiny Φ, které jsou dědičné dvojí dominací?

46. Množiny slabě dědičné dominací nebo dvojí dominací

Konkrétní lingvistický rozbor se obyčejně netýká celého přirozeného jazyka, ale pouze jeho určité části. Pro každý jazykový jev je třeba najít tu část jazyka, která mu je přirozeně přiřazena, která mu dává možnost projevovat se charakteristickým a nedvojznačným způsobem. Tak je možno si například vysvětlit, proč Harris připisuje takovou důležitost tomu, co nazývá „diagnostic environment“ (charakteristické okolí nebo charakteristický kontext) [58], [59].

Tradiční lingvistické rozbory se obyčejně týkají množin dědičných dvojí dominací v obecnějším smyslu, než jak jsme o nich mluvili my. Vezměme například čistě morfologický lingvistický rozbor, tj. bez užití kontextu. Vše se v něm tedy vztahuje na množinu slov (nebo morfémů) Γ.

Množinu $\Delta(\subset \Gamma)$ nazveme slabě dědičnou dvojí dominací, jestliže pro $x, y \in \Gamma$ a $x \leftrightarrow y$ platí $x \underset{\Delta}{\leftrightarrow} y$.

Platí

Tvrzení 42. Jestliže $\Gamma \subset \Phi$, pak je Γ slabě dědičné dvojí dominací.

Důkaz. Buď $x, y \in \Gamma$ a $x \leftrightarrow y$. Jestliže $uzv \in \Gamma$, pak $u = v =$ prázdná posloupnost a tedy $uxv = x$ a $uyv = y \in \Gamma$.

Tvrzení 42 dává určitým způsobem oprávnění kontextovým (paradigmatickým) jazykovým rozborům; tyto rozbory se týkají části jazyka slabě dědičné dvojí dominací.

Obdobně můžeme definovat pojem množiny slabě dědičné dominací (stačí nahradit relaci $\leftrightarrow$ relací $\rightarrow$). Dostaneme tím tvrzení obdobné tvrzení 42.

I. I. Revzin upozornil, že většina matematických modelů v lingvistice se týká množin slabě dědičných dvojí dominací. Takové množiny nazývá Revzin „pravidelné fragmenty" [130], [132].

Fragmenty, jichž se užívá v nejelementárnějším gramatickém rozboru francouzštiny, rumunštiny, angličtiny, ruštiny a latiny, obsahují nejjednodušší věty typu podmět-přísudek. V každém z uvedených jazyků je množina takových vět slabě dědičná dvojí dominací. Nominální syntagmata typu adjektivum-substantivum nebo substantivum-adjektivum (jde o adjektiva v užším slova smyslu) tvoří v každém z uvedených jazyků rovněž pravidelné fragmenty ve smyslu Revzinově. Složitější příklady jsou uvedeny v článcích [130] a [132].

Gramatické Δ-kategorie a Δ-distribuční třídy jsou zajímavé zvláště tehdy, když je množina Δ dědičná dominací, respektive dvojí dominací.

47. Pravidelné rozklady

Následující pojem vychází z článku [130]: Rozklad množiny Φ nazveme polopravidelným (pravidelným), je-li každý výraz rozkladu dědičný dominací (dvojí dominací). Z teorémů 23 a 24 vyplývá

Teorém 28. *Rozklad množiny Φ je polopravidelný (pravidelný) právě tehdy, když je každý člen rozkladu D-invariantní (S-invariantní).*

Jsou-li dány dva rozklady P_1 a P_2

$$P_1 : \Phi = \bigcup_i A_i\,, \quad P_2 : \Phi = \bigcup_j B_j\,,$$

součin těchto rozkladů definuje rozklad P_1P_2, jehož prvky jsou množiny $A_i \cap B_j$. Platí

Tvrzení 43. Součin dvou polopravidelných (pravidelných) rozkladů je rovněž polopravidelný (pravidelný) rozklad.

Důkaz. Nechť P_1 a P_2 jsou polopravidelné rozklady. Z toho, že množiny A_i a B_j jsou dědičné dominací, lze odvodit na základě tvrzení 38, že průnik $A_i \cap B_j$ je rovněž dědičný dominací a tedy součin P_1P_2 je polopravidelný rozklad. Jsou-li P_1 a P_2 pravidelné rozklady, lze použitím tvrzení 39 dokázat, že součin P_1P_2 je rovněž pravidelný rozklad.

Úvahy rozvedené v článku [130] vedou k tomuto pojmu: Fráze x dominuje absolutně nad frází y, jestliže pro každý pravidelný rozklad P množiny Φ existuje prvek A rozkladu P takový, že $x \underset{A}{\leftrightarrow} y$. Avšak platí

Tvrzení 44. Mějme dvě libovolné fráze x a y. Platí $x \rightarrow y$ právě tehdy, když x dominuje absolutně nad y.

Důkaz. Mějme $x \rightarrow y$. Je-li P pravidelný rozklad množiny Φ, platí pro každý prvek A rozkladu P $x \underset{A}{\rightarrow} y$; x tedy dominuje absolutně nad y. Mějme naopak v případě, že x dominuje absolutně nad y, rozklad Q množiny Φ, jehož jediným prvkem je Φ. Na základě tvrzení 39 je Q pravidelný rozklad a tedy $x \underset{\Phi}{\leftrightarrow} y$. Φ-dominace je však totožná s dominací.

Na závěr poznamenejme, že soubor Φ (nebo Δ), kterým jsme se zabývali v tomto oddílu, je někdy spojen s určitou představou gramatické správnosti. O různých způsobech chápání této správnosti viz [10], str. 28 a [48], str. 35.

Některé závěry, podané v tomto oddílu, byly vyloženy také v pracích [90], [91], [92] a [94].

K některým aspektům morfologické homonymie viz též článek V. Hořejšího [72].

Modely založené na rozkladech a na relaci dominace

1. Rozklad do okolí

Při studiu gramatických kategorií bylo používáno jen velmi chudé struktury slovníku Γ (který někdy budeme označovat také E). Do slovníku Γ byla totiž zavedena relace $\rightarrow$ a všechny další pojmy a fakta byly založeny na této relaci. Ukázalo se, že se slovníkem Γ, množinou vyznačených posloupností označenou Φ a relací dominace $\rightarrow$ lze vystačit při řešení takových problémů, jako je morfologická homonymie nebo typy distribuce. Jakmile však chceme řešit i jiné lingvistické problémy, jako je například otázka slovního druhu, rodu nebo typologické klasifikace jazyků, je užitečné (i když ne snad nutné) obohatit strukturu základní množiny Γ tak, aby zachycovala třídění slov podle flexe. Za tím účelem budeme uvažovat určitý rozklad V množiny Γ, který nazveme rozkladem do okolí. Prvek rozkladu V, kterému přísluší slovo $x \in \Gamma$, budeme označovat $V(x)$; $V(x)$ je okolí slova x. K pojmu okolí slova vede úhrn jeho flektivních tvarů. Jako při každém modelování zde vzniká určitá nesrovnalost: zatímco v přirozených jazycích je možné, aby týž flektivní tvar byl společný dvěma nebo i více slovům, hořejší výklady nepřipouštějí možnost, aby totéž slovo příslušelo několika okolím.

2. Některé pojmy spojené s rozklady

Jako dosud budeme každou konečnou posloupnost slov (z nichž některá se mohou opakovat) nazývat frází. Určité fráze jsou chápány jako vyznačené; množina takových frází se značí Φ. Vyznačené fráze se obyčejně interpretují jako fráze správně tvořené. Slovo, okolí a vyznačená fráze se nedefinují, nýbrž se chápou jako předem dané; prostřednictvím těchto pojmů se uplatňuje v dalších výkladech sémantická stránka jazyka.

Nechť je dán rozklad P množiny Γ:

$$P : \Gamma = \bigcup_i P_i$$

a pro každé $x \in \Gamma$ označme $P(x)$ množinu P_i obsahující x.

Mějme dva rozklady A a B množiny Γ:

$$A : \Gamma = \bigcup_i A_i\,, \quad B : \Gamma = \bigcup_j B_j\,. \qquad (1), (2)$$

Říkáme, že rozklad B je zákrytem rozkladu A, jestliže pro jakékoli $x \in \Gamma$ platí $A(x) \subseteq B(x)$, přičemž tato inkluze je aspoň pro jedno x ostrá (jinak rozklady A a B splývají).

P-strukturou fráze $f = x_1 x_2 \dots x_n$ nazveme tuto posloupnost prvků rozkladu P:

$$P(f) = P(x_1)\, P(x_2) \dots P(x_n)\,.$$

Každou konečnou posloupnost prvků rozkladu P – z nichž některé se mohou opakovat – nazveme P-strukturou. P-struktura se nazývá vyznačená, je-li P-strukturou alespoň jedné vyznačené fráze.

P-struktury je možno skládat juxtapozicí. Složením několika P-struktur obdržíme novou P-strukturu.

Říkáme, že P-struktury P_1 a P_2 jsou P-ekvivalentní a píšeme

$$P_1 \underset{P}{\sim} P_2\,,$$

jestliže pro jakoukoli dvojici P-struktur P_4 a P_3 jsou P-struktury $P_3 P_1 P_4$ a $P_3 P_2 P_4$ buď obě vyznačené nebo obě nevyznačené.

Říkáme, že rozklad B definovaný rovností (2) je pravidelným zákrytem rozkladu A, definovaného rovností (1), je-li B zákrytem A a jestliže

$$\text{z} \quad A_i \subseteq B_j \supseteq A_k \quad \text{vyplývá} \quad A_i \underset{A}{\sim} A_k\,.$$

Uvažujme rozklad P množiny Γ a položme pro $x \in \Gamma$

$$P'(x) = \bigcup_{P(y) \underset{P}{\sim} P(x)} P(y)\,; \qquad (3)$$

sjednocení na pravé straně rovnice se tedy vztahuje na všechny prvky rozkladu P, které jsou P-ekvivalentní s $P(x)$.

Je zřejmé, že množiny $P'(x)$ určují nový rozklad množiny Γ, který nazveme derivovaným rozkladem rozkladu P a označíme jej P'.

Rekurentním postupem se definuje rozklad $P^{(n+1)}$, který je derivací $n+1$-ého řádu rozkladu P, výrazem $(P^{(n)})'$.

Jednotkovým rozkladem množiny Γ nazveme rozklad, jehož každý prvek je množina vytvořená z jediného prvku. Derivovaný rozklad jednotkového rozkladu se nazývá rozklad do rodin. Každý prvek tohoto rozkladu je rodina. Rodina obsahující slovo $x \in \Gamma$ se značí $S(x)$ nebo $F(x)$.

Je zřejmé, že výše definovaný pojem rodiny je totožný s pojmem rodiny, jak byl definován pomocí relace dominace $\rightarrow$.

Jazyk je množina slov Γ opatřená rozkladem do okolí V a systémem vyznačených frází Φ. Jazyk se značí $\Gamma(V, \Phi)$ nebo $\{\Gamma, V, \Phi\}$.

Všechny výše uvedené pojmy pocházejí od O. S. Kulaginové [82].

3. P-dominace a některé její vlastnosti

Úkolem dalších výkladů bude konstatovat některá základní fakta o derivovaných rozkladech; při svých úvahách budeme systematicky využívat tohoto zobecnění P-ekvivalence mezi dvěma P-strukturami:

Nechť je P rozklad množiny Γ. Říkáme, že $P(x)$ P-dominuje nad $P(y)$ a píšeme

$$P(x) \underset{P}{\rightarrow} P(y),$$

jestliže pro jakoukoli dvojici P-struktur P_1 a P_2 takových, že P-struktura $P_1P(x)P_2$ je vyznačená, je P-struktura $P_1P(y)P_2$ rovněž vyznačená.

Je zřejmé, že relace

$$P(x) \underset{P}{\sim} P(y)$$

je ekvivalentní s dvojicí relací

$$P(x) \underset{P}{\rightarrow} P(y) \quad \text{a} \quad P(y) \underset{P}{\rightarrow} P(x).$$

Lemma 1. Je-li rozklad B zákrytem rozkladu A a je-li A-struktura

$$A(x_1)\, A(x_2) \ldots A(x_n) \tag{1}$$

vyznačená, je vyznačená i B-struktura

$$B(x_1)\, B(x_2) \ldots B(x_n). \tag{2}$$

D ů k a z. Jelikož A-struktura (1) je vyznačená, existuje vyznačená fráze $y_1y_2 \ldots y_n$ taková, že $A(x_i) = A(y_i)$ pro $1 \leqq i \leqq n$. Potom však z $A(x_i) \subseteq B(x_i)$ vyplývá $A(y_i) \subseteq B(x_i)$, a tedy $y_i \in B(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. B-struktura (2) je tedy vyznačená, neboť je B-strukturou vyznačené fráze $y_1y_2 \ldots y_n$.

P o z n á m k a. Lemma 1 je dáno v článku [82] jako evidentní tvrzení; viz poznámku 2 za důkazem lemmatu 1 v témž článku.

Lemma 2. Nechť je B zákrytem rozkladu A a nechť platí $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$. Platí-li

$$A(u) \rightarrow A(y), \tag{3}$$

kdykoli platí

$$A(u) \subseteq B(x), \tag{4}$$

pak platí

$$B(x) \underset{B}{\rightarrow} B(y). \tag{5}$$

D ů k a z. Buď

$$B(x_1) \ldots B(x_{n-1})\, B(x)\, B(x_{n+1}) \ldots B(x_p) \tag{6}$$

vyznačená B-struktura. Existuje tedy vyznačená fráze

$$y_1y_2 \ldots y_{n-1}y_ny_{n+1} \ldots y_p, \tag{7}$$

jejíž B-strukturou je B-struktura (6); tedy

$$B(y_i) = B(x_i) \quad (1 \leqq i \leqq p,\ i \neq n) \tag{8}$$

$$B(y_n) = B(x). \tag{9}$$

Jelikož fráze (7) je vyznačená, je A-struktura

$$A(y_1) \ldots A(y_{n-1})\, A(y_n)\, A(y_{n+1}) \ldots A(y_p) \tag{10}$$

rovněž vyznačená. Z předpokladu, že B je zákrytem A, lze odvodit

$$A(y_i) \subseteq B(y_i) \quad (1 \leqq i \leqq n). \tag{11}$$

Zvláště platí vzhledem k rovnosti (9)

$$A(y_n) \subseteq B(x); \tag{12}$$

relaci (4) je tedy vyhověno pro $u = y_n$. Z toho vyplývá, že relace (3) platí pro $u = y_n$:

$$A(y_n) \underset{A}{\rightarrow} A(y). \tag{13}$$

Z relace (13) a z toho, že A-struktura (10) je vyznačená, vyplývá, že A-struktura

$$A(y_1) \ldots A(y_{n-1})\, A(y)\, A(y_{n+1}) \ldots A(y_p) \tag{14}$$

je rovněž vyznačená. Z relace (11) a z lemmatu 1 vyplývá, že B-struktura

$$B(y_1) \ldots B(y_{n-1})\, B(y)\, B(y_{n+1}) \ldots B(y_p)$$

je vyznačená; na základě rovnosti (8) je tedy B-struktura

$$B(x)_1 \ldots B(x_{n-1})\, B(y)\, B(x_{n+1}) \ldots B(x_p) \tag{15}$$

vyznačená. Jelikož B-strukturu (15) obdržíme z B-struktury (6), píšeme-li $B(y)$ místo $B(x)$, dokázali jsme relaci (5).

Zaměníme-li v lemmatu 2 úlohu x a y, obdržíme

Lemma 2′. Nechť je B zákrytem rozkladu A a nechť platí $x \in E$, $y \in E$. Platí-li

$$A(u) \underset{A}{\rightarrow} A(x), \tag{3'}$$

kdykoli platí

$$A(u) \subseteq B(y), \tag{4'}$$

pak platí

$$B(y) \underset{B}{\rightarrow} B(x). \tag{5'}$$

Z lemmat 2 a 2′ lze odvodit

Lemma 3. Nechť je B zákrytem rozkladu A a nechť platí $x \in E$, $y \in E$. Jestliže z

$$A(u) \subseteq B(x)$$

vyplývá

$$A(u) \underset{A}{\rightarrow} A(y)$$

a z

$$A(u) \subseteq B(y)$$

vyplývá

$$A(u) \underset{A}{\rightarrow} A(x)\,,$$

pak platí

$$B(x) \underset{B}{\sim} B(y)\,. \tag{16}$$

Z lemmatu 3 vyplývá toto tvrzení vyslovené O. S. Kulaginovou (lemma 2 v článku [82]):

Korolár 1. Nechť je B pravidelným zákrytem rozkladu A. Existují-li $x \in E$, $y \in E$ taková, že $A(x)$ je A-ekvivalentní s $A(y)$, pak platí relace (16).

Důkaz. Buď $u \in E$ takové, že $A(u) \subseteq B(x)$. Jelikož B je zákrytem A, platí $A(x) \subseteq B(x)$, a jelikož tento zákryt je pravidelný, lze odvodit, že $A(x)$ je A-ekvivalentní s $A(u)$. Z předpokladu však vyplývá, že $A(x)$ je A-ekvivalentní s $A(y)$; $A(u)$ je tedy A-ekvivalentní s $A(y)$. Zvláště platí

$$A(u) \underset{A}{\rightarrow} A(y)\,.$$

Mějme nyní $v \in E$ takové, že $A(v) \subseteq B(y)$. Obdobnou úvahou (píšeme-li v místo u a y místo x) lze odvodit

$$A(v) \underset{A}{\rightarrow} A(x)\,;$$

všechny předpoklady lemmatu 3 jsou tedy splněny a platí relace (16).

Vyslovíme nyní

Lemma 4. Nechť je B pravidelným zákrytem rozkladu A. Předpokládejme, že existují $x \in E$, $y \in E$ taková, že

$$B(x) \underset{B}{\rightarrow} B(y) \tag{17}$$

a nechť jsou $u \in E$, $v \in E$ taková, že

$$A(u) \subseteq B(x)\,, \tag{18}$$

$$A(v) \subseteq B(y)\,. \tag{19}$$

Za těchto podmínek platí

$$A(u) \underset{A}{\rightarrow} A(v)\,. \tag{20}$$

Důkaz. Buď

$$A(z_1) \ldots A(z_{m-1})\, A(u)\, A(z_{m+1}) \ldots A(z_s) \tag{21}$$

vyznačená A-struktura. Existuje tedy vyznačená fráze

$$u_1 \ldots u_{m-1} u_m u_{m+1} \ldots u_s\,, \tag{22}$$

jejíž A-strukturou je A-struktura (21), tedy

$$A(u_i) = A(z_i) \quad (1 \leqq i \leqq s,\, i \neq m)\,, \tag{23}$$

$$A(u_m) = A(u)\,. \tag{24}$$

Z toho, že fráze (22) je vyznačená, vyplývá, že B-struktura

$$B(u_1) \ldots B(u_{m-1})\, B(u_m)\, B(u_{m+1}) \ldots B(u_s) \tag{25}$$

je rovněž vyznačená. Z toho, že B je zákrytem A, vyplývá, že

$$A(u_i) \subseteq B(u_i) \quad (1 \leqq i \leqq s)\,. \tag{26}$$

Z relací (24) a (26) lze odvodit

$$A(u) \subseteq B(u_m)\,. \tag{27}$$

Z relací (18) a (27) vyplývá

$$B(x) = B(u_m)\,. \tag{28}$$

Z relace (28) a z toho, že relace (25) je vyznačená B-struktura, vyplývá, že B-struktura

$$B(u_1) \ldots B(u_{m-1})\, B(x)\, B(u_{m+1}) \ldots B(u_s) \tag{29}$$

je rovněž vyznačená. Z této okolnosti a z relace (17) lze odvodit, že B-struktura

$$B(u_1) \ldots B(u_{m-1})\, B(y)\, B(u_{m+1}) \ldots B(u_s) \tag{30}$$

je vyznačená. Existuje tedy vyznačená fráze

$$v_1 \ldots v_{m-1} v_m v_{m+1} \ldots v_s$$

taková, že

$$v_i \in B(u_i) \quad (1 \leqq i \leqq s,\, i \neq m) \tag{31}$$

a

$$v_m \in B(y)\,. \tag{32}$$

A-struktura

$$A(v_1) \ldots A(v_{m-1})\, A(v_m)\, A(v_{m+1}) \ldots A(v_s) \tag{33}$$

je tedy vyznačená. Z relací (31), (32) a z toho, že B je zákrytem A, vyplývá, že

$$A(v_i) \subseteq B(u_i) \quad (1 \leqq i \leqq s,\, i \neq m)\,, \tag{34}$$

$$A(v_m) \subseteq B(y)\,. \tag{35}$$

Z relací (19), (26), (34), (35) a z předpokladu, že B je pravidelným zákrytem A, lze odvodit

$$A(u_i) \underset{A}{\sim} A(v_i) \quad (1 \leqq i \leqq s,\, i \neq m)\,, \tag{36}$$

$$A(v) \underset{A}{\sim} A(v_m)\,. \tag{37}$$

Z relací (36), (37) a z toho, že A-struktura (33) je vyznačená, vyplývá, že A-struktura

$$A(u_1) \ldots A(u_{m-1})\, A(v)\, A(u_{m+1}) \ldots A(u_s) \tag{38}$$

je rovněž vyznačená. Vzhledem k relaci (23) je však možno A-strukturu (38) psát také ve tvaru

$$A(z_1) \ldots A(z_{m-1})\, A(v)\, A(z_{m+1}) \ldots A(z_s)\,. \tag{39}$$

Z toho, že A-strukturu (39) obdržíme z A-struktury (21), píšeme-li $A(v)$ místo $A(u)$, vyplývá, že platí relace (20), a lemma 4 je tím zcela dokázáno.

Vyměníme-li v předpokladu (17) lemmatu 4 úlohy x a y, obdržíme

Lemma 4'. Nechť je B pravidelným zákrytem rozkladu A. Předpokládejme, že existují $x \in E$, $y \in E$ taková, že

$$B(y) \underset{B}{\rightarrow} B(x)\,, \tag{17'}$$

a nechť jsou $u \in E$, $v \in E$ taková, že platí inkluze (18) a (19). Za těchto podmínek platí

$$A(v) \underset{A}{\rightarrow} A(u)\,. \tag{20'}$$

Z lemmat 4 a 4' bezprostředně vyplývá

Lemma 5. Nechť je B pravidelným zákrytem rozkladu A. Předpokládejme, že existují $x \in E$, $y \in E$ taková, že

$$B(x) \underset{B}{\sim} B(y)\,, \tag{40}$$

a nechť jsou $u \in E$, $v \in E$ taková, že platí inkluze (18) a (19). Za těchto podmínek platí

$$A(u) \underset{A}{\sim} A(v)\,.$$

4. Podmínka pro to, aby dva porovnatelné rozklady měly tutéž derivaci

Teorém 1. *Nechť B je zákrytem rozkladu A. Aby platilo $B' = A'$, je nutné a stačí, aby B bylo pravidelným zákrytem A.*

Důkaz. Buď

$$A : E = \bigcup_i A_i\,,$$

$$B : E = \bigcup_j B_j\,.$$

Pro každé $x \in E$ platí

$$A(x) \subseteq B(x)\,. \tag{41}$$

Podmínka je nutná. Předpokládejme, že $A' = B'$ a položme $P = A'$. Buď

$$P : E = \bigcup_k C_k\,, \tag{42}$$

$$A_i \subseteq B_j \supseteq A_l\,.$$

Z rovnosti $P = B'$ vyplývá, že P je zákrytem B a že tedy existuje C_k takové, že

$$B_j \subseteq C_k\,,$$

a tedy tím spíše platí

$$A_i \subseteq C_k \supseteq A_l\,.$$

Z rovnosti $P = A'$ vyplývá, že

$$A_i \underset{A}{\sim} A_l\,; \tag{43}$$

dva prvky rozkladu A obsažené v témž B_j jsou tedy A-ekvivalentní množiny a B je pravidelným zákrytem A.

Podmínka je postačující. Předpokládejme, že B je pravidelným zákrytem A; z relace (42) tedy vyplývá relace (43). Máme dokázat, že $A' = B'$. Na základě relace (41) je rovnost $A' = B'$ ekvivalentní s tím, že pro jakékoli $x \in E$ platí rovnost

$$X(x) = Y(x)\,, \tag{44}$$

kde

$$X(x) = \bigcup_{A(y) \underset{A}{\sim} A(x)} A(y)\,,$$

$$Y(x) = \bigcup_{B(z) \underset{B}{\sim} B(x)} B(z)\,.$$

Dokažme rovnost (44). Buď $u \in X(x)$. Existuje $y \in E$ takové, že $u \in A(y)$ a $A(y)$ je A-ekvivalentní s $A(x)$. Jelikož jsou splněny všechny předpoklady koroláru 1, je $B(y)$ B-ekvivalentní s $B(x)$. Platí tedy $B(y) \subseteq Y(x)$. Na druhé straně z relace (41) vyplývá pro $x = y$, že $u \in B(y)$; tedy $u \in Y(x)$ a

$$X(x) \subseteq Y(x)\,. \tag{45}$$

Mějme nyní $v \in Y(x)$. Existuje $z \in E$ takové, že $v \in B(z)$ a $B(z)$ je B-ekvivalentní s $B(x)$. Platí $B(v) = B(z)$ a tedy na základě relace (41) platí pro $x = v$, že $A(v) \subseteq B(z)$. Znovu na základě relace (41) můžeme konstatovat, že jsou splněny všechny předpoklady lemmatu 5 (píšeme-li z místo y a x místo u); $A(x)$ je tedy A-ekvivalentní s $A(v)$. Z toho vyplývá, že $A(v) \subseteq X(x)$ a $v \in X(x)$. Platí tedy

$$Y(x) \subseteq X(x) . \tag{46}$$

Z relací (45) a (46) vyplývá rovnost (44) a dostatečnost podmínky je tím dokázána.

Korolár 2. Pro každý rozklad P platí $P' = P''$.

Důkaz. Z definice derivovaných rozkladů vyplývá, že P' je pravidelným zákrytem rozkladu P. Z teorému 1 (výroku o dostatečnosti podmínky) vyplývá, že $P' = (P')' = P''$.

Poznámka. Korolár 2 vyslovila poprvé O. S. Kulaginová (teorém 1 v článku [82]).

5. Rozklady s toutéž derivací

V předcházející kapitole jsme stanovili nutnou a postačující podmínku pro to, aby dva rozklady A a B měly tutéž derivaci, za předpokladu, že B je zákrytem rozkladu A. V této kapitole se budeme zabývat otázkou totožnosti derivací v případě dvou libovolných rozkladů.

Teorém 2. *K tomu, aby dva rozklady množiny Γ A a B měly tutéž derivaci, je nutné a stačí, aby existoval rozklad T, který je pravidelným zákrytem jak rozkladu A, tak rozkladu B.*

Důkaz. Podmínka je nutná. Buď $A' = B'$. Položme $T = A'$. Potom T jakožto derivace jak rozkladu A, tak rozkladu B je pravidelným zákrytem rozkladu A i rozkladu B.

Podmínka je postačující. Buď T pravidelným zákrytem rozkladů A a B. Aplikujeme-li teorém 1 (výrok o dostatečnosti podmínky) na rozklady A a T, obdržíme $A' = T'$; aplikujeme-li teorém 1 (výrok o dostatečnosti podmínky) na rozklady B a T, obdržíme $B' = T'$. Tedy $A' = B'$.

Teorém 3. *Nechť $A : \Gamma = \bigcup_i A_i$ a $B : \Gamma = \bigcup_j B_j$ jsou dva libovolné rozklady množiny Γ. Aby platilo*

$$A' = B' , \tag{1}$$

je nutné a stačí, aby byla splněna tato podmínka: Jestliže

$$A_i \cap B_j \neq 0 \tag{2}$$

a

$$A_k \cap B_l \neq 0 , \tag{3}$$

pak z

$$A_i \underset{A}{\sim} A_k \tag{4}$$

vyplývá

$$B_j \underset{B}{\sim} B_l \tag{5}$$

a z relace (5) *vyplývá relace* (4).

Důkaz. Podmínka je nutná. Budiž splněna relace (1). Položme

$$T = A' = B' . \tag{6}$$

T je tedy pravidelným zákrytem A. Předpokládáme-li, že je vyhověno relaci (4), existuje jako prvek rozkladu T množina G, pro niž platí

$$A_i \subseteq G \supseteq A_k . \tag{7}$$

Z relace (2) vyplývá, že existuje jako prvek rozkladu T množina H, pro niž platí

$$B_j \subseteq H \supseteq A_i . \tag{8}$$

Z relací (7) a (8) vyplývá $H = G$; tedy

$$B_j \subseteq G . \tag{9}$$

Z relace (3) vyplývá, že existuje jako prvek rozkladu T množina L, pro niž platí

$$A_k \subseteq L \supseteq B_l . \tag{10}$$

Z relací (7) a (10) vyplývá $L = G$; tedy

$$B_l \subseteq G . \tag{11}$$

Z relací (9) a (11) vyplývá relace (5), tedy z relace (4) vyplývá relace (5).

Protože předpoklady jsou symetrické vzhledem k rozkladům A a B, lze podobným způsobem dokázat, že z relace (5) vyplývá relace (4).

Podmínka je postačující. Připusťme, že platí relace (2) a (3), a předpokládejme, že z relace (4) vyplývá relace (5) a z relace (5) vyplývá relace (4).

Nechť jsou x a y dvě slova z množiny Γ, pro něž existuje prvek M derivovaného rozkladu A' takový, že

$$x \in M , \tag{12}$$

$$y \in M . \tag{13}$$

Označme jako jindy $A(x)$ a $A(y)$ prvky rozkladu A, jimž přísluší x a y, a $B(x)$ a $B(y)$ prvky rozkladu B, jimž přísluší x a y. Zřejmě platí

$$A(x) \cap B(x) \neq 0\,, \tag{14}$$

$$A(y) \cap B(y) \neq 0\,. \tag{15}$$

Z relace (12) a z relace $x \in A(x)$ vyplývá

$$A(x) \subseteq M\,. \tag{16}$$

Z relace (13) a z relace $y \in A(y)$ vyplývá

$$A(y) \subseteq M\,. \tag{17}$$

Z relací (16) a (17) vyplývá

$$A(x) \underset{A}{\sim} A(y)\,. \tag{18}$$

Z relací (14), (15) a (18) vyplývá podle předpokladu

$$B(x) \underset{B}{\sim} B(y)\,; \tag{19}$$

existuje tedy prvek N rozkladu B' takový, že

$$x \in N \quad \text{a} \quad y \in N\,. \tag{20}$$

Tím jsme dokázali, že z relací (12) a (13) vyplývá relace (20); příslušejí-li dvě slova témuž prvku rozkladu A', vyplývá z toho tedy, že příslušejí témuž prvku rozkladu B'. Protože předpoklady jsou symetrické vzhledem k rozkladům A a B, lze podobným způsobem dokázat, že z příslušnosti dvou slov k témuž prvku rozkladu B' vyplývá jejich příslušnost k témuž prvku rozkladu A'. Tedy $M = N$ a $A' = B'$. Tím je teorém zcela dokázán.

Z teorému 3 vyplývá bezprostředně

Korolár 5. Nechť B je zákrytem rozkladu A. Aby platilo $A' = B'$, je nutné a stačí, aby byla splněna tato podmínka: Jestliže

$$A_i \subseteq B_j\,, \tag{21}$$

$$A_k \subseteq B_l\,, \tag{22}$$

pak z

$$A_i \underset{A}{\sim} A_k \tag{23}$$

vyplývá

$$B_j \underset{B}{\sim} B_l \tag{24}$$

a z relace (24) vyplývá relace (23).

Všimněme si nyní, že z koroláru 1 a z lemmatu 5 vyplývá

Korolár 6. Nechť je B pravidelným zákrytem rozkladu A. Platí-li inkluze (21) a (22), pak z relace (23) vyplývá relace (24) a z relace (24) vyplývá relace (23).

Koroláry 5 a 6 vedou bezprostředně k teorému 1, k němuž jsme došli v předchozí kapitole.

6. Závislost derivovaných rozkladů na množině vyznačených frází

Je zřejmé, že derivace rozkladu P množiny Γ závisí nejen na Γ a na P, ale i na množině vyznačených frází Φ; jinými slovy, zatímco rozklad P je přiřazen pouze slovníku Γ jazyka $\Gamma(V, \Phi)$, derivace P' zasahuje prostřednictvím množiny Φ i syntax jazyka. Jakékoli trojici (Γ, P, Φ), vytvořené z množiny Γ, z rozkladu P této množiny a z množiny vyznačených frází Φ vytvořených z prvků množiny Γ, se jednoznačně přiřazuje derivovaný rozklad P'. Jak jsme viděli v předchozích kapitolách, opak tohoto tvrzení neplatí; rozkladu Q neodpovídá vždy jediná trojice (Γ, P, Φ) s vlastností $P' = Q$. Z teorému 1 například vyplývá, že jsou-li stanoveny Γ a Φ a je-li S rozklad do rodin, pak existují alespoň dvě trojice (Γ, P_1, Φ) a (Γ, P_2, Φ), jimž se přiřazuje derivovaný rozklad S, přičemž P_1 je jednotkový rozklad, P_2 je sám rozklad S (předpokládáme, že S nesplývá s jednotkovým rozkladem).

Na druhé straně je zřejmé, že ne pro každou trojici (Γ, Q, Φ) existuje rozklad P s vlastností $P' = Q$; jinými slovy ne každý rozklad je derivovaný. K tomu stačí, aby množina Φ byla taková, že existuje rodina, která obsahuje alespoň dvě slova, a aby Q byl jednotkový rozklad. Aby v tomto případě existoval rozklad P s vlastností $P' = Q$, je nutné, jak vyplývá přímo z definice derivace rozkladu, aby Q bylo zákrytem P nebo aby s ním splývalo. Q však nemůže být zákrytem P, neboť je jednotkovým rozkladem; z toho vyplývá, že $Q = P$, tedy $Q' = Q$. Z definice však vyplývá, že rozklad do rodin je derivace jednotkového rozkladu; Q je tedy rozklad do rodin. To však znamená, že každá rodina je vytvořena z jediného slova, což odporuje skutečnosti, že alespoň jedna rodina obsahuje více než jedno jediné slovo. Předpoklad, že existuje rozklad P s vlastností $P' = Q$, je tedy nesprávný; Q není derivovaný rozklad. Tak jsme dokázali

Tvrzení 9. Jednotkový rozklad je derivovaným rozkladem právě tehdy, když je každá rodina vytvořena z jediného slova.

Poznámka. Pro využití tvrzení 9 je vhodné si uvědomit, že rodiny je možno definovat i bez výslovného přihlédnutí k operaci derivace, totiž pomocí relace $\rightarrow$ uvažované v množině Γ.

Je každý rozklad množiny Γ derivovaným rozkladem alespoň pro jednu množinu vyznačených frází Φ? Odpověď je kladná a je obsažena v

Tvrzení 10. Buď P rozklad množiny Γ. Množinu vyznačených frází Φ je možno definovat tak, že P je derivace jednotkového rozkladu (tady $P = S$).

Důkaz. Buď

$$P : \Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} P_i .$$

Vyznačené fráze budeme definovat takto: fráze $x_1 x_2 \dots x_i \dots x_n$ je vyznačená, jestliže $x_i \in P_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Užijeme-li charakterizace rodin pomocí relace $\rightarrow$ v množině Γ, vyplývá z toho, že prvky rozkladu P jsou právě rodiny.

Je-li dán jazyk $\Gamma(V, \Phi)$, nazveme Γ slovníkem, V morfologií a Φ syntaxí.

Z tvrzení 10 vyplývá

Tvrzení 10'. Nechť je P rozklad množiny Γ. Existuje jazyk se slovníkem Γ, pro který je P derivovaný rozklad.

Je zajímavé zkoumat tento

Problém. Nechť je P rozklad množiny Γ a nechť je $\Gamma(V, \Phi)$ jazyk se slovníkem Γ. Která podmínka je nutná a postačující k tomu, aby P byl derivovaný rozklad vzhledem ke $\Gamma(V, \Phi)$? Předpokládáme-li, že P je derivovaný rozklad vzhledem ke $\Gamma(V, \Phi)$, která podmínka je nutná a postačující k tomu, aby existoval jediný rozklad T s vlastností $T' = P$?

Dalším problémem je otázka existence derivovaných rozkladů za předpokladu, že syntax Φ je libovolně definována. K rozřešení tohoto problému zavedeme následující pojem: rozklad

$$P : \Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

je vlastní, jestliže $n \geqq 2$; v opačném případě $(n = 1)$ se rozklad P nazývá nevlastní. Je zřejmé, že existuje jediný nevlastní rozklad množiny Γ.

Tvrzení 11. Nechť je $\Gamma(V, \Phi)$ jazyk se slovníkem Γ. K tomu, aby žádný vlastní rozklad množiny Γ nebyl derivovaným rozkladem vzhledem ke $\Gamma(V, \Phi)$, je nutné a stačí, aby byla splněna jedna z těchto dvou podmínek: 1. Φ je prázdná množina; 2. každá fráze vytvořená z prvků množiny Γ patří do Φ.

Důkaz. Předpokládejme, že jediný rozklad množiny Γ, který je derivací vzhledem ke $\Gamma(V, \Phi)$, je nevlastní. Ukážeme, že je splněna jedna z podmínek 1 a 2. K tomu stačí dokázat, že existuje-li jedna vyznačená fráze, pak jsou všechny fráze vyznačené. Připusťme pro důkaz sporem, že existuje nevyznačená fráze $a_1 a_2 \dots a_i \dots \dots a_n$. Označíme-li jednotkový rozklad μ, vyplývá z toho, že μ-struktura $\{a_1\} \{a_2\} \dots \dots \{a_i\} \dots \{a_n\}$ je nevyznačená. Z předpokladu však vyplývá, že μ je nevlastní rozklad, a tedy platí

$$\{a_i\} \underset{\mu}{\sim} \{a_j\}$$

pro jakékoli hodnoty výrazů i a j; jinými slovy, nahradíme-li v jakékoli nevyznačené μ-struktuře, která obsahuje $\{a_i\}$, výraz $\{a_i\}$ výrazem $\{a_j\}$, obdržíme μ-strukturu, která je rovněž nevyznačená pro jakékoli hodnoty výrazů i a j. Protože jsme výše

připustili existenci nevyznačené μ-struktury, vyplývá z toho, že každá μ-struktura je nevyznačená, což odporuje předpokladu, že existuje vyznačená μ-struktura. Předpokladem, že existuje nevyznačená μ-struktura, jsme tedy došli k rozporu; všechny μ-struktury jsou vyznačené a podmínka 2 je splněna.

Předpokládejme nyní, že je splněna alespoň jedna z podmínek 1 a 2; v tom případě je jasné, že derivace jakéhokoli rozkladu je nevlastní rozklad. Tvrzení 11 je tím zcela dokázáno.

7. Adekvátní jazyky

Řetězcem od slova x ke slovu y nazveme konečnou posloupnost slov $x_1, x_2, \dots \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ takových, že $x_1 = x$, $x_n = y$ a

$$x_i \in S(x_{i+1}) \cup V(x_{i+1})$$

pro $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Označme $R(x)$ množinu slov y majících tu vlastnost, že existuje řetězec od x k y. Potom $R(x)$ nazveme úsekem slova x. Je zřejmé, že úseky definují rozklad množiny Γ, který označíme R.

Derivaci rozkladu V budeme značit T a nazveme ji rozkladem do typů.

Jazyk je adekvátní, jestliže pro jakékoli $x \in \Gamma$ platí

$$S(x) \subseteq T(x) .$$

Existence adekvátních jazyků vyplyne z některých dalších teorémů

Teorém 1. *Existuje jazyk, který není adekvátní.*

Důkaz. Položme

$$\Gamma = \{a, b, c, d, e\} , \quad V(a) = \{a, b\} , \quad V(c) = \{c, d\} ,$$
$$V(e) = \{e\} , \quad \Phi = \{ad, bd, cd, ee\} .$$

Platí

$$S(a) = \{a, b, c\} , \quad S(d) = \{d\} , \quad S(e) = \{e\} .$$

Ukážeme, že $T(a) = V(a)$; tím teorém dokážeme, neboť

$$S(a) - V(a) = \{a, b, c\} - \{a, b\} = \{c\} \neq 0 .$$

Je především zřejmé, že $V(e)$ není obsažena v $T(a)$. V-struktura $V(a)$ $V(c)$ je je skutečně vyznačená, zatímco V-struktura $V(e)$ $V(c)$ vyznačená není. Pak je jasné, že $V(c)$ není obsaženo v $T(a)$, protože nahradíme-li ve vyznačené V-struktuře $V(a)$ $V(c)$ výraz $V(c)$ výrazem $V(a)$, obdržíme nevyznačenou V-strukturu $V(a)$ $V(a)$.

Teorém 2. *V adekvátním jazyce je T zákrytem R.*

Důkaz. Z předpokladu vyplývá, že $S(x) \subseteq T(x)$, a z $V' = T$ lze odvodit $V(x) \subseteq T(x)$ pro jakékoli $x \in \Gamma$. Položme

$$R_1(x) = S(x) \cup V(x).$$

Platí $R_1(x) \subseteq T(x)$. Položme pro jakoukoli množinu $M \subseteq \Gamma$

$$S(M) = \bigcup_{x \in M} S(x), \quad V(M) = \bigcup_{x \in M} V(x),$$

$$R(M) = S(M) \cup V(M)$$

a definujme indukcí množiny

$$R_2(x) = R(R_1(x)), \ldots, R_{n+1}(x) = R(R_n(x)), \ldots$$

Buď $M \subseteq T(x)$. Z $R_1(x) \subseteq T(x)$ lze odvodit $R(M) \subseteq T(x)$; platí tedy $R_n(x) \subseteq \subseteq T(x)$ pro každé $x \in \Gamma$ a pro $n = 1, 2, \ldots$ Avšak platí (viz též [87], str. 503]

$$R(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(x);$$

tedy

$$R(x) \subseteq T(x) \quad \text{pro} \quad x \in \Gamma$$

a teorém 2 je dokázán.

Teorém 3. *V adekvátním jazyce je T pravidelným zákrytem R.*

Důkaz. Nechť jsou $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$, $u \in \Gamma$ taková, že

$$R(x) \subseteq T(u), \tag{1}$$

$$R(y) \subseteq T(u). \tag{2}$$

Máme dokázat, že

$$R(x) \underset{R}{\rightarrow} R(y). \tag{3}$$

Buď

$$R(z_1) \ldots R(z_{i-1})\, R(x)\, R(z_{i+1}) \ldots R(z_n) \tag{4}$$

vyznačená R-struktura. Existuje tedy vyznačená fráze

$$\varphi = w_1 \ldots w_{i-1} w_i w_{i+1} \ldots w_n \tag{5}$$

taková, že $R(\varphi)$ splývá s R-strukturou (4). Z toho lze odvodit, že

$$R(w_j) = R(z_j) \quad (1 \leqq j \leqq n, j \neq i) \tag{6}$$

$$R(w_i) = R(x). \tag{7}$$

Na druhé straně platí $V(w_j) \subseteq R(w_j)$ pro $1 \leqq j \leqq n$; V-struktura

$$V(w_1) \ldots V(w_{i-1})\, V(w_i)\, V(w_{i+1}) \ldots V(w_n) \tag{8}$$

je tedy vyznačená v důsledku toho, že fráze φ daná relací (5) je rovněž vyznačená. Z relací (6) a (7) lze odvodit

$$V(w_j) \subseteq R(z_j) \quad (1 \leqq j \leqq n, j \neq i), \tag{9}$$

$$V(w_i) \subseteq R(x). \tag{10}$$

Použitím teorému 2 a inkluzí (1), (2), (9) a (10) obdržíme

$$V(w_j) \subseteq T(z_j) \supseteq V(z_j) \quad (1 \leqq j \leqq n, j \neq i), \tag{11}$$

$$V(w_i) \subseteq T(u) \supseteq V(y). \tag{12}$$

Z relací (11) a (12) lze odvodit na základě rovnosti $V' = T$

$$V(w_i) \underset{V}{\rightarrow} V(z_j) \quad (1 \leqq j \leqq n, j \neq i), \tag{13}$$

$$V(w_i) \underset{V}{\rightarrow} V(y). \tag{14}$$

Z relací (13), (14) a z toho, že V-struktura (8) je vyznačená, lze odvodit, že V-struktura

$$V(z_1) \ldots V(z_{i-1})\, V(y)\, V(z_{i+1}) \ldots V(z_n)$$

je rovněž vyznačená. Na základě relace $V(a) \subseteq R(a)$ pro každé $x \in \Gamma$ vyplývá, že R-struktura

$$R(z_1) \ldots R(z_{i-1})\, R(y)\, R(z_{i+1}) \ldots R(z_n)$$

je vyznačená. Tuto R-strukturu však obdržíme z relace (4), jestliže výraz $R(x)$ nahradíme výrazem $R(y)$; tedy

$$R(x) \underset{R}{\rightarrow} R(y).$$

Protože předpoklady (1) a (2) jsou symetrické vzhledem k x a y, vyplývá z toho, že platí též

$$R(y) \underset{R}{\rightarrow} R(x),$$

čímž je teorém 3 dokázán.

Teorém 4. *V adekvátním jazyce platí $R' = T$.*

Důkaz. Teorém 1 v kapitole 4 říká: Je-li P zákrytem rozkladu Q, pak $P' = Q'$ právě tehdy, když je tento zákryt pravidelný. Položme $P = T$ a $Q = R$. Na základě teorému 3 je T pravidelným zákrytem R, tedy $T' = R'$. Na druhé straně platí $T = V'$, tedy $T' = (V')'$. T je však pravidelným zákrytem V; užijeme-li znovu teorému 1 v kapitole 4, obdržíme tedy $T' = T$; tedy $T = R'$ a teorém 4 je dokázán.

Pro adekvátní jazyky je charakteristická každá z vlastností, které jsou konstatovány v teorémech 2, 3 a 4. Skutečně platí

Teorém 5. *Je-li T v určitém jazyce zákrytem rozkladu R, pak je tento jazyk adekvátní.*

Důkaz. Z definice rozkladu R vyplývá

$$S(x) \subseteq R(x)$$

pro jakékoli $x \in \Gamma$. Na druhé straně z předpokladu vyplývá $R(x) \subseteq T(x)$ pro jakékoli $x \in \Gamma$; tedy $S(x) \subseteq T(x)$ pro jakékoli $x \in \Gamma$ a teorém 5 je dokázán.

Korolár 1. Je-li T v určitém jazyce pravidelným zákrytem rozkladu R, pak je tento jazyk adekvátní.

Korolár 2. Platí-li v určitém jazyce $T = R'$, pak je tento jazyk adekvátní.

8. Třídy. Struktura tříd

Označme $K(x)$ množinu slov y majících tu vlastnost, že nastává alespoň jeden z těchto dvou případů:

$$1.\ V(x) \cap S(y) \neq 0$$

$$2.\ V(y) \cap S(x) \neq 0\,.$$

$K(x)$ se nazývá třída slova x.

Tvrzení 1. V každém jazyce $\{\Gamma, V, \Phi\}$ platí pro jakékoli $x \in \Gamma$ inkluze

$$S(x) \cup V(x) \subseteq K(x) \subseteq R(x)\,.$$

Tvrzení 2. V každém jazyce $\{\Gamma, V, \Phi\}$ je relace $\varrho(x, y)$ definovaná slovem $y \in K(x)$ reflexívní a symetrická v Γ.

Tato dvě tvrzení vyplývají přímo z definice pojmu třídy.

Položme

$$M(x) = \bigcup_{y \in V(x)} S(y)\,, \quad N(x) = \bigcup_{y \in S(x)} V(y)\,.$$

Teorém 6. *V každém jazyce $\{\Gamma, V, \Phi\}$ platí pro jakékoli $x \in \Gamma$*

$$K(x) = M(x) \cup N(x)\,.$$

Důkaz. Buď $u \in K(x)$, tedy

$$V(x) \cap S(u) \neq 0 \quad \text{nebo} \quad V(u) \cap S(x) \neq 0\,.$$

Nastává-li první možnost, pak existuje

$$v \in V(x) \cap S(u)\,,$$

tedy $u \in S(v)$ a $v \in V(x)$ a tedy $u \in M(x)$.

Nastává-li druhá možnost, pak existuje

$$w \in V(u) \cap S(x)\,,$$

tedy $u \in V(w)$ a $w \in S(x)$ a tedy $u \in N(x)$.

Tím byla dokázána inkluze

$$K(x) \subseteq M(x) \cup N(x)\,.$$

Mějme nyní $u \in M(x) \cup N(x)$. Platí-li $u \in M(x)$, pak existuje $y \in V(x)$ takové, že $u \in S(y)$, tedy

$$y \in V(x) \cap S(u)\,,$$

tedy

$$V(x) \cap S(u) \neq 0$$

a tedy $u \in K(x)$. Platí-li $u \in N(x)$, pak existuje $y \in S(x)$ takové, že $u \in V(y)$; platí tedy

$$y \in S(x) \cap V(u)\,,$$

tedy

$$S(x) \cap V(u) \neq 0$$

a tedy $u \in K(x)$.

Tím byla dokázána inkluze

$$M(x) \cup N(x) \subseteq K(x)$$

a teorém 6 je dokázán.

Poznámka. Použitím zápisu, který jsme zavedli v důkazu teorému 2, obdržíme

$$M(x) = S(V(x))\,, \quad N(x) = V(S(x))\,.$$

Položme pro každé $x \in \Gamma$

$$H(x) = \bigcup_{K(y) \cap K(x) \neq 0} K(y)\,.$$

Tvrzení 3. V jakémkoli jazyce $\{\Gamma, V, \Phi\}$ platí pro jakékoli $x \in \Gamma$ relace $H(x) \subseteq R(x)$.

Důkaz. Buď $z \in H(x)$. Existuje tedy $y \in \Gamma$ takové, že

$$z \in K(y) \quad \text{a} \quad K(y) \cap K(x) \neq 0\,.$$

Buď

$$t \in K(y) \cap K(x)\,.$$

Na základě tvrzení 1 a 2 a na základě toho, že R je rozklad množiny Γ, platí

$$t \in K(x) \subseteq R(x),$$
$$y \in K(t) \subseteq R(t) = R(x),$$
$$z \in K(y) \subseteq R(y) = R(x),$$

což jsme měli dokázat.

9. Homogenní jazyky

Jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ se nazývá homogenní nebo konformní, jestliže relace

$$S(x) \cap V(y) \neq 0$$

implikuje relaci

$$S(y) \cap V(x) \neq 0$$

pro jakákoli $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$.

Buď $\{\Gamma, V, \Phi\}$ libovolný jazyk. Je-li slovo $x \in \Gamma$ takové, že pro $y \in V(x)$ a $z \in S(x)$ platí

$$S(y) \cap V(z) \neq 0,$$

říkáme, že x je homogenní nebo konformní slovo. Je-li každé slovo množiny Γ homogenní, říkáme, že jazyk Γ je lokálně homogenní.

Teorém 7. *Jazyk $\mathscr{L}$ je homogenní právě tehdy, když je lokálně homogenní.*

Důkaz. Buď $\mathscr{L}$ homogenní jazyk a buď $y \in V(x)$, $z \in S(x)$, kde $x \in \Gamma$. Z toho vyplývá, že $x \in V(y)$ a $x \in S(z)$, tedy

$$V(y) \cap S(z) \neq 0.$$

Na základě homogennosti z toho lze odvodit, že $S(y) \cap V(z) \neq 0$. Z toho vyplývá, že x je homogenní slovo. Protože však x je v množině Γ libovolné, je jazyk $\mathscr{L}$ lokálně homogenní.

Mějme nyní lokálně homogenní jazyk $\mathscr{L}$ a $u \in \Gamma$, $v \in \Gamma$ taková, že platí

$$V(u) \cap S(v) \neq 0.$$

Existuje tedy slovo $w \in \Gamma$ takové, že

$$w \in V(u) \cap S(v);$$

v důsledku toho platí

$$u \in V(w), \quad v \in S(w).$$

Na základě předpokladu o lokální homogennosti je však w homogenní slovo, a tedy

$$S(u) \cap V(v) \neq 0$$

a jazyk $\mathscr{L}$ je homogenní.

Teorém 8. *Homogenní jazyk je adekvátní.*

Důkaz. 1. Dokažme nejprve tuto vlastnost:

Platí-li $y \in S(x)$ a $y' \in V(y)$, pak existuje slovo $x' \in V(x)$ takové, že $y' \in S(x')$.

Z relace $y \in S(x)$ lze odvodit relaci $x \in S(y)$. Na druhé straně platí $y' \in V(y)$. Protože jazyk je homogenní, je na základě teorému 7 lokálně homogenní, a tedy slovo y je homogenní. Z toho vyplývá, že

$$V(x) \cap S(y') \neq 0.$$

Mějme pak

$$x' \in V(x) \cap S(y');$$

slovo x' vyhovuje žádané podmínce.

2. Buď $y \in S(x)$; ukážeme, že

$$V(y) \underset{V}{\sim} V(x).$$

Buď

$$\dots V_1 \, V(y) \, V_2 \dots$$

vyznačená V-struktura; existuje tedy vyznačená fráze

$$\dots v_1 y' v_2 \dots$$

taková, že

$$\dots v_1 \in V_1, \quad y' \in V(y), \quad v_2 \in V_2, \dots$$

Užijeme-li vlastnosti, kterou jsme dokázali v bodě 1., můžeme odvodit existenci slova $x' \in V(y)$ takového, že

$$y' \in S(x');$$

fráze

$$\dots v_1 x' v_2 \dots$$

je tedy vyznačená. Z toho vyplývá, že V-struktura

$$\dots V_1 \, V(x) \, V_2 \dots$$

je vyznačená, a tedy platí

$$V(y) \underset{V}{\rightarrow} V(x).$$

Abychom dokázali relaci

$$V(x) \underset{V}{\to} V(y),$$

stačí si uvědomit, že vlastnost, kterou jsme dokázali v bodě 1, lze vyjádřit i takto: Platí-li $x \in S(y)$ a $x' \in V(y)$, pak existuje slovo $y' \in V(y)$ takové, že $x' \in S(y')$.

10. Existence adekvátních jazyků, které nejsou homogenní

Teorém 9. *Existuje adekvátní jazyk, který není homogenní.*

Důkaz. Položme

$$\Gamma = \{a, b, c, d\}, \quad V(a) = \{a, b\}, \quad V(c) = \{c, d\},$$

$$\Phi = \{ad, bb, ab, bc, bd, dc, db, dd\}.$$

Platí

$$S(a) = \{a\}, \quad S(b) = \{b, d\} = S(d), \quad S(c) = \{c\}.$$

Z toho vyplývá, že

$$V(a) \cap S(d) = \{b\} \neq 0,$$

zatímco

$$V(d) \cap S(a) = \{c, d\} \cap \{a\} = 0;$$

uvažovaný jazyk tedy není homogenní.

Ukažme nyní, že platí

$$S(x) \subseteq T(x)$$

pro jakékoli $x \in \Gamma$. Platí-li $x = a$ nebo $x = c$, je inkluze zřejmá, neboť platí vždy $x \in T(x)$. Mějme nyní $x = b$. Platí $b \to d$ a $d \to b$; je tedy třeba dokázat, že platí

$$V(b) \underset{V}{\sim} V(d).$$

Aby byla V-struktura vyznačená, je nutné, aby obsahovala pouze dva výrazy. Existují čtyři V-struktury vytvořené ze dvou výrazů:

$$V(b)\,V(b), \quad V(d)\,V(d), \quad V(b)\,V(d) \quad \text{a} \quad V(d)\,V(b).$$

Je zřejmé, že všechny tyto čtyři V-struktury jsou vyznačené, a tedy $V(b)$ je V-ekvivalentní s $V(d)$; tím je teorém 9 dokázán.

11. Totožnost rozkladu na třídy s rozkladem na úseky v homogenních jazycích

Teorém 10. *V homogenním jazyce platí $y \in R(x)$ právě tehdy, když $V(x) \cap S(y) \neq 0$.*

Důkaz. Mějme nejprve $y \in R(x)$. Existuje tedy řetězec

$$x = x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n = y$$

takový, že

$$x_{i+1} \in S(x_i) \cup V(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Dokážeme úvahou založenou na indukci, že

$$V(x) \cap S(x_j) \neq 0 \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

zvláštní případ $j = n$ je právě relace, kterou je třeba dokázat.

Relace je pravdivá pro $j = 1$, neboť $x_1 = x$, a tedy

$$x \in V(x) \cap S(x_1).$$

Předpokládejme, že relace je pravdivá pro každé $j \leqq i$ a že tedy

$$V(x) \cap S(x_j) \neq 0 \quad \text{pro} \quad j \leqq i.$$

Z homogennosti jazyka vyplývá, že

$$V(x_j) \cap S(x) \neq 0 \quad \text{pro} \quad j \leqq i.$$

Platí však

$$x_{i+1} \in V(x_i) \cup S(x_i).$$

Platí-li $x_{i+1} \in V(x_i)$, platí také $V(x_i) = V(x_{i+1})$; z relace

$$V(x_i) \cap S(x) \neq 0$$

lze tedy odvodit

$$V(x_{i+1}) \cap S(x) \neq 0,$$

a jelikož jde o homogenní jazyk, platí také

$$V(x) \cap S(x_{i+1}) \neq 0.$$

Platí-li $x_{i+1} \in S(x_i)$, platí také $S(x_i) = S(x_{i+1})$; z relace

$$V(x) \cap S(x_i) \neq 0$$

lze tedy odvodit, že

$$V(x) \cap S(x_{i+1}) \neq 0.$$

Z toho vyplývá, že platnost relace $V(x) \cap S(x_j) \neq 0$ pro $j \leqq i$ implikuje její platnost pro $j = i + 1$, a tedy

$$V(x) \cap S(y) \neq 0 .$$

Mějme nyní $V(x) \cap S(y) \neq 0$. Existuje tedy z takové, že

$$z \in V(x) \cap S(y) ;$$

to znamená, že existuje řetězec x, y, z, kde $x \in V(z)$ a $z \in S(y)$, tedy $y \in R(x)$.

Teorém 11. *Jestliže v určitém jazyce relace $y \in R(x)$ implikuje relaci $V(x) \cap \cap S(y) \neq 0$, je tento jazyk homogenní.*

Důkaz. Předpokládejme, že $V(x) \cap S(y) \neq 0$. Jak bylo ukázáno v závěru důkazu teorému 10, platí za těchto podmínek $y \in R(x)$, tedy $x \in R(y)$, a tedy na základě předpokladu platí

$$V(y) \cap S(x) \neq 0 .$$

Závěr: Relace $V(x) \cap S(y) \neq 0$ implikuje relaci $V(y) \cap S(x) \neq 0$; jazyk je tedy homogenní.

Teorém 12. *V homogenním jazyce platí $K(x) = R(x)$ pro jakékoli $x \in \Gamma$. Jinými slovy třídy splývají s úseky.*

Důkaz. Buď $x \in K(y)$. Z toho vyplývá, že $V(x) \cap S(y) \neq 0$ nebo $V(y) \cap S(x) \neq 0$. V obou těchto případech existuje z takové, že x, z a y tvoří řetězec; tedy $x \in \in R(y)$.

Mějme nyní $x \in R(y)$. Z homogennosti jazyka vyplývá na základě teorému 10, že $V(y) \cap S(x) \neq 0$ a tedy $x \in K(y)$.

Poznámka. Předpoklad, že jazyk je homogenní, přichází v úvahu pouze při důkazu implikace

$$x \in R(y) \Rightarrow x \in K(y) .$$

Inkluze $K(x) \subseteq R(x)$ je pravdivá pro jakékoli $x \in \Gamma$ a pro jakýkoli uvažovaný jazyk. (Viz tvrzení 1.)

Korolár 3. V homogenním jazyce definují třídy $K(x)$ rozklad K množiny Γ a platí $K' = T$.

Důkaz. Na základě teorému 8 je jazyk adekvátní. Můžeme použít teorému 4 a obdržíme $R' = T$. Z teorému 12 s přihlédnutím k tomu, že úseky definují rozklad množiny Γ, vyplývá toto: třídy $K(x)$ definují rozklad K množiny Γ; platí $K = R$ a $K' = T$.

12. Další kritéria homogennosti

Teorém 13. *Jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ je homogenní právě tehdy, když $M(x) = N(x)$ pro jakékoli $x \in \Gamma$.*

Důkaz. Buď $\{\Gamma, V, \Phi\}$ homogenní jazyk. Pro $u \in M(x)$ existuje $y \in V(x)$ takové, že $u \in S(y)$; tedy

$$V(x) \cap S(u) \neq 0 .$$

Na základě homogennosti z toho vyplývá relace

$$V(u) \cap S(x) \neq 0 .$$

Buď

$$z \in V(u) \cap S(x) .$$

Platí $u \in V(z)$ a $z \in S(x)$, tedy $u \in N(x)$. Z toho vyplývá, že

$$M(x) \subseteq N(x) .$$

Mějme nyní $u \in N(x)$. Existuje $y \in S(x)$ takové, že $u \in V(y)$, tedy $S(x) \cap V(u) \neq \neq 0$. Z toho lze na základě homogennosti odvodit, že $S(u) \cap V(x) \neq 0$. Buď

$$z \in S(u) \cap V(x) .$$

Platí $u \in S(z)$ a $z \in V(x)$, tedy $u \in M(x)$. Z toho vyplývá, že

$$N(x) \subseteq M(x) .$$

Závěr: Homogennost jazyka implikuje rovnost

$$M(x) = N(x)$$

pro jakékoli $x \in \Gamma$.

Mějme nyní $M(x) = N(x)$ pro jakékoli $x \in \Gamma$. Platí-li

$$V(x) \cap S(y) \neq 0 ,$$

nechť platí

$$z \in V(x) \cap S(y) .$$

Platí $x \in V(z)$ a $z \in S(y)$, a tedy $x \in N(y)$. Avšak $M(y) = N(y)$, a tedy $x \in M(y)$. To znamená, že existuje slovo $u \in V(y)$ takové, že $x \in S(u)$. Z toho vyplývá, že

$$u \in S(x) \cap V(y) .$$

Závěr: Relace $V(x) \cap S(y) \neq 0$ implikuje relaci

$$V(y) \cap S(x) \neq 0 .$$

Z rovnosti $M(x) = N(x)$ pro jakékoli $x \in \Gamma$ tedy vyplývá, že jazyk je homogenní. Tím je teorém 13 dokázán.

Korolár 4. V homogenním jazyce platí $K(x) = M(x) = N(x)$ pro jakékoli $x \in \Gamma$.

Důkaz. Bezprostřední důsledek teorémů 6 a 13.

Teorém 14. *Jestliže pro každé $x \in \Gamma$ platí*

$$N(x) \subseteq M(x),$$

je jazyk homogenní.

Důkaz. Ověření tohoto teorému je obsaženo implicite v důkazu teorému 13. Na tomto místě je podáme obšírněji. Buď $V(x) \cap S(y) \neq 0$. Existuje tedy

$$z \in V(x) \cap S(y),$$

z čehož vyplývá, že $x \in V(z)$ a $z \in S(y)$. Z toho lze odvodit, že $x \in N(x)$. Avšak $N(y) \subseteq \subseteq M(y)$, a tedy $x \in M(y)$; existuje slovo $u \in V(y)$ takové, že $x \in S(u)$. Platí tedy

$$V(y) \cap S(y) \neq 0$$

a jazyk je homogenní.

Podobným postupem odvodíme

Teorém 14'. *Jestliže pro každé $x \in \Gamma$ platí*

$$M(x) \subseteq N(x),$$

je jazyk homogenní.

Z teorémů 6, 14 a 14' vyplývají tyto koroláry:

Korolár 5. Platí-li $M(x) = K(x)$ pro jakékoli $x \in \Gamma$, je jazyk homogenní.

Korolár 6. Platí-li $N(x) = K(x)$ pro jakékoli $x \in \Gamma$, je jazyk homogenní.

13. Obecná vlastnost rozkladů

Teorém 15. *Mějme dány v libovolném jazyce tři rozklady L, P a Q takové, že platí*

$$L(x) \subseteq P(x) \supseteq Q(x) \quad \textit{pro jakékoli} \quad x \in \Gamma.$$

Platí-li $L' = Q'$, pak platí $P' = L'$.

Důkaz. Teorém 1 v kapitole 4 praví: Je-li P_1 zákrytem rozkladu P_2, platí $P'_1 = P'_2$ právě tehdy, když je zákryt pravidelný.

Označme rozklad L' jako H a položme $P_1 = P$, $P_2 = L$. Přitom P je zákrytem L; pro důkaz teorému 15 tedy stačí dokázat, že uvedený zákryt je pravidelný.

Mějme k tomu tři slova x, y a u taková, že

$$L(x) \subseteq P(u) \supseteq L(y).$$

Platí

$$P(u) \subseteq H(u),$$

neboť H, které je zákrytem Q $(Q' = H)$, je tím spíše zákrytem P. Z toho vyplývá, že

$$L(x) \subseteq H(u) \supseteq L(y).$$

Z rovnosti $L' = H$ však lze odvodit, že H je pravidelným zákrytem L, a tedy

$$L(x) \underset{L}{\sim} L(y).$$

Z toho vyplývá, že P je pravidelným zákrytem L a teorém 15 je tím dokázán.

Teorém 16 (lepší formulace koroláru 3). *Buď $\{\Gamma, V, \Phi\}$ adekvátní jazyk. Jestliže třídy $K(x)$ definují rozklad K množiny Γ, pak $K' = T$.*

Důkaz. Užijme teorému 15 a položme

$$L = V, \ P = K \text{ a } Q = R.$$

Na základě tvrzení 1 a teorému 4 jsou všechny předpoklady teorému 15 splněny, a tedy

$$K' = V' = R' = T.$$

14. Prosté jazyky

Jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ je prostý, je-li homogenní a platí-li

$$V(x) \cap S(x) = \{x\} \text{ pro jakékoli } x \in \Gamma.$$

Z definice vyplývá, že každý prostý jazyk je homogenní.
Opak neplatí:

Teorém 17. *Existuje homogenní jazyk, který není prostý.*

Důkaz. Buď Γ libovolná množina. Definujme množinu Φ tak, aby výraz $S(x)$ neobsahoval alespoň pro jedno $x \in \Gamma$ méně než dvě slova. Položme $V(x) = S(x)$ pro jakékoli $x \in \Gamma$. Z toho vyplývá, že pro jakákoli $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$ platí

$$V(x) \cap S(y) = S(x) \cap V(y);$$

platí-li $V(x) \cap S(y) \neq 0$, platí tedy $S(x) \cap V(y) \neq 0$ a jazyk je homogenní.

Uvažovaný jazyk není prostý, protože pro jakékoli $x \in \Gamma$ platí

$$V(x) \cap S(x) = S(x) ;$$

jestliže $S(x)$ obsahuje alespoň dvě slova, platí tedy

$$V(x) \cap S(x) \neq \{x\} .$$

Tím je teorém 17 dokázán.

Buď $\{\Gamma, V, \Phi\}$ libovolný jazyk. Slovo $x \in \Gamma$ se nazývá prosté slovo, jestliže pro $y \in V(x)$ a $z \in S(x)$ je množina

$$S(y) \cap V(z)$$

neprázdná a obsahuje pouze jedno slovo.

Jazyk se nazývá lokálně prostý, je-li každé jeho slovo prosté.

Teorém 18. *Jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ je prostý právě tehdy, když je lokálně prostý.*

Důkaz. Buď $\{\Gamma, V, \Phi\}$ prostý jazyk a buď $x \in \Gamma$. Vzhledem k tomu, že prostý jazyk je homogenní, a na základě teorému 7 vyplývá, že x je homogenní slovo, a tedy pro $y \in V(x)$ a $z \in S(x)$ platí

$$S(y) \cap V(z) \neq 0 .$$

Předpokládejme pro důkaz sporem, že existují dvě slova x' a x'', $x' \neq x''$ taková, že

$$x' \in S(y) \cap V(z) \quad \text{a} \quad x'' \in S(y) \cap V(z) .$$

Z toho vyplývá, že

$$V(x') = V(x'') = V(z) ,$$
$$S(x') = S(x'') = S(y) ,$$

tedy

$$V(x') \cap S(x') = V(x'') \cap S(x'') = S(y) \cap V(z) ;$$

v důsledku toho platí

$$x'' \in V(x') \cap S(x') .$$

V každém případě však také platí, že

$$x' \in V(x) \cap S(x') .$$

Předposlední relace odporuje předpokladu, že jazyk je prostý, neboť tento předpoklad žádá, aby množina $V(x') \cap S(x')$ byla vytvořena z jediného slova, totiž x'. Jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ je tedy lokálně prostý.

Předpokládejme nyní, že jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ je lokálně prostý. Z definice vyplývá, že prosté slovo je homogenní; jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ je tedy lokálně homogenní a na základě teorému 7 je homogenní. Podmínka

$$V(x) \cap S(x) = \{x\}$$

je tedy splněna pro jakékoli $x \in \Gamma$; skutečně stačí v definici pojmu prostého slova klást $y = z = x$ a uvědomit si, že v každém případě platí $x \in S(x) \cap V(x)$.

15. Izolační jazyky

Jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ se nazývá izolační nebo amorfní, jestliže pro každé $x \in \Gamma$ platí $V(x) = \{x\}$.

Teorém 19. *Každý izolační jazyk je prostý.*

Důkaz. Platí-li $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$ a

$$S(x) \cap V(y) \neq 0 ,$$

pak z rovnosti

$$V(y) = \{y\}$$

lze odvodit, že $y \in S(x)$; platí tedy

$$S(x) = S(y)$$

a

$$S(y) \cap V(x) = S(x) \cap V(x) \neq 0 ,$$

neboť

$$x \in S(x) \cap V(x) .$$

Závěr: Relace $S(x) \cap V(y) \neq 0$ implikuje relaci

$$S(y) \cap V(x) \neq 0 ;$$

jazyk je tedy homogenní.

Na druhé straně platí pro jakékoli $x \in \Gamma$

$$S(x) \cap V(x) = S(x) \cap \{x\} = \{x\} ;$$

jazyk je tedy prostý.

Tvrzení 4. Existuje prostý jazyk, který není izolační.

Důkaz. Položme

$$\Gamma = \{a, b, c, d\}, \quad \Phi = \{ac, bc, ad, bd\};$$

definujme rozklad V množiny Γ takto:

$$\Gamma = \{a, c\} \cup \{b, d\}.$$

Platí

$$S(a) = S(b) = \{a, b\}, \quad V(a) = V(c) = \{a, c\},$$
$$S(c) = S(d) = \{c, d\}, \quad V(b) = V(d) = \{b, d\},$$

tedy

$$\begin{aligned}
&V(a) \cap S(a) = \{a\}, && V(a) \cap S(b) = \{a\}, && V(b) \cap S(a) = \{b\},\\
&V(a) \cap S(c) = \{c\}, && V(c) \cap S(a) = \{a\}, && V(a) \cap S(d) = \{c\},\\
&V(d) \cap S(a) = \{b\}, && V(b) \cap S(b) = \{b\}, && V(b) \cap S(c) = \{d\},\\
&V(c) \cap S(b) = \{a\}, && V(b) \cap S(d) = \{d\}, && V(d) \cap S(b) = \{b\},\\
&V(c) \cap S(d) = \{c\}, && V(d) \cap S(c) = \{d\}, && V(c) \cap S(c) = \{c\},\\
& && V(d) \cap S(d) = \{d\};
\end{aligned}$$

jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ je tedy prostý.

Tento jazyk však není izolační, neboť pro jakékoli $x \in \Gamma$ platí

$$V(x) \neq \{x\}.$$

Analogicky podle izolačních jazyků je možno zkoumat jazyky s vlastností $S(x) = \{x\}$ pro každé $x \in \Gamma$. Je zřejmé, že takový jazyk je prostý, avšak opak neplatí. Existují izolační jazyky, pro které $S(x) \neq \{x\}$ alespoň pro jedno slovo x, a existují neizolační jazyky, pro které $S(x) = \{x\}$ pro jakékoli $x \in \Gamma$.

Pro jazyk, ve kterém $S(x) = \{x\}$ pro jakékoli $x \in \Gamma$, je pojem distribuce triviální.

16. Zcela adekvátní jazyky

Některé přirozené jazyky vyhovují silnější podmínce, než je ta, která charakterizuje adekvátní jazyky: z toho, že slovo x dominuje nad slovem y ($x \to y$), vyplývá, že x a y patří k témuž slovnímu druhu. Tento případ vede k následující definici:

Jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ je zcela adekvátní, jestliže relace $x \to y$ ($x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$) implikuje příslušnost slov x a y k témuž typu.

Z toho, že příslušnost slov x a y k téže rodině implikuje relaci $x \to y$, vyplývá, že každý zcela adekvátní jazyk je adekvátní. Opak tohoto tvrzení neplatí, jak vyplývá z

Tvrzení 5. Existuje izolační (tedy tím spíše adekvátní) jazyk, který není zcela adekvátní.

Důkaz. Položme

$$\Gamma = \{a, b, c\}, \quad V(a) = \{a\}, \quad V(b) = \{b\}, \quad V(c) = \{c\},$$
$$\Phi = \{ab, cb, cc\}.$$

Je zřejmé, že

$$S(a) = \{a\}, \quad S(b) = \{b\}, \quad S(c) = \{c\}.$$

Na druhé straně lze pozorovat, že $a \to c$; kdyby jazyk byl zcela adekvátní, platilo by tedy

$$V(a) \underset{V}{\sim} V(c).$$

Tato relace však neplatí. V-struktura

$$V(c)\, V(c)$$

je totiž vyznačená, zatímco V-struktura

$$V(a)\, V(c),$$

kterou získáme z první V-struktury, nahradíme-li v ní první výraz výrazem $V(a)$, vyznačená není. Uvažovaný jazyk tedy není zcela adekvátní a tvrzení 5 je dokázáno.

17. Neporovnatelnost pojmů neizolačního homogenního jazyka a jazyka zcela adekvátního

Pojem homogenního jazyka není zobecněním pojmu zcela adekvátního jazyka. Platí totiž

Tvrzení 6. Existuje zcela adekvátní jazyk, který není homogenní.

Důkaz. Uvažujme jazyk, jehož jsme užili v důkazu teorému 9. Jak jsme ukázali, tento jazyk není homogenní. Ukažme, že je zcela adekvátní.

Jediné relace dominace jsou $b \to d$, $a \to b$, $d \to b$, $c \to d$, $c \to b$ a $a \to d$. Při důkazu teorému 9 jsme ukázali, že

$$V(b) \underset{V}{\sim} V(d).$$

Zbývá ukázat, že

$$V(a) \underset{V}{\sim} V(b), \quad V(a) \underset{V}{\sim} V(d), \quad V(c) \underset{V}{\sim} V(d), \quad V(c) \underset{V}{\sim} V(b).$$

Při důkazu teorému 9 však bylo poznamenáno, že všechny V-struktury vytvořené ze dvou výrazů jsou vyznačené. Z toho vyplývá, že pro každou dvojici slov x a y platí $V(x) \underset{V}{\sim} V(y)$. Zvláště platí výše uvedené V-ekvivalence a tvrzení 6 je dokázáno.

Pojem zcela adekvátního jazyka není zobecněním pojmu homogenního jazyka. Platí totiž

Tvrzení 7. Existuje neizolační homogenní jazyk, který není zcela adekvátní.

D ů k a z. Buď jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ definovaný takto:

$$\Gamma = \{a, b, c, d, e, f\}, \; \Phi = \{ab, ac, de, fe, ff\} \text{ a } V(x) = S(x) \text{ pro jakékoli } x \in \Gamma.$$

Homogennost tohoto jazyka vyplývá z relace $V(x) = S(x)$ na základě úvahy, jíž bylo použito při důkazu teorému 17. Na druhé straně jazyk není izolační, neboť $V(b) = \{b, c\} \neq \{b\}$.

Dokažme, že jazyk není zcela adekvátní. Platí totiž $d \to f$, $V(d) = \{d\}$ a $V(f) = \{f\}$ (neboť $S(d) = \{d\}$ a $S(f) = \{f\}$). Kdyby jazyk byl zcela adekvátní, muselo by platit

$$V(d) \underset{V}{\sim} V(f)\,.$$

Tak tomu však není, neboť nahradíme-li ve vyznačené V-struktuře

$$V(f)\,V(f)$$

první výraz výrazem $V(d)$, obdržíme V-strukturu

$$V(d)\,V(f)\,,$$

která již není vyznačená. Jediná fráze, která připouští V-strukturu $V(d)\,V(f)$, je totiž fráze df, která není vyznačená.

Uvažovaný jazyk tedy není zcela adekvátní a tvrzení 7 je dokázáno.

18. Pravidelné jazyky

V přirozených jazycích dvě slova, která patří k téže elementární gramatické kategorii, patří obyčejně také k témuž slovnímu druhu. Tato skutečnost vede k následující definici:

Jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ se nazývá pravidelný, jestliže pro každou počáteční rodinu F existuje typ T_1 takový, že

$$\mathscr{G}(F) \subseteq T_1\,;$$

jinými slovy elementární gramatická kategorie generovaná rodinou F je obsažena v T_1. (K definici elementární gramatické kategorie viz oddíl IV.)

Tvrzení 8. Zcela adekvátní jazyk je pravidelný.

D ů k a z. Buď $\{\Gamma, V, \Phi\}$ zcela adekvátní jazyk a buď F počáteční rodina. Buď $x \in F$. Z toho, že F je rodina, vyplývá, že pro jakékoli $y \in \mathscr{G}(F)$ platí $x \to y$. Z toho, že jazyk je zcela adekvátní, vyplývá, že x a y patří k témuž typu T_1. Avšak y je libovolné slovo z $\mathscr{G}(F)$; všechna slova z $\mathscr{G}(F)$ tedy patří k typu $T(x)$, který obsahuje x. Tím je tvrzení 8 dokázáno.

19. Ekvivalence pojmů pravidelný jazyk a zcela adekvátní jazyk v případě konečného slovníku

V následujících výkladech ukážeme, že ve zvláštním velmi důležitém případě jazyků s konečným slovníkem Γ jsou pojmy zcela adekvátní jazyk a pravidelný jazyk ekvivalentní.

Tvrzení 9. Buď $\{\Gamma, V, \Phi\}$ jazyk, pro který je množina Γ konečná. Buď $x \in \Gamma$. Existuje počáteční rodina F taková, že

$$F \to x\,.$$

D ů k a z. Je-li $S(x)$ počáteční rodina, můžeme klást $F = S(x)$. V opačném případě existuje slovo x_1 takové, že

$$x_1 \notin S(x) \quad \text{a} \quad x_1 \to x\,.$$

Je-li $S(x_1)$ počáteční rodina, můžeme klást $F = S(x_1)$. V opačném případě existuje slovo x_2 takové, že

$$x_2 \notin S(x_1) \quad \text{a} \quad x_2 \to x_1\,.$$

Je-li $S(x_2)$ počáteční rodina, můžeme klást $F = S(x_2)$.

Budeme-li takto pokračovat, obdržíme posloupnost slov

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

takových, že x_{n-1} nedominuje nad x_n, ale

$$x_n \to x_{n-1} \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Připusťme, že prvky výše uvedené posloupnosti jsou vždy po dvou navzájem odlišné; pak z toho, že množina Γ je konečná, vyplývá, že posloupnost $\{x_n\}_{1 \leqq n < \infty}$ je konečná.

Označíme-li poslední prvek posloupnosti x_l, je rodina $S(x_l)$ počáteční rodina, která dominuje nad x_{l-1}. Protože však relace $\to$ je tranzitivní v Γ, vyplývá z toho, že $S(x_l)$ dominuje nad x. Tvrzení 7 dokážeme tím, že položíme $F = S(x_l)$.

Zbývá tedy dokázat, že prvky posloupnosti $\{x_n\}_{1 \leqq n < \infty}$ jsou vždy po dvou navzájem odlišné. Připusťme pro důkaz sporem, že existují dvě přirozená čísla p a s, $p < s$ taková, že $x_p = x_s$. Z tranzitivnosti relace $\to$ vyplývá, že

$$x_p \to x_r \quad \text{pro jakékoli} \quad r \leqq s\,,$$

tedy zejména

$$x_p \to x_{p-1}\,.$$

Na druhé straně na základě definice posloupnosti $\{x_n\}_{1 \leqq n < \infty}$ platí

$$x_{p+1} \to x_p\,,$$

z čehož vyplývá, že

$$x_{p+1} \in S(x_p) ;$$

to je však v rozporu s tím, jak jsme definovali posloupnost $\{x_n\}_{1 \leqq n < \infty}$.

Prvky posloupnosti $\{x_n\}_{1 \leqq n < \infty}$ jsou tedy vždy po dvou navzájem odlišné a tvrzení 9 je dokázáno.

Jazyk se nazývá konečný, je-li jeho slovník Γ konečná množina. Upozorňujeme, že množina vyznačených frází Φ může být i v tomto případě nekonečná.

Teorém 20. *Konečný pravidelný jazyk je zcela adekvátní.*

Důkaz. Nechť jsou $x \in \Gamma$ a $y \in \Gamma$ taková, že $x \to y$. Podle tvrzení 9 existuje počáteční rodina F taková, že

$$F \to x .$$

Na základě tranzitivnosti relace $\to$ platí

$$F \to y .$$

Z toho, že F je počáteční rodina, vyplývá, že F generuje elementární gramatickou kategorii $\mathcal{G}(F)$. Zřejmě platí

$$x \in \mathcal{G}(F) , \quad y \in \mathcal{G}(F)$$

a z toho, že jazyk je pravidelný, vyplývá existence typu T_1 takového, že

$$\mathcal{G}(F) \subseteq T_1 .$$

Z toho vyplývá, že

$$x \in T_1 \quad \text{a} \quad y \in T_1 .$$

Závěr: Zvolili jsme dvě slova x a y s relací $x \to y$ a dokázali jsme, že x a y patří k témuž typu. Jazyk je tedy zcela adekvátní a teorém 20 je dokázán.

Korolár 7. Konečný jazyk je pravidelný právě tehdy, když je zcela adekvátní.

Důkaz. Bezprostřední důsledek tvrzení 8 a teorému 20.

Korolár 8. Konečný pravidelný jazyk je adekvátní.

Důkaz. Důsledek koroláru 7 a toho, že zcela adekvátní jazyk je adekvátní.

20. Existence pravidelných jazyků, které nejsou zcela adekvátní

Poznámka. Teorém 20 přestává platit, jestliže vyloučíme podmínku konečnosti. Platí totiž

Teorém 21. *Existuje pravidelný jazyk, který není zcela adekvátní.*

Důkaz. Buď

$$\Gamma = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \quad \text{pro} \quad x_i \neq x_j \quad \text{při} \quad i \neq j$$

a

$$V(x) = \{x\} \quad \text{pro každé} \quad x \in \Gamma .$$

Z definice vyplývá, že určitá fráze patří do množiny Φ, má-li tvar

$$x_1 x_1 \ldots x_1 x_p ,$$

přičemž platí, označíme-li počet výskytů slova x_1 jako n,

$$n \geqq 1 \quad \text{a} \quad p \leqq n + 1 .$$

Ukážeme, že jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ splňuje podmínky teorému.

Buď $x \in \Gamma$. Existuje přirozené číslo n takové že $x_n = x$. Položme především $n = 1$; je zřejmé, že neexistuje žádné přirozené číslo $p \neq 1$ takové, že by platilo $x_1 \to x_p$. Nahradíme-li ve vyznačené frázi $x_1 x_1$ první slovo slovem x_p, pro které $p > 1$, obdržíme totiž vždy nevyznačenou frázi.

Mějme nyní $n > 1$. Jakákoli vyznačená fráze, která obsahuje $x = x_n$, má v tomto případě tvar $x_1 \ldots x_1 x_n$, kde x_1 se opakuje alespoň $n - 1$ krát. Pro jakékoli $p \leqq n$ je fráze

$$\underbrace{x_1 x_1 \ldots x_1}_{n-1 \text{ krát}} x_p$$

vyznačená; platí tedy

$$x_n \to x_p \quad \text{pro jakékoli} \quad p \leqq n .$$

Mějme nyní $r > n$. Fráze

$$\underbrace{x_1 x_1 \ldots x_1}_{n-1 \text{ krát}} x_r$$

již není vyznačená; tedy

$$x_n \text{ nedominuje nad } x_r \text{ při žádném } r > n .$$

V důsledku toho pro každou dvojici slov x_i, x_j takových, že $i < j$, platí

$$x_j \to x_i , \quad \text{ale neplatí také} \quad x_i \to x_j .$$

Z toho vyplývá, že pro jakékoli $x \in \Gamma$ platí $S(x) = \{x\}$ a žádná rodina z množiny Γ není počáteční. Tím je triviálním způsobem vyhověno podmínce pravidelnosti jazyka.

Jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ není zcela adekvátní. Platí-li $i < j$, pak $V(x_j)$ opravdu není V-ekvivalentní s $V(x_i)$, neboť $V(x_j) = \{x_j\}$ a na druhé straně, jak jsme ukázali, platí $x_j \to x_i$.

Tím je teorém 21 zcela dokázán.

21. Jiné typy jazyků. Problémy a podněty pro další zkoumání

Je zajímavé řešit tento problém:

Problém 1. Jestliže v určitém jazyce třídy $K(x)$ definují rozklad slovníku Γ, vyplývá z toho, že tento jazyk je homogenní?

Je-li odpověď na problém 1 záporná, je třeba vzít v úvahu tyto problémy:

Problém 2. Jestliže v určitém jazyce třídy $K(x)$ definují rozklad K množiny Γ, pro který $K' = T$, vyplývá z toho, že tento jazyk je homogenní?

Problém 3. Jestliže v určitém jazyce platí $K(x) = R(x)$ pro jakékoli $x \in \Gamma$, vyplývá z toho, že tento jazyk je homogenní? Je možno v opačném případě tvrdit, že je adekvátní?

Zápornou odpověď na 1. a 2. problém a na první otázku 3. problému podal Bohdan Zelinka [155].

Je přirozené, že je třeba uvažovat tyto typy jazyků, které jsou buď zobecněním některých typů uvažovaných výše, nebo s nimi nějak souvisejí:

Jazyk se nazývá dobře adekvátní, jestliže pro $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$ a $x \to y$ platí

$$V(x) \underset{V}{\to} V(y)\,.$$

Jazyk se nazývá obráceně adekvátní, jestliže pro $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$ a $x \to y$ platí

$$V(y) \underset{V}{\to} V(x)\,.$$

Jazyk se nazývá poloadekvátní, jestliže pro $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$ a $x \in S(y)$ platí

$$V(x) \underset{V}{\to} V(y)\,.$$

Jazyk se nazývá normální, jestliže pro $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$ a $x \to y$ platí

$$x \in S(y)\,.$$

Z výše podaných definic bezprostředně vyplývají tato tvrzení:

Zcela adekvátní jazyk je dobře adekvátní.

Dobře adekvátní jazyk je adekvátní.

Adekvátní jazyk je poloadekvátní.

Obráceně adekvátní jazyk je adekvátní.

Normální adekvátní jazyk je zcela adekvátní.

Položme

$$\mathscr{P}(x) = \{y;\, x \to y\}\,, \quad \mathscr{N}(x) = \{y;\, y \to x\}\,.$$

Jazyk se nazývá zdola konformní nebo zdola homogenní, jestliže pro $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$ a

$$\mathscr{P}(x) \cap V(y) \neq 0$$

platí

$$\mathscr{P}(y) \cap V(x) \neq 0\,.$$

Jazyk se nazývá shora konformní nebo shora homogenní, jestliže pro $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$ a

$$\mathscr{N}(x) \cap V(y) \neq 0$$

platí

$$\mathscr{N}(y) \cap V(x) \neq 0\,.$$

Je zřejmé, že pro jakýkoli jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$ a pro jakékoli $x \in \Gamma$ platí

$$S(x) = \mathscr{P}(x) \cap \mathscr{N}(x)\,.$$

22. Několik bibliografických odkazů

Teorémy 1, 2, 4, 8 a 10 vyslovil bez důkazů V. A. Uspenskij v článku [151]. Tamtéž byly zavedeny pojmy adekvátního a homogenního jazyka. Pojem prostého jazyka zavedla O. S. Kulaginová v článku [82]. Tamtéž se objevuje, aniž je výslovně odvozen, pojem lokálně homogenního jazyka jako část definice pojmu jazyka prostého. Pojem úseku a řetězce zavedl I. I. Revzin v pracích [125], [127], [128]. Teorémy 1, 3, 4 a 8 byly dokázány také v knize I. I. Revzina [128] o modelech jazyka.

23. Některé aspekty adekvátních a homogenních jazyků s příklady

Buď Γ slovník přirozeného jazyka, $V(x)$ množina flektivních tvarů slova $x \in \Gamma$ a Φ množina správně tvořených frází (vět) příslušného jazyka. V přirozeném jazyce z příslušnosti určitých slov k téže distribuční třídě vyplývá jejich příslušnost k témuž slovnímu druhu; tento případ dal právě podnět k zavedení pojmu adekvátního jazyka: platí-li $y \in S(x)$, pak platí $y \in T(x)$.

Naproti tomu homogennost již není vlastní všem přirozeným jazykům. Pro studium přirozených jazyků je vhodnější pojem „homogenního slova". Homogennost přirozených jazyků je místně omezena v tom smyslu, že některá slova homogenní jsou a jiná nikoliv. Pojem homogenního jazyka je zároveň quasiideální; těžko by se našel přirozený jazyk, v němž by všechna slova byla homogenní. S výjimkou rumunštiny a latiny jsou substantiva v románských jazycích homogenní. (Viz k tomu diskusi týkající se francouzštiny a italštiny v pracích [19], [89] a [127].) Zato substantiva ve slovanských jazycích, v rumunštině, v němčině a v latině homogenní nejsou. (Viz k tomu diskusi v pracích [89], [127], [128] a [129].) Stupeň odchýlení od homogennosti je, jak ukázal I. I. Revzin v pracích [127] a [129], velmi jemným typologickým kritériem při studiu slovanských jazyků. Právě z tohoto důvodu byly zavedeny pojmy podokolí a podrodiny. Lze se nadít, že použití těchto pojmů při studiu němčiny, rumunštiny a latiny povede k stejně zajímavým výsledkům, k jakým dospěl I. I. Revzin při studiu jazyků slovanských. Tímto způsobem je možno úspěšně řešit problémy, jako je rozbor pádu, gramatického rodu a gramatického čísla.

Lze pozorovat, že homogennost je výsadou slov s analytickou flexí, jako jsou například francouzská substantiva. Naproti tomu slova s flexí syntetickou, například substantiva slovanská, rumunská, německá nebo latinská homogenní nejsou. Pojem homogenního jazyka je zároveň možno považovat za aproximaci aglutinačních jazyků (jako je například maďarština), o nichž se mluví při tradičním typologickém třídění přirozených jazyků.

24. Některé aspekty pojmů prostého a izolačního jazyka

Pojem prostého jazyka byl zaveden s ohledem na jazyky strojové. Je možno říci, že prostý jazyk je takový, kterému rozumí stroj. Pojem prostého jazyka je samozřejmě ideální; prostý přirozený jazyk neexistuje. Pro studium přirozených jazyků je vhodnější místní omezení prostého jazyka, totiž pojem prostého slova. Počet neprostých slov existujících v určitém jazyce je mírou stupně odchýlení přirozeného jazyka od jazyka prostého. Zvláště je neobyčejně zajímavé zjišťovat homogenní slova, která nejsou prostá.

K pojmu izolačního jazyka vede odpovídající pojem z tradičního typologického třídění přirozených jazyků. Už dávno bylo upozorněno na to, že je to pojem ideální. Jazyky jako čínština nebo vietnamština, které jsou obyčejně považovány za izolační, vyhovují tomuto zařazení jen přibližně; tato přibližnost se chápe v tom smyslu, jako se mluví o přibližnosti modelu vzhledem k modelovanému předmětu.

25. Konfrontace přirozených jazyků s jazyky zcela adekvátními

Přirozené jazyky jsou zpravidla zcela adekvátní. V přirozeném jazyce skutečně obvykle dochází k dominacím mezi slovy, která patří k témuž slovnímu druhu. Mohlo by se zdát, že některé případy odporují tomuto tvrzení, ale při pečlivějším rozboru se snadno přesvědčíme, že tomu tak není. Tak by se mohlo zdát, že substantivum může dominovat nad zájmenem; k tomu však zpravidla nedochází. Například francouzské substantivum Jean nedominuje nad zájmenem il, i když ve větách jako Jean mange je možno substantivum Jean nahradit tímto zájmenem; existují však věty jako c'est pour Jean ce livre, kde substantivum Jean zájmenem il nahradit nelze.

Podobně lze konstatovat, že ani zájmeno nemůže zpravidla dominovat nad substantivem.

Přesto v některých přirozených jazycích existují případy, kdy mezi dvěma slovy je relace dominace, i když patří k různým slovním druhům. Je zajímavé takové případy zjišťovat; určují stupeň odchýlení přirozeného jazyka od jazyka zcela adekvátního. Tvrzení, že přirozené jazyky jsou zcela adekvátní, ovšem implikuje statistický zřetel. Ostatně při každém přechodu od studia lingvistických systémů potenciálních k studiu přirozených lingvistických systémů skutečných přichází k uplatnění statistický zřetel, který nelze zanedbat při žádném lingvisticko-typologickém zkoumání.

26. Pravidelnost přirozených jazyků

Přirozené jazyky jsou zpravidla pravidelné. Gramatická kategorie generovaná počáteční rodinou F skutečně obsahuje všechna slova, která mají tytéž morfologické hodnoty jako slova rodiny F; užijeme-li termínu morfém a jednotka obsahu ve smyslu, který jim připisuje L. Hjelmslev, můžeme říci, že elementární gramatická kategorie je promítnutím jednotky obsahu, vytvořené z několika morfémů, do výrazového plánu. Mezi jednotkami obsahu na jedné straně a množinou elementárních gramatických kategorií na druhé straně existuje určitý izomorfismus. Mezi oběma množinami existuje vzájemně jednoznačná korespondence, která uchovává některé základní relace. Určitým relacím mezi jednotkami obsahu odpovídají určité relace mezi elementárními gramatickými kategoriemi a naopak. Určitým operacím s jednotkami obsahu odpovídají určité operace s elementárními gramatickými kategoriemi odpovídajícími těmto jednotkám. Operujeme-li s elementárními gramatickými kategoriemi, operujeme vlastně s jednotkami obsahu. Dvě slova, která odpovídají téže jednotce obsahu, však patří k témuž slovnímu druhu. Budeme tedy přirozeně očekávat, že dvě slova, která patří k téže elementární gramatické kategorii, budou patřit k témuž slovnímu druhu. Tato situace je právě zachycena v definici pravidelných jazyků.

Pro právě podaný výklad je důležitý korolár 7: u konečných jazyků je pravidelnost ekvivalentní s úplnou adekvátností. Protože přirozené jazyky jsou prakticky konečné, můžeme říci, že jsou ekvivalentní tato dvě fakta:

1. je-li mezi dvěma slovy relace dominace, pak tato slova patří k témuž slovnímu druhu;

2. patří-li dvě slova k téže elementární gramatické kategorii, pak patří k témuž slovnímu druhu.

Ostatní typy zavedených jazyků jsou přirozeným zobecněním nebo specifikací zkoumaných pojmů. V pojmu normálního jazyka je zachycen případ, kdy neexistuje jednostranná dominace; normální jazyk je tedy dosti dobrou aproximací jazyků aglutinačních.

27. Některé souvislosti s pojmy týkajícími se rozkladů

Typologické studium potenciálních lingvistických systémů může těžit z některých neočekávaných souvislostí s pojmy a fakty z různých oborů matematiky. V dalších výkladech uvedeme na tyto souvislosti několik příkladů. Odkazujeme přitom na 4. kapitolu článku V. M. Gluškova o abstraktní teorii automatů [45], kde se mluví o automatech a pologrupách.

Nechť jsou G a H dva rozklady téže množiny M. GH-řetězem, který spojuje prvky p a q z množiny M, se nazývá jakákoli konečná posloupnost p z prvků množiny M: $p = m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, m_k = q$ taková, že při jakémkoli $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k$ jsou prvky m_{i-1} a m_i obsaženy buď v téže podmnožině G_α (která nezávisí na i) z rozkladu G nebo v téže podmnožině H_β z rozkladu H.

Uvažujme nyní jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$. Položme $M = \Gamma$ a na místě rozkladů G a H uvažujme rozklad do okolí V a rozklad do rodin S. VS-řetěz, který spojuje slova p a q z množiny Γ, je vlastně řetězec ve smyslu Revzinově.

Podmnožina N množiny M se nazývá GH-souvislá, jestliže kterékoli dva její prvky mohou být spojeny GH-řetězem. Jestliže mimoto N není vlastní podmnožinou žádné GH-souvislé podmnožiny, říkáme, že N je maximální GH-souvislá podmnožina. Ve 4. kapitole práce [45] se ukazuje, že maximální GH-souvislé podmnožiny určují rozklad množiny M nazvaný sjednocení rozkladů G a H.

Přejdeme-li k tomu zvláštnímu případu, který nás zde zajímá, můžeme konstatovat, že maximální VS-souvislé podmnožiny jsou právě úseky ve smyslu Revzinově a sjednocení rozkladů V a S je právě rozklad slovníku Γ na úseky; tento rozklad byl označen R.

Dále se v práci [45] zavádí pojem automatického rozkladu a pologrupového rozkladu volné pologrupy. Tyto pojmy mají pravděpodobně určitý význam v syntagmatických modelech jazyka.

Bylo by zajímavé zjistit některé souvislosti i s pojmy týkajícími se rozkladů, které přicházejí v úvahu v teorii her. (Viz např. práci [116], str. 32–41.)

28. Pojem typu jako aproximace „slovního druhu“

Viděli jsme, že derivovaný rozklad rozkladu do okolí je rozklad do typů. Označíme-li V rozklad do okolí a T rozklad do typů, platí tedy $V' = T$; k typu dojdeme sjednocením všech okolí, která jsou navzájem V-ekvivalentní. Interpretujeme-li okolí jako paradigmata a $V(x)$ chápeme jako úhrn flektivních tvarů slova x, je zřejmé, že jakákoli definice slovního druhu musí být taková, aby dvě slova, která patří k témuž paradigmatu (tedy k témuž okolí), patřila k témuž slovnímu druhu. Opak však platit nemůže; musíme určit kritérium, podle něhož budeme moci rozhodnout, za jakých podmínek slova, patřící k dvěma různým paradigmatům, patří k témuž slovnímu druhu. Odpověď, která vyplývá z prací [82], [128] a [151], je

tato: dvě slova x a y patří k témuž slovnímu druhu, jestliže

$$V(x) \underset{V}{\sim} V(y)\,.$$

Každý typ, jinými slovy každý prvek rozkladu T, je tedy aproximací určitého slovního druhu.

Je třeba poznamenat, že zde nejde o aproximaci statistickou, nýbrž o aproximaci v logickém modelování přirozeného jevu, které zaznamenává a zachycuje, co je v příslušném jevu podstatné, nebo část tohoto podstatného. Proto by snad bylo vhodnější říkat „je modelem“ než „je aproximací“, neboť druhý výraz může vést k nedorozumění.

Mezi pojmem typu a pojmem slovního druhu, jak se ho užívá v lingvistice, je určitý nesouhlas. Při výše popsaném modelování jsme totiž předpokládali, že paradigmata určují rozklad množiny slov a že tedy dvě různá paradigmata jsou vždy disjunktní. Ve skutečnosti tomu tak vždy není; například paradigma slova cap s plurálem capete má neprázdný průnik s paradigmatem slova cap s plurálem capi.[11]

Jiného nesouhlasu mezi typem a slovním druhem si všiml V. A. Uspenskij v [151]. Uvědomíme-li si, že pojem rodiny, zavedený O. S. Kulaginovou, je modelem pojmu distribuční třídy, s níž se pracuje v deskriptivní lingvistice, a vyjdeme-li z toho, že v přirozených jazycích příslušnost dvou slov k téže distribuční třídě implikuje jejich příslušnost k témuž slovnímu druhu, musíme očekávat tento závěr:

a) Patří-li dva prvky množiny Γ k téže rodině, pak patří k témuž typu.

Jak upozornil V. A. Uspenskij v článku [151] (viz též teorém 1 v práci [82]), tvrzení a) je nepravdivé. Jazyk, pro nějž je tvrzení a) pravdivé, jsme nazvali adekvátním. Chápání typu jako logicko-matematického modelu slovního druhu je plně oprávněné jen v adekvátních jazycích.

Jiný nesouhlas mezi typem a slovním druhem je v tom, že každé slovo patří k jedinému typu, zatímco v přirozených jazycích totéž slovo může patřit k několika slovním druhům. Tak je známo, že v angličtině existují slova, která jsou zároveň slovesy, substantivy, adjektivy a adverbii.

29. Rámec, v němž dochází k modelování

Pojem typu je důležitý pro to, jak tatáž logická konstrukce může s větším či menším zdarem modelovat určitý předmět v závislosti na rámci, v němž k modelování dochází. Tak je typ v kterémkoli jazyce dosti hrubou aproximací slovního druhu a existuje jediná možnost, jak poznat, že dvě slova x a y patří k témuž slovnímu druhu: důkaz, že okolí $V(x)$ a $V(y)$ jsou V-ekvivalentní. V adekvátním jazyce se naskytuje podle teorému 4 vysloveného v práci [82] další možnost, jak poznat, že $x \in T(y)$:

[11] Jde o rumunské slovo cap (hlava), které má dvojí plurál s různým významem: capete (hlavy jako části těla) a capi (hlavy jako přední osobnosti). – *Pozn. překladatele.*

stačí ukázat, že $R(x)$ je R-ekvivalentní s $R(y)$. Třetí možnost, jak zjistit příslušnost slov x a y k témuž slovnímu druhu, vzniká podle teorému 12 vysloveného v práci [97] v jazyce homogenním: stačí dokázat, že existuje K-ekvivalence mezi třídami $K(x)$ a $K(y)$.

30. Příklad z rumunštiny

Výše vyslovené úvahy osvětlíme několika příklady. Mějme jazyk $\{\Gamma, V, \Phi\}$, kde

Γ = {casă, casei, casa, casele, caselor, case, pom, pomului, pomul, pomi, pomii, pomilor, film, filme, filmului, filmele, filmelor, filmul, frumos, frumoasă, frumoşi, frumoase, mare, mari, nou, nouă, noi};

V(casă) = {casă, casei, casa, casele, caselor, case};

V(pom) = {pom, pomului, pomul, pomi, pomilor, pomii};

V(film) = {film, filme, filmului, filmele, filmelor, filmul};

V(frumos) = {frumos, frumoasă, frumoşi, frumoase};

V(mare) = {mare, mari};

V(nou) = {nou, nouă, noi}.

Množina Φ je podle definice vytvořena ze všech syntagmat, která je možno v rumunštině utvořit použitím slov z množiny Γ. Není nesnadné prvky množiny Φ vypočítat; jen snaha o ušetření místa nás vede k tomu, že zde tato syntagmata neuvádíme.

Nyní je možno dokázat, že

$$V(\text{casă}) \underset{V}{\sim} V(\text{pom}) \underset{V}{\sim} V(\text{film}),$$

$$V(\text{frumos}) \underset{V}{\sim} V(\text{mare}) \underset{V}{\sim} V(\text{nou}),$$

ale že

$$V(\text{casă}) \text{ není } V\text{-ekvivalentní s } V(\text{frumos}).$$

Ověřme si například, že

$$V(\text{casă}) \underset{V}{\sim} V(\text{pom}).$$

Mějme V-strukturu

$$V(\text{casă})\ V(\text{frumos}).$$

Tato V-struktura je vyznačená, neboť casă $\in V$(casă) a frumoasă $\in V$(frumos). V-struktura

$$V(\text{pom})\ V(\text{casă})$$

je zřejmě rovněž vyznačená, neboť pomul $\in V$(pom) a casei $\in V$(casă). Obecně každá vyznačená V-struktura, která obsahuje V(casă), má tvar

$$V(x)\ V(\text{casă}) \quad \text{nebo} \quad V(\text{casă})\ V(x),$$

kde

$$x \in V(\text{frumos}) \cup V(\text{mare}) \cup V(\text{nou}) \cup V(\text{casă}) \cup V(\text{pom}) \cup V(\text{film}).$$

Každá z V-struktur

$$V(x)\ V(\text{pom}), \quad V(\text{pom})\ V(x)$$

je vyznačená, a tedy

$$V(\text{casă}) \underset{V}{\sim} V(\text{pom});$$

obdobně je možno dokázat, že

$$V(\text{pom}) \underset{V}{\sim} V(\text{casă}).$$

Dokažme, že V(casă) není V-ekvivalentní s V(frumos).
Mějme vyznačenou V-strukturu

$$V(\text{casă})\ V(\text{frumos}).$$

V-struktura

$$V(\text{frumos})\ V(\text{frumos})$$

vyznačená není, protože žádná konstrukce typu uv, v níž $u \in V$(frumos) a $v \in V$(frumos), nevytváří v rumunštině syntagma.

Množina Γ se tedy rozpadá na dva typy:

$$T_1 = V(\text{casă}) \cup V(\text{pom}) \cup V(\text{film});$$

$$T_2 = V(\text{frumos}) \cup V(\text{mare}) \cup V(\text{nou}).$$

První typ odpovídá slovnímu druhu zvanému substantivum, druhý typ odpovídá slovnímu druhu zvanému adjektivum.

Je třeba poznamenat, že typ T_1 je sjednocením substantiv všech tří rodů, typ T_2 je sjednocením adjektiv, která jsou různá z hlediska morfologické homonymie.

Ve výše uvedeném příkladě byly množiny Γ, V a Φ definovány tak, aby se nevyskytla slova, která by z hlediska tradiční gramatiky patřila k několika slovním druhům (jako je například slovo frumosul). Tak byl na zvláštním uvažovaném případě zcela odstraněn nesouhlas mezi typem a slovním druhem. Jakmile však vezmeme v úvahu množiny Γ, V a Φ s bohatším a rozmanitějším složením, nelze již uvedený nesouhlas odstranit. Každé rovině gramatičnosti odpovídá určité rozdělení množiny Γ na slovní druhy.

Jelikož rumunština je adekvátní jazyk, můžeme na základě teorému 4 v práci [82] tvrdit, že dvě slova, která patří do R-ekvivalentních úseků, patří k témuž slovnímu druhu. (Tvrzení o adekvátnosti rumunštiny není zcela ve shodě s tradiční gramatikou. Tak platí un $\in S$(acest), ale slovo un je považováno za člen, slovo acest za adjektivní zájmeno.)

31. Příklad z francouzštiny

Uveďme nyní příklad z francouzštiny. Jak bylo upozorněno již v práci [19], francouzská substantiva rodu mužského tvoří jednu třídu – označíme ji K_1 – a francouzská substantiva rodu ženského tvoří druhou třídu – označíme ji K_2. Protože francouzština je homogenní jazyk, stačí dokázat, že

$$K_1 \underset{K}{\sim} K_2 ,$$

a je zároveň dokázáno, že všechna francouzská substantiva patří k témuž typu.

Omezíme-li se na syntagmata typu substantivum + adjektivum nebo adjektivum + substantivum, vyplývá výše uvedená K-ekvivalence bezprostředně, neboť je-li dána vyznačená fráze $u_1 v_1$, kde $u_1 \in K_1$ a kde v_1 je adjektivum ve tvaru pro mužský rod, existuje ženský tvar $v_2 \in V(v_1)$ a tedy existuje substantivum $u_2 \in K_2$ takové, že syntagma $u_2 v_2$ je vyznačené.

Jak ukazuje příklad z francouzštiny, v homogenních jazycích lze s typy zacházet mnohem snáze než v jazycích nehomogenních, protože je možno podle torému 12 v práci [97] pracovat s třídami.

32. Jeden aspekt jazykového izomorfismu

Výše podaná definice typu umožňuje upozornit na důležitý aspekt takzvaného jazykového izomorfismu. Uvažujme tyto dva lingvistické pojmy: distribuční třídu a slovní druh. Z hlediska logického modelování jsou tyto dva pojmy nerozlišitelné, neboť oba vstupují do následujícího schématu:

Uvažujme množinu prvků X. Každý konečný uspořádaný systém prvků množiny X (přičemž se některé prvky mohou opakovat) se nazývá série. Určité série se považují za vyznačené. V množině X definujeme ekvivalenci ϱ takto: pro $x \in X$, $y \in X$ platí $x\varrho y$, jestliže pro kterékoli dvě série c_1 a c_2 jsou série $c_1 x c_2$ a $c_1 y c_2$ buď obě vyznačené, nebo obě nevyznačené (je zřejmé, že juxtapozicí několika sérií obdržíme rovněž sérii). Ověření správnosti tvrzení, že ϱ je ekvivalence, přenecháváme čtenáři.

Uvažujme nyní rozdělení množiny X na ϱ-ekvivalenční třídy. Jsou-li prvky množiny X slova a jsou-li vyznačené série správně tvořené fráze, pak jsou ϱ-ekvivalenční třídy rodinami podle pojetí O. S. Kulaginové a modelují třídy slov s identickou

distribucí. Jsou-li prvky množiny X okolí slov z množiny Γ a jsou-li vyznačené série vyznačenými V-strukturami podle pojetí O. S. Kulaginové, pak jsou ϱ-ekvivalenční třídy typy a modelují, jak jsme viděli, rozdělení slov určitého jazyka na slovní druhy.

Je zajímavé sledovat tento izomorfismus dále a hledat obdobu elementární gramatické kategorie v případě, kdy X = množina okolí z množiny Γ, Φ = množina vyznačených V-struktur. Je pravděpodobné, že matematický model elementární gramatické kategorie umožní zjistit, jaká je logická souvislost mezi substantivem a zájmenem, mezi členem a adjektivem a mezi některými typy adjektiv. Tyto předpoklady si však žádají dalšího ověření. (Matematický aparát elementární gramatické kategorie byl podrobně vyložen v kapitole IV.)

Logicko-matematické modelování tedy umožňuje, jak vyplývá z našich výkladů, nejen přesně formulovat jevy jazykového izomorfismu, ale i odhalit jeho netriviální aspekty. Izomorfismus dvou jazykových jevů spočívá právě v možnosti popsat tyto jevy až k určitému bodu pomocí jednotného schématu, tedy v možnosti přiřadit jim tentýž logicko-matematický model.

Některé aspekty modelů, které jsme vyložili v tomto oddílu, probírá již Y. Bar-Hillel v článku [4]. V češtině byly některé z vyložených pojmů dobře osvětleny v knize [34] a v článku [11]. Lingvistická typologie, kterou jsme se zabývali v kapitolách 7–21, byla částečně vyložena v článcích [97] a [100]. K jiným typologickým aspektům viz knihu V. A. Uspenského [152] a knihu S. Marcuse [101]. Matematickým modelováním slovního druhu podle pojetí O. S. Kulaginové a V. A. Uspenského se zabývá článek [88] a v článku [144] stanovil T. Tobias pomocí téhož modelu slovní druhy v estonštině. Aplikace týkající se modelování jmenného rodu podali J. Horecký [71] a S. Marcus [89]. Úvahy obsažené ve IV. a V. oddílu naší knihy jsou dále rozvíjeny a prohlubovány ve studiích B. H. Mayoha [107], [108], L. Nebeského [114] a I. I. Revzina [132] a [133].

Bibliografie k I. části

[1] APOSTEL J., MANDELBROT P., MORF A.: *Logique, langage, théorie de l'information*. Presses Universitaires de France, Paris 1957.

[2] AVANESOV R. I.: *Kratčajšaja zvukovaja jedinica v sostave slova i morfemy*. Voprosy grammatičeskogo stroja. Moskva 1955.

[3] AVRAM A.: *Cercetări asupra sonorității în limba română*. Editura Academiei R. P. R., București 1961.

[4] BAR-HILLEL Y.: On Syntactical Categories. *Journal of Symbolic Logic*, **15**, 1950, 1–16.

[5] BAR-HILLEL Y., SHAMIR E.: Finite state languages: Formal representation and adequacy problems. *Bulletin of the Research Council of Israel*, **8 F**, 1960, 155–156.

[6] BATOG T.: Logiczna rekonstrukcja pojęcia fonemu. *Studia Logica*, **11**, 1961, 139–183.

[7] – Critical remarks on Greenberg's axiomatic phonology. *Studia Logica*, **12**, 1961, 195–205.

[8] BAUDOUIN DE COURTENAY I. A.: *Vvedenije v jazykoznanije*. 5. izd., Moskva 1917.

[9] BELEVITCH V.: *Langage des machines et langage humain*. Collection Lebègue, 1956.

[10] BENZÉCRI J. P.: *Linguistique mathématique*. Université de Rennes 1964.

[11] BERKA K., NOVÁK P.: Výklad fonologických a gramatických pojmů pomocí pojmů teorie množin. (Nad knihou I. I. Revzina Modeli jazyka, Moskva 1962.) *Slovo a slovesnost* **24**/2, 1963, 133–140.

[12] BIERWISCH M.: Über den theoretischen Status des Morphems. *Studia Grammatica*, **1**, 1962, 51–89.

[13] BIRKHOFF G.: *Lattice Theory* (revised edition). New York 1948.

[14] BLOCH B.: Phonemic overlapping. *American Speech*, **16**, 1941, 267–284.

[15] – A set of postulates for phonemic analysis. *Language*, **24**/1, 1948, 3–46.

[16] BLOOMFIELD L.: A set of postulates for the science of language. *Language*, **2**, 1926, 26–31.

[17] BOLINGER D.: Visual morphemes. *Language*, **22**/4, 1946, 333–340.

[18] – On defining the morpheme. *Word*, **4**, 1948.

[19] BRAFFORT P.: *Eléments de linguistique mathématique*. Euratom, Enseignement préparatoire aux techniques de la documentation automatique. Bruxelles 1960, 51–85.

[20] BRØNDAL V.: La structure des systèmes vocaliques. In: *Travaux du cercle linguistique de Prague*, **6**, 1936, 62–74.

[21] – Structure et variabilité des systèmes morphologiques. In: *Essais de linguistique générale*, Copenhague 1943, 15–24.

[22] CANTINEAU J.: Les oppositions significatives. *Cahiers Ferdinand de Saussure*, **10**, 1952, 11–40.

[23] – Le classement logique des oppositions. *Word*, **11**/1, 1955, 1–9.

[24] CHAO Y. R.: The non-uniqueness of phonemic solutions of phonetic systems. In: *Readings in linguistics*, New York 1958, 138–154.

[25] CHERRY E. C.: Roman Jakobson's "distinctive features" as the normal coordinates of a language. In: *For Roman Jakobson*, Haag 1956.

[26] – HALLE M., JAKOBSON R.: Toward the logical description of languages in their phonemic aspects. *Language*, **29**/1, 1935.

[27] CHOMSKY N.: *Theory of language systems*. Disertační práce, 1955, 129–133.

[28] – *Syntactic structures*. Mouton & Co., 's Gravenhage 1957.

[29] – Formal properties of grammars. In: *Handbook of Mathematical Psychology*, **2**, John Wiley and Sons, Inc., New York – London 1963, kap. 12.

[30] – MILLER G. A.: Finite state language. *Information and Control*, **1**/2, 1958, 91–112.

[31] CRĂCIUN C. V.: Sur la notion de racine dans la théorie algébrique de la grammaire. *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées*, **10**/3, 1965, 321–331.

[32] CURRY H. B.: Some logical aspects of grammatical structure. In: *Proc. Symp. Appl. Math.*, **12**, Structure of language and its mathematical aspects. American Math. Soc. 1961, 56–58.

[33] ČULÍK K.: Some notes on finite state languages and events represented by finite automata using labelled graphs. *Časopis pro pěstování mat.*, **86**, 1961, 43–55.

[34] DANEŠ F., KONEČNÁ D., NEBESKÝ L., NOVÁK P., PALEK B., PANEVOVÁ J., SGALL P. (vedoucí aut. kolektivu), ŠTINDLOVÁ J., TĚŠITELOVÁ M.: *Cesty moderní jazykovědy. Jazykověda a automatizace*. Čs. spol. pro šíření pol. a věd. znalostí, Praha, Orbis 1964.

[35] DIACONESCU P.: Un mod de descriere a flexiunii nominale, cu aplicație in limba română contemporană. *Studii și cercetări lingvistice*, **12**/2, 1961, 163–192.

[36] – Pe marginea unor lucrări despre morfem. *Studii și cercetări lingvistice*, **13**/4, 1962, 519–544.

[37] – Le nombre et le genre du substantif roumain. (Analyse contextuelle.) *Revue roumaine de linguistique*, 1964, No. 2, 171–193.

[38] DOBRUŠIN R. L.: Elementarnaja grammatičeskaja kategorija. *Bjulleteň ob'edinenija po problemam mašinnogo perevoda*, 1957, 5, 19–21.

[39] – Matematičeskije metody v lingvistike. Priloženije. *Matematičeskoje prosveščenije*, **6**, 1961, 52–59.

[40] FISCHER-JØRGENSEN E.: On the definition of phoneme categories. *Acta linguistica*, **7**, 1952.

[41] FREI H.: Critères de délimitation. *Word*, **10**, 1954, 2–3.

[42] GARVIN P. L.: Syntactic units and operations. In: *Proc. of the Eighth Int. Congress of Linguistics*. Oslo 1958, 628–632.

[43] GLEASON H. A. Jr.: *An introduction to descriptive linguistics*. New York 1956.

[44] GLIVENKO V.: *Théorie générale des structures*. Paris 1938.

[45] GLUŠKOV V. M.: Abstraktnaja teorija avtomatov. *Uspechi matematičeskich nauk*, **16**/5, 1961, 3–62.

[46] GREENBERG J.: *Essays in linguistics*. New York 1957.

[47] – An axiomatization of the phonologic aspect of language. In: *Symposium on Sociological Theory*, ed. L. Gross, Evanston, New York 1959, 437–480.

[48] GROSS M.: *Théorie des langages* (cours lithographié). Paris 1964.

[49] HALLE M.: The strategy of phonemics. *Word*, **10**, 1954, 197–209.

[50] – In defense of the number two. In: *Studies presented to J. Whatmough*. 's Gravenhage The Hague, 1957, 65–72.

[51] – On the role of simplicity in linguistic description. In: *Proceedings of the Symposia in Applied Mathematics*, **12** (Structure of language and its mathematical aspects), Amer. Math. Soc., 1961, 89–94.

[52] HARARY F., PAPER H. H.: Toward a general calculus of phonemic distribution. *Language*, **35**, 1957, 143–169.

[53] HARRIS Z. S.: Morpheme alternants in linguistic analysis. *Language*, **18**, 1942, 170–177.

[54] – Discontinuous morphemes. *Language*, **21**/3, 1945, 121–127.

[55] – From morpheme to utterance. *Language*, **22**/3, 1946, 161–183.

[56] — Discourse analysis. *Language*, **28**/1, 1952, 1—30.
[57] — From phoneme to morpheme. *Language*. **31**/2, 1955, 190—222.
[58] — Co-occurrence and transformation in linguistic structure. *Language*, **33**, 1957, 283—340.
[59] — *Structural linguistics*. University of Chicago Press, 5th impression 1961.
[60] HARTNETT W. E.: Graph topology. *Notices of the American Mathematical Society*, **11**/5, 1964, 535.
[61] — Total topological spaces. *Notices of the American Mathematical Society*, **11**/5, 1964, 580.
[62] HJELMSLEV L.: *Principes de grammaire générale*. Copenhague 1928.
[63] — Essai d'une théorie des morphèmes. In: *Actes du IVᵉ Congrès international des linguistes*. Copenhague 1938, 140—151.
[64] — *Prolegomena to a theory of language*. Baltimore 1953.
[65] — *Principes de grammaire générale*. København 1958.
[66] HOCKETT Ch. F.: Problems of morphemic analysis. *Language* **23**, 1947, 321—343.
[67] — A formal statement of morphemic analysis. In: *Studies in Linguistics*, **10**, 1952, 27—39.
[68] — *A Manual of Phonology*. 1955.
[69] — Two fundamental problems in phonemics. In: *Studies in linguistics*, **7**, 1959, 33.
[70] HORÁLEK K.: A criticism of the number two (Binarism). In: *Preprints of papers for the Ninth International Congress of Linguists*, August 27—31, 1962, Cambridge, Mass., 46—47.
[71] HORECKÝ J.: Model gramatického rodu v západoslovanských jazykoch. *Jazykovedný časopis*, **17**/1, 1966, 3—12.
[72] HOŘEJŠÍ V.: Les plans linguistiques et la structure de l'énoncé. *Philologica Pragensia*, **4**, 1961, 193—203.
[73] — Essai d'une nouvelle classification des verbes français. *Philologica Pragensia*, **8**, 1965, 211—219.
[74] IVANOV V. V.: Teorija fonologičeskich različitelnych priznakov. In: *Novoje v lingvistike*, **2**, 1962, Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva, 139—172.
[75] JAKOBSON R.: Observations sur le classement phonologique des consonnes. In: *Proceedings of the 3rd International Congress of Phonetic Sciences* 1938, Ghent 1939, 34—41.
[76] — FANT G. M., HALLE M.: *Preliminaries to speech analysis: the distinctive features and their correlates*. 3rd pr. Boston (Mass.) 1955.
[77] — HALLE M.: *Fundamentals of language*. 's Gravenhage 1956.
[78] JONES D.: *The phoneme: its nature and use*. Cambridge 1950.
[79] — The history and meaning of the term "phoneme". In: *Supplément à Le maître phonétique*. Juillet-décembre, 1957.
[80] KANGER S.: The notion of a phoneme. *Statistical Methods in Linguistics*, **3**, Stockholm 1964, 43—48.
[81] KLEENE S. C.: Representation of events in nerve nets and finite automata. *Automata Studies* (C. E. Shannon and J. McCarthy, eds.), Princeton Univ. Press, 1956.
[82] KULAGINA O. S.: Ob odnom sposobe opredelenija grammatičeskich ponjatij na baze teorii množestv. *Problemy kibernetiki*, **1**, 1958, 203—214.
[83] — O mašinnom perevode s francuzskogo jazyka na russkij I. *Problemy kibernetiki*, **7**, 1960, 181—208.
[84] — Ob ispolzovanii mašiny pri sostavlenii algoritmov analiza teksta. *Problemy kibernetiki*, **7**, 1962, 209—223.
[85] MANOLIU M.: Propuneri pentru o nouă clasificare a flexiunii adjectivelor din limba română. *Limba română*, **10**/2, 1961, 117—123.
[86] MARCUS S.: Description, à l'aide de la théorie des ensembles, de certains phénomènes morphologiques. *Revue de mathématiques pures et appliquées* **6**/4, 1961, 735—744.
[87] — Structures linguistiques et structures topologiques. *Revue de mathématiques pures et appliquées*, **6**/3, 1961, 501—506.

[88] — Asupra unui model logic al părţii de vorbire. *Studii şi cercetări matematice*, **13**/1, 1962, 37—62.
[89] — Le genre grammatical et son modèle logique. *Cahiers de linguistique théorique et appliquée*, **1**, 1962, 103—122.
[90] — Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire I. *Revue de mathématiques pures et appliquées*, **7**/1, 1962, 91—107.
[91] — Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire II. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **8**/3—4, 1962, 323—329.
[92] — Ob odnoj logičeskoj modeli elementarnoj grammatičeskoj kategorii III. *Revue de mathématiques pures et appliquées*, **7**/4, 1962, 683—691.
[93] — Teorija grafov, lingvističeskije oppozicii i invariantnaja struktura. In: *Problemy strukturnoj lingvistiki*, **1**, Moskva 1962, 22—30.
[94] — Un criteriu contextual de clasificare a cuvintelor (cu aplicaţie la adjectivele din limba română). *Studii şi cercetări lingvistice*, **13**/2, 1962, 177—189.
[95] — Logičeskij aspekt lingvističeskich opozicij. In: *Problemy strukturnoj lingvistiki*, **2**, Moskva 1963, 47—74.
[96] — Teoretiko-množestvennoje opisanije nekotorych morfologičeskich javlenij. *Problemy kibernetiki*, **10**, 1963, 241—250.
[97] — Typologie des langues et modèles logiques. *Acta mathematica Academiae scientiarum hungaricae*, **14**/3—4, 1963, 269—281.
[98] — Un model matematic al fonemului. *Studii şi cercetări matematice*, **14**/3, 1963, 405—421.
[99] — *Gramatici şi automate finite*. Editura Academiei R. P. R., Bucureşti 1964.
[100] — Langues complètement adéquates et langues régulières. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **10**/1, 1964, 7—13.
[101] — *Algebraic Linguistics*; *Analytical Models*. Academic Press, New York and London, 1967.
[102] — VASILIU E.: Mathématiques et phonologie. Théorie des graphes et consonantisme de la langue roumaine. *Revue de mathématiques pures et appliquées*, **5**, 1960, fasc. 2, 319—340; fasc. 3—4, 681—704.
[103] MARTINET A.: Neutralisation et archiphonème. In: *Travaux du Cercle linguistique de Prague*, **6**, 1936, 46—57.
[104] — Rôle de la corrélation dans la phonologie diachronique. In: *Travaux du Cercle linguistique de Prague*, **8**, 1939, 273—288.
[105] — *Economie des changements phonétiques*. Berne 1955.
[106] — *Eléments de linguistique générale*. Paris 1960.
[107] MAYOH B. H.: Simple Structures Defined on a Transitive and Reflexive Graph. *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées*, **11**/1, 1966, 43—51.
[108] — Grammatical Categories. *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées*, **12**/6, 1967, 843—848.
[109] MELČUK I. A.: Morfologičeskij analiz pri mašinnom perevode (preimuščestvenno na materiale russkogo jazyka). *Problemy kibernetiki*, **6**, 1961, 207—276.
[110] MOISIL G. C.: Probleme puse de traducerea automată. Conjugarea verbelor în limba română scrisă. *Studii şi cercetări lingvistice*, **11**/1, 1960, 7—25.
[111] — Problèmes posés par la traduction automatique. La déclinaison en roumain écrit. *Cahiers de linguistique théorique et appliquée*, **1**, 1962, 123—134.
[112] MOLOŠNAJA T. N.: Voprosy različenija omonimov pri mašinnom perevode z anglijskogo jazyka na russkij. *Problemy kibernetiki*, **1**, 1958, 215—221.
[113] MOTSCH W.: Zur Stellung der Wortbildung in einem formalen Sprachmodell. *Studia Grammatica*, **1**, 1962, 31—50.
[114] NEBESKÝ L.: Conditional Replacement of Words. *The Prague Bulletin of Mathematical Linguistics*, 1965, Nr. 3, 3—12.

[115] NIDA E.: *Morphology: the descriptive analysis of words.* Ann Arbor 1946.

[116] ONICESCU O.: *Strategia jocurilor (cu aplicații la programarea liniară).* Editura Academiei R. P. R., 1961.

[117] PETERSON G. E., HARARY F.: Foundations of phonemic theory. In: *Proceedings of the Symposia of Applied Mathematics.* **12** (Structure of language and its mathematical aspects), Amer. Math. Soc., 1961, 139–165.

[118] PETROVICI E.: Sistemul fonematic al limbii române. *Studii și cercetări lingvistice*, **7**, 1956, 7–20.

[119] PJOTROVSKIJ R. G.: Ješče raz o differencijalnych priznakach fonemy. *Voprosy jazykoznanija*, **6**, 1960.

[120] POTTIER B.: Vers une sémantique moderne. In: *Travaux de linguistique et de littérature publiés par le Centre de philologie et de littérature romanes de l'Université de Strasbourg*, 2/1, 1964, 107–137.

[121] PRIETO L. J.: Traits oppositionnels et traits contrastifs. *Word*, **10**/1, 1954, 43–59.

[122] PUTNAM H.: Some issues in the theory of grammar. In: *Proceedings of the Symposia in Applied Mathematics*, **12** (Structure of language and its mathematical aspects), Amer. Mathem. Soc. 1961, 25–42.

[123] RABIN M. O., SCOTT D.: Finite automata and their decision problems. *I. B. M. Journ. Research Development*, **3**/2, 1959, 114–125.

[124] REFORMATSKIJ A. A.: Dichotomičeskaja klassifikacija differencialnych priznakov i fonematičeskaja model jazyka. In: *Voprosy teorii jazyka v sovremennoj zarubežnoj lingvistike.* Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva 1961, 106–122.

[125] REVZIN I. I.: O nekotorych aspektach sovremennych teoretičeskich issledovanij v oblasti mašinnogo perevoda. *Bjulleteň ob'jedinenija po problemam mašinnogo perevoda*, **7**, 1958, 1–12.

[126] — O logičeskoj forme lingvističeskich opredelenij (na primere opredelenija morfemy). In: *Primenenije logiki v nauke i technike.* Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva 1960, 140–148.

[127] — O nekotorych ponjatijach tak nazyvajemoj teoretiko-množestvennoj koncepcii jazyka. *Voprosy jazykoznanija*, **6**, 1960, 88–94.

[128] — *Modeli jazyka.* Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva 1962.

[129] — O ponjatijach odnorodnogo jazyka i jazyka s polnoj transformaciej i vozmožnosti ich primenenija dlja strukturnoj tipologii. In: *Strukturno-tipologičeskije issledovanija*, **1**, 1962, 19–24.

[130] — Nekotoryje formalnyje osobennosti paradigmy glagola (k probleme vnutrennej tipologii). In: *Issledovanija po strukturnoj tipologii*, Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva 1963, 94–103.

[131] — K logičeskomu obosnovaniju teorii fonologičeskich priznakov. *Voprosy jazykoznanija*, **5**, 1964, 59–65.

[132] — Nekotoryje voprosy teorii modelej jazyka. *Naučno-techničeskaja informacija – mašinnyj perevod*, 1964, N. 8, 42–46.

[133] — Rasprostranenije teoretiko-množestvennoj modeli na jazyki s grammatičeskoj omonimijej. *Naučno-techničeskaja informacija*, 1965, N. 3, 34–38.

[134] ROSETTI A.: Despre sistemul fonologic al limbii române. *Studii și cercetări lingvistice*, **7**, 1956, 21–26.

[135] SAPORTA S.: Morph, morpheme, archimorpheme. *Word*, **12**, 1956.

[136] SAUSSURE F. de: *Cours de linguistique générale*, 3ᵉ éd. Paris 1931.

[137] SESTIER A.: Contribution à une théorie ensembliste des classifications linguistiques. In: *Actes du Premier Congrès de l'Association française de calcul* (Grenoble 1960). Paris 1961, 293–305.

[138] SKALIČKA V.: *Zur ungarischen Grammatik.* Praha 1935, 13.

[139] STATI S.: Caracterul sistematic al omonimiei morfologice. *Studii și cercetări lingvistice*, **6**/1, 1960, 25–31.

[140] ŠAUMJAN S. K.: Logičeskij analiz ponjatija fonemy. In: *Logičeskije issledovanija.* Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva 1959, 159–177.

[141] — Lingvističeskije voprosy kibernetiki i strukturnaja lingvistika. *Voprosy filosofii*, **9**, 1960.

[142] — *O ponjatijach lingvističeskoj sistemy i lingvističeskogo znaka. Kratkije soobščenija.* Institut slavjanovedenija Akad. Nauk SSSR, Moskva 1961, 3–13.

[143] — *Problemy teoretičeskoj fonologii.* Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva 1962.

[144] TOBIAS T.: Časti reči v estonskom jazyke. *Soobščenija po mašinnomu perevodu*, 1, 1962, 3–96.

[145] TOGEBY K.: Structure immanente de la langue française. In: *Travaux du Cercle linguistique de Copenhague*, **6**, 1951.

[146] TONDEUR P.: Ein Beispiel zur Allgemeinen Topologie: Die Topologie einer Äquivalenzrelation. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A. I. Mathematica*, 344, 1964, 7 s.

[147] TRNKA B.: On some problems of neutralization. In: *Omagiu lui Iorgu Iordan cu prilejul împlinirii a 70 de ani.* București 1958, 861–866.

[148] TRUBECKOJ N. S.: *Principes de Phonologie* (traduit de l'allemand par J. Cantineau). Paris 1957.

[149] TWADELL W. F.: On defining the phoneme. In: *Readings in linguistics*, Washington 1957.

[150] UNGEHEUER G.: Das logische Fundament binärer Phonemklassifikationen. *Studia Linguistica*, 1959, 69–97.

[151] USPENSKIJ V. A.: *Strukturnaja tipologija jazykov.* Mosk. gos. univ., filolog. fakultet, Izd. Akad. Nauk, Moskva 1965.

[152] — K opredeleniju časti reči v teoretiko-množestvennoj sisteme jazyka. *Bjulleteň ob'jedinenija po problemam mašinnogo perevoda*, **5**, 1957, 22–26.

[153] VASILIU E.: *Fonologia limbii române.* Editura științifică, București 1964.

[154] VENDRYES J.: *Le langage.* Paris 1921.

[155] ZELINKA B.: Un langage adéquat non homogène, dont les classes sont disjointes deux à deux. *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées*, **10**/8, 1965, 1249–1251.

[156] ZÍTEK F.: Quelques remarques au sujet de l'entropie du tchèque. In: *Transactions of the Third Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Process* (Liblice 1962). Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague 1964, 841–846.

ČÁST II.

GENERATIVNÍ MODELY

ODDÍL VI

Gramatiky, konečné automaty a Kleeneho události

1. Základní pojmy

Buď D konečná množina, kterou nazveme slovník; buď m počet prvků této množiny. Prvky množiny D nazveme symboly nebo slova. Buď U volná pologrupa generovaná množinou D, tedy množina všech konečných posloupností (řetězů) vytvořených z prvků množiny D (týž prvek se v takové posloupnosti může vyskytovat několikrát).

Jakákoli – konečná nebo nekonečná – část množiny U tvoří jazyk. Řetěz, který je prvkem určitého jazyka L, nazveme větou tohoto jazyka.

Gramatikou se nazývá konečný systém pravidel, který umožňuje identifikovat jednoznačně určený jazyk L(tato definice není dosti přesná; mohli bychom ji zpřesnit takto: gramatika je algoritmus nad abecedou D, který vede k jazyku L). O jazyku L říkáme, že je generován příslušnou gramatikou.

Protože množina U je nekonečná, je množina jazyků nespočetná.

Dvě gramatiky jsou strukturně ekvivalentní nebo prostě ekvivalentní, generují-li tentýž jazyk.

Každý jazyk je možno znázornit jako strom. U kořene stromu, znázorněného bodem, začíná každá věta. Každé slovo, které může být prvním slovem ve větě, odpovídá jedné větvi, která vyrůstá od kořene. Na konci větve, odpovídající určitému slovu, vyrůstá další množina větví, z nichž každá odpovídá jednomu ze slov, která mohou stát po prvním slově. Toto větvení pokračuje tak dlouho, dokud ještě existuje věta, která neodpovídá žádné takové posloupnosti větví stromu. Obsahuje-li jazyk nekonečný počet vět, strom přiřazený tomuto jazyku bude mít nekonečný počet posloupností větví; větvení tedy bude pokračovat donekonečna.

Předpokládáme-li, že totéž slovo nemůže být znázorněno dvěma větvemi vyrůstajícími ze stejného bodu, vyplývá z toho, že každé větě bude odpovídat jednoznačně určená posloupnost větví stromu (určitá cesta podél stromu). Představíme-li si body, kde se strom větví, jako „stavy" systému, můžeme považovat strom za generátor jazyka s nekonečným počtem stavů. Pomocí takového generátoru s nekonečným počtem stavů je možno vytvořit jakýkoli jazyk. Je-li tento postup (odvozování) konečný, můžeme považovat strom za gramatiku.

2. Pojem gramatiky s konečným počtem stavů

Gramatika G s konečným počtem stavů se podle Chomského a Millera definuje dvěma množinami: konečnou množinou vnitřních stavů $S_0, S_1, \ldots, S_n$ (dále je často nazýváme jen stavy) a konečnou množinou přechodových symbolů $W_0, W_1, \ldots, W_m$. Nad těmito symboly se definuje asociativní binární operace, zvaná operace skládání nebo zřetězení a označovaná znakem $\wedge$ nebo prostým položením symbolů vedle sebe; například

$$W_{a_1} \wedge \ldots \wedge W_{a_n} \quad \text{nebo} \quad W_{a_1} W_{a_2} \ldots W_{a_n}$$

je řetěz vytvořený skládáním symbolů $W_{a_1}, \ldots, W_{a_n}$ zleva doprava v naznačeném pořádku. Obecně předpokládáme, že každá gramatika má jednotkový prvek W_0 s vlastností

$$X \wedge W_0 = W_0 \wedge X = X$$

pro jakýkoli řetěz X. Často – ne však vždy – můžeme tento prvek vyloučit, aniž změníme povahu gramatiky.

S_0 je počáteční stav. Množina

$$\{W_1, \ldots, W_m\}$$

je slovník gramatiky G.

Každou uspořádanou dvojici přirozených čísel (j, k), pro která platí $0 \leqq j \leqq m$ a $0 \leqq k \leqq n$, nazveme gramatickým pravidlem.

Budeme uvažovat určitou množinu uspořádaných trojic nezáporných celých čísel $\{(i, j, k)\}$, kterou označíme $\mathscr{T}$ a kde $0 \leqq i \leqq n$, $0 \leqq j \leqq m$, $0 \leqq k \leqq n$ a dvojice (j, k) je gramatické pravidlo. Každou trojici z množiny $\mathscr{T}$ nazveme přípustnou. Gramatické pravidlo (j, k) budeme definovat jako přípustné, jestliže existuje přirozené číslo i $(0 \leqq i \leqq n)$ takové, že trojice (i, j, k) je přípustná. Je-li trojice (i, j, k) přípustná, říkáme, že gramatika G může přejít od stavu S_i ke stavu S_k, přičemž vytvoří slovo (symbol) W_j. Pro každé i $(0 \leqq i \leqq n)$ může být stav S_i znázorněn jako množina trojic $\{(i, j, k)\}$, kde (j, k) je gramatické pravidlo. Přesněji řečeno odpovídá každému stavu S_i množina trojic $\{(i, j, k)\}$ značená $\mathscr{T}_i$ a definovaná takto: trojice (i, j, k) patří do množiny $\mathscr{T}_i$ právě tehdy, když je přípustná.

Gramatické pravidlo (j, k), pro které platí $(i, j, k) \in \mathscr{T}_i$, nazveme gramatickým pravidlem přiřazeným stavu S_i. Množinu gramatických pravidel přiřazených stavu S_i budeme značit R_i.

V dalších výkladech budeme pracovat s touto definicí: gramatika s konečným počtem stavů je systém čtyř předmětů $\{S, W, S_0, \mathscr{T}\}$, kde S je konečná množina prvků zvaných stavy, W je konečná množina prvků zvaných symboly nebo slova, S_0 je určitý prvek v S a $\mathscr{T}$ je část kartézského součinu $S \times W \times S$, jinými slovy část množiny uspořádaných trojic $\{(i, j, k)\}$, kde $0 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq m$, $0 \leqq k \leqq n$, n je počet stavů a m počet slov.

Gramatika G vychází od počátečního stavu S_0, proběhne jednu posloupnost stavů a vrátí se do stavu S_0; tím způsobem vytvoří větu, skládající se z řetězu slov v tom pořádku, v němž byla slova vybrána (detektována) při jednotlivých přechodech. Tak řetěz slov

$$W_{a_1} \wedge \ldots \wedge W_{a_q}$$

je věta generovaná gramatikou G právě tehdy, když existuje posloupnost slov

$$W_{b_1}, \ldots, W_{b_r}$$

a posloupnost stavů

$$S_{c_1}, \ldots, S_{c_{r+1}}$$

gramatiky G s vlastnostmi

(i) $c_1 = c_{r+1} = 0$;

(ii) $c_i \neq 0$ pro $1 < i < r + 1$;

(iii) pro každé i takové, že platí $1 \leqq i \leqq r$, je (c_i, b_i, c_{i+1}) jedna z trojic přiřazených stavu S_{c_i};

(iv) $W_{a_1} \wedge \ldots \wedge W_{a_q} = W_{b_1} \wedge \ldots \wedge W_{b_r}$.

Množina vět generovaných gramatikou G, označená L_G, se nazývá jazyk generovaný gramatikou G.

Délkou věty v množině L_G nazveme počet slov různých od W_0, která tvoří tuto větu (každé slovo se přitom počítá tolikrát, kolikrát se vyskytuje).

Jazyk L se nazývá jazyk s konečným počtem stavů, jestliže existuje gramatika G s konečným počtem stavů taková, že $L_G = L$.

Prázdný jazyk (který neobsahuje žádnou větu) je jazyk s konečným počtem stavů; může být generován kteroukoli gramatikou, která neobsahuje žádnou cestu s oběma krajními body v S_0.

3. Třídy gramatik s konečným počtem stavů. Nedvojznačné gramatiky

Je-li dána množina gramatik s konečným počtem stavů označená F, označíme $L(F)$ množinu jazyků generovaných gramatikami z množiny F. V následujících výkladech budeme uvažovat tyto množiny gramatik s konečným počtem stavů:

F_1 = množina všech gramatik s konečným počtem stavů.

F_2 = množina těch gramatik s konečným počtem stavů, pro něž platí implikace: pro každé j takové, že $0 \leqq j \leqq n$, platí

$$(i, 0) \in R_j \Rightarrow i = 0;$$

jinými slovy symbol různý od symbolu s nulovým účinkem nemůže zprostředkovat přechod k počátečnímu stavu.

F_3 = množina těch gramatik s konečným počtem stavů, pro něž při jakémkoli k, $0 \leqq k \leqq n$ takovém, že platí

$$(i, j) \in R_k\,,$$

dochází k rovnosti $i = 0$ právě tehdy, když $j = 0$; jinými slovy každá věta má koncový symbol W_0 a v každé větě, která obsahuje W_0, se toto W_0 vyskytuje jen jako koncový symbol.

F_4 = podmnožina těch gramatik z množiny F_3, pro které při jakémkoli j $(0 \leqq j \leqq n)$ a i $(0 \leqq i \leqq m)$ z relací

$$(i, h) \in R_j \quad \text{a} \quad (i, k) \in R_j$$

vyplývá rovnost

$$h = k\,,$$

jinými slovy od určitého stavu nelze daným symbolem přejít k dvěma různým stavům gramatiky. V tomto případě můžeme také říci, že určitá posloupnost stavů je jednoznačně určena posloupností přechodových symbolů; proto se tyto gramatiky nazývají také nedvojznačné na rozdíl od gramatik ostatních, které jsou dvojznačné. Podle této terminologie je možno charakterizovat gramatiky z množiny F_4 jako nedvojznačné gramatiky z množiny F_3.

F_5 = množina těch nedvojznačných gramatik s konečným počtem stavů, u nichž prvek s nulovým účinkem netvoří přechodový symbol, jinými slovy pro každou přípustnou trojici (i, j, k) platí $j \neq 0$.

Teorém 1. *Platí*

$$F_4 \subsetneqq F_3 \subsetneqq F_2 \subsetneqq F_1\,,$$

kde $\subsetneqq$ *značí, že množina vlevo je vlastní podmnožinou množiny vpravo.*

Teorém 2. $L(F_1) = L(F_2) = L(F_3) = L(F_4)$.

Teorém 3. *Platí-li* $L_1 \in L(F_4)$ a $L_2 \in L(F_4)$, *pak*

$$L_1 \cup L_2 \in L(F_4)\,.$$

Teorém 4. *Platí-li* $G \in F_4$, *pak existuje gramatika* $G^* \in F_4$ *taková, že množina* L_{G^*} *je doplňkem množiny* L_G *vzhledem k* U.

Teorém 5. *Množina jazyků s konečným počtem stavů a s týmž slovníkem d tvoří Booleovu algebru vzhledem k operacím sjednocení, průniku a vytvoření Doplňků. Univerzální prvek této Booleovy algebry je univerzální jazyk U.*

4. Řetězy a cykly

Předpokládejme, že v gramatice G existuje konečná posloupnost přípustných trojic

$$(i_1, j_1, k_1), (i_2, j_2, k_2), \ldots, (i_m, j_m, k_m), \ldots, (i_n, j_n, k_n)$$

s těmito vlastnostmi:

1. $i_1 = k_n$;
2. $k_m = i_{m+1}$ pro jakékoli m takové, že platí $1 \leqq m \leqq n - 1$;
3. jestliže platí $1 < m < n$, pak platí $i_1 \neq i_m \neq 0$.

Taková posloupnost trojic se nazývá cyklus gramatiky G. Stav S_{i_1} se nazývá počáteční stav cyklu. Cyklus se nazývá základní, je-li jeho počáteční stav S_0, jinými slovy jestliže $i_1 = 0$. Vyhovuje-li cyklus podmínce

4. $i_m \neq i_p$ pro $1 \leqq m < p < n$ nebo $1 < m < p \leqq n$, říkáme, že cyklus je neredukovatelný. V opačném případě říkáme, že je redukovatelný.

Číslo n definuje délku cyklu. Cyklus o délce rovné jedné se nazývá smyčka.

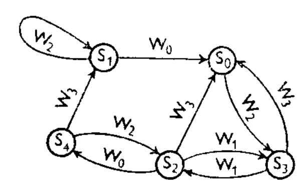
Vyloučíme-li z definice cyklu podmínku 1 a ponecháme pouze podmínky 2 a 3, obdržíme řetěz. S_{i_1} je počáteční stav řetězu, S_{k_n} je konečný stav řetězu, n je délka řetězu. Posloupnost slov $W_{j_1} \wedge W_{j_2} \wedge \ldots \wedge W_n$ nazveme posloupností indukovanou uvažovaným řetězem. Říkáme, že řetěz spojuje slovo W_{j_1} se slovem W_{j_n} nebo že od stavu S_{i_1} je možno výše uvedeným řetězem přejít do stavu S_{k_n} nebo konečně že S_i a S_{k_n} jsou spojeny uvažovaným řetězem. Někdy označujeme termínem řetěz přímo posloupnost slov $W_{j_1} \wedge W_{j_2} \wedge \ldots \wedge W_{j_n}$ indukovanou určitým řetězem.

Každé větě $W_{h_1} \wedge W_{h_2} \wedge \ldots \wedge W_{h_m} \wedge \ldots \wedge W_{h_n}$ z množiny L_G se přiřazuje rodina základních cyklů z gramatiky G, totiž ty cykly, pro které ve výše provedeném zápisu platí $h_1 = j_1$, $h_2 = j_2, \ldots, h_m = j_m, \ldots, h_n = j_n$. Uvažujeme-li však základní cyklus z gramatiky G, třeba i v zápisu uvažovaném výše, odpovídá mu jednoznačně určená věta z gramatiky G, totiž $W_{j_1} \wedge W_{j_2} \wedge \ldots \wedge W_{j_m} \wedge \ldots \wedge W_{j_n}$.

Větu z množiny L_G přiřazenou základnímu cyklu γ z gramatiky G budeme nazývat větou indukovanou cyklem γ.

Takto se základní cykly z gramatiky G dělí na ekvivalenční třídy; dva základní cykly jsou ekvivalentní tehdy, když indukují tutéž větu z množiny L_G.

Abychom osvětlili zavedené pojmy, uvažujme gramatiku G definovanou tímto diagramem:



Cykly (0, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 0) a (0, 2, 3), (3, 3, 0) jsou základní a neredukovatelné. Cyklus (0, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 1, 3), (3, 3, 0) je redukovatelný a základní.

Cykly (3, 1, 2), (2, 1, 3) a (1, 2, 1) jsou nezákladní a redukovatelné. Cyklus (3, 1, 2), (2, 0, 4), (4, 2, 2), (2, 1, 3) je redukovatelný a nezákladní. Základní cykly (0, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 0) a (0, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 0, 4), (4, 3, 1), (1, 0, 0) jsou ekvivalentní, neboť každý z nich indukuje větu $W_2 \wedge W_1 \wedge W_3$.

5. Charakterizace gramatik generujících konečné jazyky

Trojice připuštěná gramatikou $G \in F_1$ je produktivní, existuje-li v gramatice G alespoň jeden základní cyklus, který tuto trojici obsahuje.

Gramatika $G \in F_1$, ve které je každá přípustná trojice produktivní, se nazývá zcela produktivní. Gramatika $G \in F_1$, ve které je alespoň jedna trojice produktivní, se nazývá produktivní.

Není-li ani jedna přípustná trojice produktivní, je gramatika G neproduktivní. Pomocí této terminologie je možno formulovat

Tvrzení 1. Buď $G \in F_1$. Gramatika G je produktivní právě tehdy, když obsahuje alespoň jeden základní cyklus. Trojice přípustná v gramatice G je produktivní právě tehdy, když je obsažena v některém základním cyklu gramatiky G.

Tvrzení 2. Buď $G \in F_1$. Existuje gramatika $G' \in F_4$, která je zcela produktivní a ekvivalentní s G.

Teorém 6. *Buď $G \in F_4$. Předpokládejme, že gramatika G je zcela produktivní. Za těchto podmínek je množina L_G konečná právě tehdy, když gramatika G neobsahuje žádný nezákladní cyklus.*

Teorém 7. *Každý konečný jazyk L je jazyk s konečným počtem stavů.*

6. Některé aspekty týkající se přirozených jazyků

Teorém 8. *Buď L_4 jazyk vytvořený výlučně z vět tvaru*

$$x_n = \underbrace{a \wedge a \ldots \wedge a}_{n \text{ krát}} \wedge c \wedge \underbrace{b \wedge d \wedge b \wedge d \wedge \ldots \wedge b \wedge d}_{\text{skupina } b \wedge d \; n \text{ krát}},$$

kde n je libovolné přirozené číslo.

L_4 není jazyk s konečným počtem stavů.

Poznámky. Jazyk L_4, uvažovaný v teorému 8, může být interpretován jako úryvek rumunského jazyka. Položme a = dacă, b = atunci, c = mergi, d = accept. Pro $n = 1$ obdržíme větu

x_1 = Dacă mergi, atunci accept. (Jestliže půjdeš, pak přijímám.)

Dále platí

$$x_2 = \text{Dacă } x_1\text{, atunci accept},$$
$$x_3 = \text{Dacă } x_2\text{, atunci accept},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n+1} = \text{Dacă } x_n\text{, atunci accept}.$$

Jak vyplývá z teorému 8, tento úryvek rumunského jazyka není jazyk s konečným počtem stavů.

Z důkazu teorému 8 vyplývá tento

Korolár. Je-li gramatika G s konečným počtem stavů taková, že $L_4 \subseteq L_G$, pak v množině L_G existuje věta tvaru

$$\underbrace{a \wedge a \wedge \ldots \wedge a}_{n \text{ krát}} \wedge c \wedge \underbrace{b \wedge d \wedge b \wedge d \wedge \ldots \wedge b \wedge d}_{\text{skupina } b \wedge d \; p \text{ krát}},$$

kde $n \neq p$.

Přijmeme-li pro a, b, c a d výše uvedenou interpretaci, dostaneme jako prvek množiny L_G větu tvaru

$$\underbrace{\text{Dacă dacă} \ldots \text{dacă}}_{n \text{ krát}} \text{ mergi, } \underbrace{\text{atunci accept} \ldots \text{atunci accept}}_{\text{skupina atunci accept } p \text{ krát}},$$

kde $n \neq p$. Připustíme-li, že v rumunštině přítomnost slova dacă implikuje, že v další části textu se vyskytuje slovo atunci, a přítomnost slova atunci (s podmiňovacím významem) implikuje v předcházející části textu slovo dacă, pak věta, k níž dojdeme interpretací výše vysloveného koroláru, není rumunská.

V tomto smyslu je možno říci, že rumunština není jazyk s konečným počtem stavů; každá gramatika G s konečným počtem stavů, pro kterou množina L_G obsahuje všechny rumunské věty, obsahuje nutně i některé věty, které nejsou rumunské. Výše vyslovené úvahy vedou po některých nepodstatných změnách ke konstatování, že ani ruština, angličtina a francouzština nejsou jazyky s konečným počtem stavů.

Tato diskuse vede zcela přirozeně k zavedení následujících pojmů:

Nechť V je určitý slovník. Všechny jazyky uvažované v následující definici se týkají slovníku V.

Nechť L je jakýkoli jazyk. Položme

$$L' = \bigcap_{L \subseteq L_G} L_G .$$

Jinými slovy L' je průnik těch jazyků s konečným počtem stavů, které obsahují jazyk L. Jazyk L' nazveme prodloužením jazyka L; je zřejmé, že jakýkoli jazyk je obsažen ve svém prodloužení.

Zřejmě platí

Tvrzení 3. Je-li L jazyk s konečným počtem stavů, pak platí $L = L'$.

Teorém 9. *Jakýkoli jazyk (ať s konečným počtem stavů nebo bez něho) splývá se svým prodloužením.*

Nechť jsou L_1 a L_2 dva jazyky s týmž slovníkem takové, že $L_1 \cap L_2 = 0$. Říkáme, že jazyky L_1 a L_2 jsou oddělené, existuje-li gramatika $G \in F_4$ taková, že

$$L_1 \subseteq L_G \quad \text{a} \quad L_2 \cap L_G = 0 .$$

Tvrzení 4. Jsou-li jazyky L_1 a L_2 oddělené, jsou jazyky L_2 a L_1 rovněž oddělené.

Tvrzení 5. Je-li alespoň jeden z disjunktních jazyků L_1 a L_2 vytvořen z jediné věty, jsou jazyky L_1 a L_2 oddělené.

Tvrzení 6. Je-li alespoň jeden z disjunktních jazyků L_1 a L_2 konečný, jsou jazyky L_1 a L_2 oddělené.

Tvrzení 7. Je-li alespoň jeden z disjunktních jazyků L_1 a L_2 jazykem s konečným počtem stavů, jsou jazyky L_1 a L_2 oddělené.

Tvrzení 8. Nechť jsou L_1 a L_2 dva disjunktní jazyky, které nejsou jazyky s konečným počtem stavů. Je-li jazyk $U - (L_1 \cup L_2)$ konečný, pak jazyky L_1 a L_2 nejsou oddělené.

7. Pojem konečného automatu

Buď Σ konečná neprázdná množina, zvaná abeceda. Buď T volná pologrupa s jednotkovým prvkem generovaná množinou Σ. Jakýkoli prvek pologrupy T nazveme posloupností nad abecedou Σ či prostě posloupností. Jednotkový prvek pologrupy T označíme Λ a nazveme jej posloupností s nulovým účinkem.

Buď $x \in T$, $x = \sigma_0\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}$ ($\sigma_i \in \Sigma$); n bude délka posloupnosti x. Položme

$${}_kx_l = \sigma_k\sigma_{k+1} \ldots \sigma_{l-1} ,$$

kde $k \leqq l \leqq n$. Tedy ${}_kx_l$ je posloupnost získaná z posloupnosti x tím, že ubereme prvních k a posledních $n - l$ členů. Konvencí stanovíme, že bude platit

$${}_kx_l = \Lambda \quad \text{pro} \quad k = l .$$

Je zřejmé, že platí

$$x = {}_0x_k\, {}_kx_n \quad \text{pro} \quad k \leqq n$$

nebo obecněji

$${}_kx_m = {}_kx_l\, {}_lx_m \quad \text{pro} \quad k \leqq l \leqq m \leqq n .$$

Posloupnost tvaru ${}_0x_k$ ($k \leqq n$) nazveme počátečním segmentem nebo počáteční částí posloupnosti x.

Dále položíme pro jakékoli $x \in T$

$$x^n = x \ldots x,\ x^0 = \Lambda .$$

Tab. 8

$S \backslash \Sigma$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
$\boxed{S_0}$	S_1	S_3	S_0	S_2	S_2	S_1
S_1	S_4	S_0	S_1	S_1	S_4	S_4
$\boxed{S_2}$	S_3	S_3	S_0	S_1	S_0	S_2
S_3	S_2	S_3	S_2	S_4	S_2	S_3
$\boxed{S_4}$	S_0	S_1	S_4	S_2	S_2	S_3

Konečný automat nad abecedou Σ je systém $A = \{\mathscr{S}, f, S_0, F\}$, kde $\mathscr{S}$ je konečná neprázdná množina (množina vnitřních stavů systému A), f je zobrazení kartézského součinu $\mathscr{S} \times \Sigma$ do množiny $\mathscr{S}$ (přechodová funkce automatu A), S_0 je určitý prvek množiny $\mathscr{S}$ (zvaný počáteční stav automatu A) a F je určitá část množiny $\mathscr{S}$ (množina konečných stavů automatu A). Automat A je možno znázornit tabulkou. Například výše uvedená tabulka definuje automat, v němž stav $f(S_i, \sigma_j)$ je dán průsečíkem řádku i a sloupce j a kde orámování naznačuje, že $F = \{S_0, S_2, S_4\}$.

Funkci F je možno rozšířit na $\mathscr{S} \times T$ pomocí této rekurzívní definice:

$$f(S, \Lambda) = S \quad \text{pro jakékoli} \quad S \in \mathscr{S} ;$$
$$f(S, x\sigma) = f(f(S, x), \sigma) \quad \text{pro} \quad S \in \mathscr{S}, x \in T \text{ a } \sigma \in \Sigma .$$

Je zřejmé, že $f(S, x)$ představuje stav, k němuž lze dospět tím, že vyjdeme ze stavu S a proběhneme prvky posloupnosti x, jak ukazuje tabulka přechodů automatu A (viz tabulku 8).

Lze snadno ověřit, že pro $x \in T$, $y \in T$ platí $f(S, xy) = f(f(S, x), y)$ pro jakékoli $S \in \mathscr{S}$.

Jakoukoli posloupnost $x \in T$, pro kterou platí

$$f(S_0, x) \in F ,$$

nazveme posloupností připuštěnou automatem A. Množinu posloupností připuštěných automatem A označíme $T(A)$.

Jakoukoli část množiny T nazveme událostí nad abecedou Σ.

Nechť Γ je část množiny T taková, že existuje konečný automat A s vlastností $T(A) = \Gamma$. Množinu Γ nazveme událostí reprezentovatelnou konečným automatem. Říkáme také, že událost Γ je připuštěna automatem A.

Dva automaty A' a A'' takové, že platí $T(A') = T(A'')$, se nazývají ekvivalentní. Označíme $\mathscr{E}(\Sigma)$ množinu událostí nad abecedou Σ, které jsou reprezentovatelné konečným automatem. Není-li nebezpečí nedorozumění, můžeme místo $\mathscr{E}(\Sigma)$ psát prostě $\mathscr{E}$.

Událost vytvořená množinou T se nazývá univerzální událost. Událost vytvořená prázdnou částí množiny T se nazývá nulová událost. Jak vyplyne z následujících teorémů, tyto dvě události jsou reprezentovatelné konečným automatem. K tomuto zjištění lze snadno dojít i přímou cestou.

8. Relace kongruence

V dalších výkladech chceme zjistit některé charakteristické strukturální rysy událostí reprezentovatelných konečným automatem. Přitom budou tyto rysy vyplývat z povahy událostí samotných a nebude nutno operovat s pojmem automat. K tomu je třeba, abychom nejprve zavedli několik předběžných pojmů a vyslovili některá tvrzení, která budou přípravou pro další zkoumání.

Nechť R je ekvivalence v T.

Říkáme, že R je invariantní zprava, jestliže z $x \in T$, $y \in T$, $z \in T$ a xRy vyplývá $xzRyz$. Říkáme, že R je invariantní zleva, jestliže z $x \in T$, $y \in T$, $z \in T$ a xRy vyplývá $zxRzy$.

Říkáme, že ekvivalence R je relací kongruence v T, jestliže je R invariantní zprava i zleva.

Abychom osvětlili pojem relace kongruence, uvažujme v T binární relaci ϱ_L definovanou takto: Mějme $x \in T$, $y \in T$; platí $x\varrho_L y$, jestliže pro $z \in T$, $w \in T$ posloupnosti zxw a zyw patří buď obě do L nebo obě do $T - L$.

Tvrzení 9. ϱ_L je relace kongruence v T.

Nechť R je ekvivalence v T. Říkáme, že relace R má konečný index, je-li konečný počet R-ekvivalenčních tříd, na něž se rozkládá T, jinými slovy, je-li konečný rozklad množiny T na R-ekvivalenční třídy.

Nechť je L částí T.

V množině T zavedeme novou ekvivalenci δ_L definovanou takto: pro $x \in T$, $y \in T$ platí $x\delta_L y$, jestliže pro jakékoli $z \in T$ platí buď $xz \in L$, $yz \in L$ nebo $xz \notin L$, $yz \notin L$.

Tvrzení 10. δ_L je ekvivalence v T invariantní zprava.

Zavedeme do množiny T další ekvivalenci λ_L $(L \subset T)$ definovanou takto: pro $x \in T$, $y \in T$ platí $x\lambda_L y$, jestliže pro jakékoli $z \in T$ posloupnosti zx a zy patří buď obě do L nebo obě do $T - L$.

Tvrzení 10'. λ_L je ekvivalence v T invariantní zleva.

Teorém 10. *Buď $\mathscr{E}$ událost nad abecedou Σ. Tato tvrzení jsou vždy po dvou navzájem ekvivalentní:*

a) *$\mathscr{E}$ je událost reprezentovatelná konečným automatem;*
b) *V množině T je definována relace kongruence R s konečným indexem a taková, že $\mathscr{E}$ je sjednocením některých R-ekvivalenčních tříd;*
c) *V množině T je definována ekvivalence R_1 s konečným indexem, která je invariantní zprava a taková, že $\mathscr{E}$ je sjednocení některých R_1-ekvivalenčních tříd;*
d) *V množině T je definována ekvivalence R_2 s konečným indexem, která je invariantní zleva a taková, že $\mathscr{E}$ je sjednocením některých R_2-ekvivalenčních tříd;*
e) *Pro $L = \mathscr{E}$ má relace kongruence ϱ_L, definovaná v T, konečný index;*
f) *Pro $L = \mathscr{E}$ má ekvivalence δ_L, definovaná v T, konečný index;*
g) *Pro $L = \mathscr{E}$ má ekvivalence λ_L, definovaná v T, konečný index.*

9. Nejbližší derivace rozkladu

K dalším charakteristickým rysům událostí reprezentovatelných konečným automatem dojdeme zavedením několika pojmů, které jsou transpozicí některých pojmů z prací [184], [212] a [228].

Nechť R je rozklad množiny T. Pro jakékoli $x \in T$ bude $R(x)$ označovat takovou množinu z rozkladu R, která obsahuje x. Množina $R(x)$ se nazývá R-struktura prvku x.

Nechť $L \subseteq T$. Říkáme, že posloupnost R-struktur $R(x_1), \ldots, R(x_n)$ je L-vyznačená nebo prostě vyznačená, existují-li $u_1 \in R(x_1)$, $u_2 \in R(x_2)$, …, $u_i \in R(x_i)$, … …, $u_n \in R(x_n)$ taková, že posloupnost $u = u_1u_2 \ldots u_i \ldots u_n$ patří do množiny L. Mějme $x \in T$, $y \in T$. Říkáme, že $R(x)$ a $R(y)$ jsou nejblíže R-ekvivalentní vzhledem k L, jestliže pro jakékoli $u \in T$, $w \in T$ jsou posloupnosti R-struktur

$$R(u), R(x), R(w) \quad \text{a} \quad R(z), R(y), R(w)$$

buď obě L-vyznačené nebo obě L-nevyznačené. Je zřejmé, že nejbližší R-ekvivalence je ekvivalence prvků rozkladu R vzhledem k množině Γ. Pro jakékoli $x \in T$ bude $R_n'(x)$ označovat sjednocení všech R-struktur, které jsou nejblíže R-ekvivalentní s $R(x)$ vzhledem k L.

Pro $x \in T$, $y \in T$ platí buď $R_n'(x) = R_n'(y)$ nebo $R_n'(x) \cap R_n'(y) = 0$. Množiny $R_n'(x)$ definují nový rozklad množiny T, který označíme R_n' a nazveme nejbližší derivací rozkladu R vzhledem k L. Je-li množina L jednoznačně stanovena, takže není nebezpečí nedorozumění, můžeme slova „vzhledem k L" vynechat.

Rozklad množiny T, v němž pro každé $x \in T$ platí $R(x) = \{x\}$, nazveme jednotkovým rozkladem množiny T.

Nejbližší derivovaný rozklad jednotkového rozkladu nazveme rozkladem do rodin. Označíme-li tedy jednotkový rozklad E a rozklad do rodin S, platí $E'_n = S$. Z toho vyplývá, že pro každé $x \in T$ je rodina $S(x)$ prvku x úhrnem prvků $y \in T$, pro které při jakýchkoli $u \in T$, $w \in T$ patří posloupnosti uxw a uyw buď obě do L nebo obě do $T - L$.

Mějme dva rozklady množiny T, které označíme A a B.

Říkáme, že rozklad B je zákrytem rozkladu A, jestliže pro jakékoli $x \in T$ platí $A(x) \subseteq B(x)$. Říkáme, že tento zákryt je nejblíže pravidelný, jestliže pro jakékoli $x \in T$ a pro jakékoli $y \in T$ taková, že platí $A(y) \subseteq B(x)$, je A-struktura $A(x)$ nejblíže A-ekvivalentní s A-strukturou $A(y)$.

10. Charakterizace událostí reprezentovatelných konečným automatem vyslovené s pomocí nejbližší derivace

Můžeme nyní vyslovit

Teorém 11. *Buď $\mathscr{E}$ událost nad abecedou Σ. Tato tvrzení jsou vždy po dvou navzájem ekvivalentní:*

a) *Událost $\mathscr{E}$ je reprezentovatelná konečným automatem;*

h) *V množině T je definována relace kongruence R taková, že $\mathscr{E}$ je sjednocením některých R-ekvivalenčních tříd a rozklad množiny T na R-ekvivalenční třídy má jako nejbližší derivaci vzhledem k $L = \mathscr{E}$ konečný rozklad;*

i) *Pro jakoukoli relaci kongruence R definovanou v T a takovou, že $\mathscr{E}$ je sjednocením některých R-ekvivalenčních tříd, má rozklad množiny T na R-ekvivalenční třídy jako nejbližší derivaci vzhledem k $L = \mathscr{E}$ konečný rozklad.*

Teorém 12. *Uvažujme tato tvrzení:*

a) *Událost $\mathscr{E}$ je reprezentovatelná konečným automatem;*

j) *V množině T je definována ekvivalence R, která je invariantní zprava a taková, že $\mathscr{E}$ je sjednocením některých R-ekvivalenčních tříd a rozklad množiny T na R-ekvivalenční třídy má jako nejbližší derivaci vzhledem k $L = \mathscr{E}$ konečný rozklad;*

k) *V množině T je definována ekvivalence R, která je invariantní zleva a taková, že $\mathscr{E}$ je sjednocením některých R-ekvivalenčních tříd a rozklad množiny T na R-ekvivalenční třídy má jako nejbližší derivaci konečný rozklad;*

l) *Pro jakoukoli ekvivalenci R definovanou v množině T, která je invariantní zprava a taková, že $\mathscr{E}$ je sjednocením některých R-ekvivalenčních tříd, má rozklad množiny T na R-ekvivalenční třídy jako nejbližší derivaci vzhledem k $L = \mathscr{E}$ konečný rozklad;*

m) *Pro jakoukoli ekvivalenci R definovanou v množině T, která je invariantní zleva a taková, že $\mathscr{E}$ je sjednocením některých R-ekvivalenčních tříd, má rozklad množiny T na R-ekvivalenční třídy jako nejbližší derivaci vzhledem k $L = \mathscr{E}$ konečný rozklad.*

Platí

$$a) \Rightarrow j)\,, \quad a) \Rightarrow k)\,, \quad l) \Rightarrow a)\,, \quad m) \Rightarrow a)\,.$$

11. Jednostranná nejbližší derivace rozkladu

Nyní zavedeme určitou modifikaci pojmů týkajících se nejblíže derivovaných rozkladů. Tato modifikace nám umožní stanovit další charakteristické rysy událostí reprezentovatelných konečným automatem.

Nechť R je rozklad množiny T. Buď $L \subseteq T$, $x \in T$, $y \in T$. Říkáme, že $R(x)$ a $R(y)$ jsou nejblíže R-ekvivalentní zprava vzhledem k L, jestliže pro jakékoli $w \in T$ jsou posloupnosti R-struktur

$$R(x), R(w) \text{ a } R(y), R(w)$$

buď obě L-vyznačené nebo obě L-nevyznačené. Nejbližší R-ekvivalence zprava je ekvivalence prvků rozkladu R v množině Γ.

Pro jakékoli $x \in T$ bude $R'_{n,p}(x)$ označovat sjednocení všech R-struktur, které jsou s $R(x)$ nejblíže R-ekvivalentní zprava vzhledem k L. Množiny $R'_{n,p}(x)$ definují nový rozklad množiny T, který označíme $R'_{n,p}$ a nazveme nejbližší derivací zprava rozkladu R vzhledem k L. Je-li množina L jednoznačně stanovena, takže není nebezpečí nedorozumění, můžeme slova „vzhledem k L" vynechat.

Nejbližší derivaci jednotkového rozkladu zprava nazveme rozkladem na polorodiny zprava a označíme jej S_p. Platí tedy

$$E'_{n,p} = S_p\,.$$

Z toho vyplývá, že pro každé $x \in T$ bude polorodina prvku x zprava, kterou označíme $S_p(x)$, vytvořena z těch prvků $y \in T$, pro něž při jakémkoli $w \in T$ patří posloupnosti xw a yw buď obě do L nebo obě do $T - L$.

Nechť R je rozklad množiny T. Buď $L \subseteq T$, $x \in T$, $y \in T$. Říkáme, že $R(x)$ a $R(y)$ jsou nejblíže R-ekvivalentní zleva vzhledem k L, jestliže pro jakékoli $w \in T$ jsou posloupnosti R-struktur

$$R(w), R(x) \quad \text{a} \quad R(w), R(y)$$

buď obě L-vyznačené nebo obě L-nevyznačené. Pro jakékoli $x \in T$ bude $R'_{n,l}(x)$ označovat sjednocení všech R-struktur, která jsou s $R(x)$ nejblíže R-ekvivalentní zleva vzhledem k L. Množiny $R'_{n,l}(x)$ definují nový rozklad množiny T, který označíme $R'_{n,l}$ a nazveme nejbližší derivací zleva rozkladu R vzhledem k L.

Teorém 13. *Buď $\mathscr{E}$ událost nad abecedou Σ. Tato tvrzení jsou vždy po dvou navzájem ekvivalentní:*

a) *Událost $\mathscr{E}$ je reprezentovatelná konečným automatem;*

n) *V množině T je definována ekvivalence R, která je invariantní zprava a taková, že $\mathscr{E}$ je sjednocením některých R-ekvivalenčních tříd a rozklad množiny T na R-ekvivalenční třídy má jako nejbližší derivaci zprava vzhledem k L = $\mathscr{E}$ konečný rozklad;*

o) *V množině T je definována ekvivalence R, která je invariantní zleva a taková, že $\mathscr{E}$ je sjednocením některých R-ekvivalenčních tříd a rozklad množiny T na R-ekvivalenční třídy má jako nejbližší derivaci zleva vzhledem k L = $\mathscr{E}$ konečný rozklad;*

p) *Pro jakoukoli ekvivalenci R definovanou v množině T, která je invariantní zprava a taková, že $\mathscr{E}$ je sjednocením některých R-ekvivalenčních tříd, má rozklad množiny T na R-ekvivalenční třídy jako nejbližší derivaci zprava vzhledem k L = $\mathscr{E}$ konečný rozklad;*

r) *Pro jakoukoli ekvivalenci R definovanou v množině T, která je invariantní zleva a taková, že $\mathscr{E}$ je sjednocením některých R-ekvivalenčních tříd, má rozklad množiny T na R-ekvivalenční třídy jako nejbližší derivaci zleva vzhledem k L = $\mathscr{E}$ konečný rozklad.*

12. Operace na třídě $\mathscr{T}$ (třídě událostí reprezentovatelných konečným automatem). Indeterministické automaty

Teorém 14. *$\mathscr{T}$ je Booleova algebra množin.*

Korolár. Každá konečná neprázdná množina posloupností patří do $\mathscr{T}$.

Teorém 15. *Jestliže abeceda Σ obsahuje q symbolů $(q > 1)$, konečný automat A má r stavů a množina $T(A)$ je konečná, pak množina $T(A)$ obsahuje nanejvýš*

$$\frac{q^r - 1}{q - 1}$$

posloupností.

Říkáme, že dva konečné automaty A a B jsou ekvivalentní, jestliže platí $T(A) = T(B)$.

Charakteristickým rysem dosud studovaných automatů je to, že jejich činnost a stavy, jimiž procházejí, jsou zcela určeny posloupností, kterou má automat vytvořit. Činnost automatu začíná nutně u stavu S_0. Má-li automat vytvořit posloupnost $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n$, musí nutně projít stavy

$$S_{i_1} = f(S_0, \sigma_1), \quad S_{i_2} = f(S_{i_1}, \sigma_2), \quad \dots, \quad S_{i_n} = f(S_{i_{n-1}}, \sigma_n)$$

v pořádku, v jakém jsme je napsali. Takový automat obsahuje obvykle velký počet stavů. Je-li A konečný automat, pro nějž je $T(A)$ konečná množina, pak je délka jakékoli posloupnosti z množiny $T(A)$ menší než počet stavů automatu A. Chceme-li například, aby množina $T(A)$ byla vytvořena z jediné posloupnosti o délce 10^n, bude třeba, aby automat A obsahoval alespoň $10^n + 1$ stavů (n je celé kladné číslo).

Dosud studované automaty lze též nazvat deterministické konečné automaty.

Jak k některým účelům teoretickým, tak i pro některé případy, kdy je pohodlné pracovat s automaty s poměrně menším počtem stavů, zavedli M. O. Rabin a D. Scott [283] pojem konečného indeterministického automatu. Současně a nezávisle na nich zavedl podobný pojem též Karel Čulík [69].

Indeterministickým konečným automatem nad abecedou Σ nazýváme systém $A = (\mathscr{S}, f, S_0, F)$, kde $\mathscr{S}$ je konečná neprázdná množina. f je funkce definovaná na součinu $\mathscr{S} \times \Sigma$ a s hodnotami v množině částí množiny $\mathscr{S}$ a S_0 a F jsou části množiny $\mathscr{S}$.

Rozdíl mezi deterministickým a indeterministickým automatem spočívá v těchto dvou věcech:

1. v deterministickém automatu existuje pouze jeden počáteční stav, zatímco v indeterministickém je zpravidla počátečních stavů (prvků množiny S_0) několik;
2. v deterministickém automatu odpovídá jednomu danému stavu a jednomu danému symbolu jediný stav, zatímco v indeterministickém jim zpravidla odpovídá několik stavů.

Jinými slovy v činnosti indeterministického automatu není následující stav jednoznačně určen tím, že známe stav předchozí a jemu přiřazený symbol. Tato okolnost právě vedla k termínům deterministický a indeterministický automat.

Nechť je A indeterministický konečný automat. Říkáme, že posloupnost $x = \sigma_0\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$ vytvořená ze symbolů abecedy Σ je vytvořena nebo generována automatem A, existuje-li posloupnost stavů tohoto automatu $S_0, S_1, \dots, S_n$ s těmito třemi vlastnostmi:

1. $S_0 \in \mathscr{S}_0$;
2. $S_i \in f(S_{i-1}, \sigma_{i-1})$ pro $i = 1, \dots, n$;
3. $S_n \in F$.

Množina všech posloupností vytvořených automatem A se značí $T(A)$ a říkáme jí množina generovaná automatem A nebo událost reprezentovaná automatem A.

Pojem deterministického konečného automatu je zvláštním případem pojmu konečného indeterministického automatu, kdy množina $\mathscr{S}_0$ je vytvořena z jediného prvku a každá hodnota zobrazení f je množina vytvořená z jediného prvku množiny $\mathscr{S}$. Událost $T(A)$ se v tomto případě redukuje na událost reprezentovanou automatem A, jak byla definována v souvislosti s konečnými deterministickými automaty.

13. Každý indeterministický automat je ekvivalentní s některým deterministickým automatem. Charakterizace událostí reprezentovatelných konečným automatem

Nechť $A = (\mathscr{S}, f, \mathscr{S}_0, F)$ je indeterministický konečný automat. Označme $\mathscr{D}(A)$ systém (τ, g, λ_0, G), v němž τ je množina všech podmnožin množiny $\mathscr{S}$, g je zobrazení součinu $\tau \times \Sigma$ do množiny τ, které definujeme takto: platí-li $\lambda \in \tau$ a $\sigma \in \Sigma$, pak $g(\lambda, \sigma)$ je sjednocení těch množin $f(S, \sigma)$ (z automatu A), pro něž platí $S \in \lambda$; $\lambda_0 = \delta_0$; G je množina těch částí množiny $\mathscr{S}$, které obsahují alespoň po jednom stavu z F. Protože λ_0 je prvek množiny τ a G je část této množiny, tvoří $\mathscr{D}(A)$ konečný deterministický automat; nazveme jej deterministickým automatem přiřazeným automatu A.

Teorém 16. *Každý konečný indeterministický automat je ekvivalentní s deterministickým automatem $\mathscr{D}(A)$, přiřazeným automatu A.*

J. Myhill, kterému se podařilo dokonaleji vyjádřit závěr, k němuž dospěl S. C. Kleene, ukázal v práci, jež nebyla publikována, že třídu $\mathscr{T}$ je možno charakterizovat jako nejmenší třídu posloupností, jež obsahuje kteroukoli konečnou množinu posloupností a je uzavřená vzhledem k určitým jednoduchým operacím prováděným s množinami posloupností.

Budeme definovat dvě nové operace s množinami posloupností. Mějme dvě množiny posloupností U a V. Komplexním součinem UV množin U a V nazveme množinu všech posloupností tvaru xy, kde $x \in U$ a $y \in V$. Je zřejmé, že komplexní součin je asociativní:

$$(UV)\,W = U(VW)\,.$$

Na základě definice je možno psát .

$$UVW = (UV)\,W\,.$$

Analogicky budeme definovat komplexní součin n množin posloupností, přičemž n je libovolné přirozené číslo.

Položme

$$U^n = \underbrace{UU \ldots U}_{n \text{ krát}}\,, \quad U^0 = \{\Lambda\}\,.$$

Budeme nyní definovat novou operaci, kterou nazveme operací uzávěru. Je-li dána množina posloupností U, bude $\mathrm{cl}\,(U)$ označovat uzávěr množiny U, který budeme definovat jako nejmenší množinu posloupností – označíme ji V – s těmito vlastnostmi: 1. $U \subseteq V$; 2. $\Lambda \in V$; 3. platí-li $x \in V$ a $y \in V$, pak platí $xy \in V$.

Teorém 17. *Třída $\mathscr{T}$ je uzavřená vzhledem k operaci komplexního součinu a operaci uzávěru; jinými slovy, platí-li $U \in \mathscr{T}$ a $V \in \mathscr{T}$, pak platí $\mathrm{cl}\,(U) \in \mathscr{T}$ a $UV \in \mathscr{T}$.*

Teorém 18. *Třídu událostí reprezentovatelných konečným automatem, kterou označíme $\mathscr{T}$, je nejmenší třída množin posloupností s těmito třemi vlastnostmi:*

1. *obsahuje jako prvek jakoukoli konečnou neprázdnou množinu posloupností;*
2. *sjednocení a komplexní součin dvou množin patřících do třídy $\mathscr{T}$ patří rovněž do třídy $\mathscr{T}$;*
3. *uzávěr množiny patřící do třídy $\mathscr{T}$ patří rovněž do třídy $\mathscr{T}$.*

14. Ekvivalence konečného automatu s gramatikou s konečným počtem stavů. Řetěz s nulovým účinkem

Zavedeme tyto zápisy: Je-li G gramatika s konečným počtem stavů a A konečný automat, položíme $L^*(G) = L(G) - \{z\}$ a $T^*(A) = T(A) - \{z\}$, kde z označuje řetěz s nulovým účinkem: $xz = zx = x$ pro jakékoli $x \in T$.

Teorém 19. *Je-li dán indeterministický konečný automat A, existuje gramatika G s konečným počtem stavů taková, že*

$$L^*(G) = T^*(A)\,.$$

Teorém 20. *Nechť G je gramatika s konečným počtem stavů. Existuje deterministický konečný automat B takový, že $L^*(G) = T^*(B)$.*

Dosud jsme se vůbec nezabývali problémem příslušnosti řetězu s nulovým účinkem k události reprezentovatelné konečným automatem nebo k jazyku s konečným počtem stavů. Odpověď na tuto otázku je do určité míry věcí konvence. Mohli bychom se dohodnout, že řetěz s nulovým účinkem bude příslušet jakémukoli neprázdnému jazyku s konečným počtem stavů a jakékoli neprázdné události reprezentovatelné konečným automatem. Jak je vyloženo ve studii [19] na str. 159, M. O. Rabin a D. Scott předpokládají, že automat $A = (\mathscr{S}, f, \mathscr{S}_0, F)$ generuje řetěz s nulovým účinkem právě tehdy, když $\mathscr{S}_0 \cap F \neq 0$. Vezmeme-li v úvahu stav $S \in \mathscr{S}_0 \cap F$, můžeme v tomto případě opravdu říci, že při přechodu od stavu S k S, tedy od stavu z $\mathscr{S}_0$ ke stavu z F nevzniká žádný symbol, jinými slovy vzniká řetěz o nulové délce. V případě deterministického konečného automatu $A = (\mathscr{S}, f, \mathscr{S}_0, F)$ se podmínka $\mathscr{S}_0 \cap F \neq 0$ kryje s relací $S_0 \in F$.

Tyto podmínky však nejsou splněny vždy. Musíme tedy připustit, že existují jak indeterministické konečné automaty, tak deterministické konečné automaty, které nevytvářejí řetěz s nulovým účinkem. Jestliže na druhé straně přijmeme podobnou konvenci pro gramatiky s konečným počtem stavů, pak z toho vyplývá – vzhledem k tomu, že v případě takové gramatiky platí $\mathscr{S}_0 = F = \{S_0\}$ – že řetěz s nulovým účinkem je vytvářen jakoukoli gramatikou s konečným počtem stavů. Tak dochází k nesouhlasu mezi konečnými automaty na jedné straně a gramatikami s konečným počtem stavů na straně druhé. Vzhledem k tomuto nesouhlasu lze mluvit o ekvivalenci mezi konečnými automaty a gramatikami s konečným počtem stavů jen tehdy, když se omezíme na ty konečné automaty, které vytvářejí řetěz s nulovým účinkem a pro které tedy platí podmínka $\mathscr{S}_0 \cap F \neq 0$. Přijmeme-li tuto konvenci, můžeme ve výroku výše uvedených teorémů 1 a 2 místo $L^*(G)$ psát $L(G)$ a místo $T^*(A)$ psát $T(A)$.

Y. Bar-Hillel a E. Shamir zaujímají ve studii [19] jiné stanovisko. Řetěz s nulovým účinkem prostě vylučují z jakéhokoli jazyka a z jakékoli události a jazyk nad slovníkem V definují jako takovou část volné pologrupy generované slovníkem V, která neobsahuje řetěz z s nulovým účinkem. Podle autorů studie [19] je tedy jazyk generovaný gramatikou G s konečným počtem stavů právě množina $L^*(G) = L(G)$ –

$- \{z\}$ a událost reprezentovaná konečným automatem A je množina $T^*(A) = T(A) - \{z\}$. Podobné stanovisko zaujímá i Karel Čulík.

Jak je poznamenáno ve studii [19] na str. 159, vyloučením řetězu s nulovým účinkem z událostí reprezentovatelných konečným automatem vzniká možnost najít ke každému indeterministickému konečnému automatu konečný automat, který je s ním ekvivalentní, ale obsahuje jen jediný počáteční a jediný koncový stav; jinými slovy jsou množiny $\mathscr{S}_0$ a F v tomto konečném automatu vytvořeny každá z jediného prvku. Je možno dokonce dosáhnout toho, aby počáteční stav splynul se stavem koncovým. K těmto výsledkům je možno dojít podobným postupem, jakým lze dokázat teorém 19.

Jestliže připustíme, že událost reprezentovatelná konečným automatem obsahuje řetěz s nulovým účinkem, pak už – jak poznamenal M. Perles (viz studii [19], str. 159) – nelze vždy najít k určitému konečnému indeterministickému automatu konečný indeterministický automat s ním ekvivalentní, který by obsahoval jediný počáteční a jediný koncový stav. Mějme například množinu $\{z, \sigma\}$, kde z je řetěz s nulovým účinkem a σ je řetěz vytvořený z jediného symbolu $\sigma \neq z$. Předpokládejme, že existuje indeterministický konečný automat, který generuje právě množinu $\{z, \sigma\}$ a který obsahuje jediný počáteční a jediný koncový stav. Kdyby oba tyto stavy splynuly, platilo by – označíme-li počáteční i koncový stav S_0 – $S_0 \in f(S_0, \sigma)$, tedy uvažovaný automat by generoval i řetěz $\sigma\sigma$, ačkoliv ten nepatří do množiny $\{z, \sigma\}$. Z toho vyplývá, že v automatu, který generuje množinu $\{z, \sigma\}$, je počáteční stav S_0 nutně odlišný od koncového stavu, který můžeme označit S_1. V tomto případě platí $S_1 \in f(S_0, \sigma)$. Aby automat mohl na druhé straně vytvářet řetěz s nulovým účinkem, musí ve shodě s přijatou konvencí existovat alespoň jeden stav, který je zároveň počáteční i koncový; tedy buď je stav S_0 také koncový – v tom případě má automat dva koncové stavy – nebo je stav S_1 také počáteční a automat má v tom případě dva počáteční stavy. Možnost generovat množinu $\{z, \sigma\}$ indeterministickým konečným automatem, který má jediný počáteční a jediný koncový stav, je tedy vyloučena.

Aby platila ekvivalence mezi konečnými automaty a gramatikami s konečným počtem stavů, navrhuje se ve studii [19] na str. 159, aby v definici gramatik s konečným počtem stavů bylo upuštěno od požadavku, aby koncový stav splýval se stavem počátečním.

Vyloučení řetězu s nulovým účinkem není v rozporu s tím, že slovník gramatiky s konečným počtem stavů obsahuje prvek W_0 s nulovým účinkem. Jak bylo konstatováno v I. kapitole, tento prvek může hrát důležitou úlohu při činnosti gramatiky s konečným počtem stavů; existují však jazyky s konečným počtem stavů, jež mohou být generovány pouze gramatikami, které pracují s prvkem W_0. Již z toho, jak byl prvek W_0 definován, vyplývá, že v jazycích s konečným počtem stavů neplní vůbec žádnou úlohu. Existence prvku W_0 v gramatice s konečným počtem stavů má tento význam: Není nutné, aby každý přechod od jednoho stavu k druhému něco produkoval; gramatika si může „odpočinout“, může být při některých přechodech v klidu, takže dosud vytvořená posloupnost symbolů zůstane nezměněna.

Přirozeně tedy vzniká snaha dosáhnout toho, aby i při činnosti konečného automatu byl možný přechod od stavu S k jinému stavu S' vytvořením symbolu W_0 s nulovým účinkem. To znamená, že by platilo $S' \in f(S, W_0)$.

Předpokládejme nyní, že jak v gramatikách s konečným počtem stavů, tak v konečných automatech vzniká řetěz s nulovým účinkem pouze tím, že se vytvoří řetěz, v němž každý symbol splývá se symbolem W_0. Přijmeme-li toto hledisko, zůstávají výše vyslovené teorémy 19 a 20 v platnosti i tehdy, když místo $L^*(G)$ a $T^*(A)$ píšeme $L(G)$ a $T(A)$; podané důkazy zůstávají beze změny.

15. Důsledky ekvivalence mezi gramatikami s konečným počtem stavů a konečnými automaty

Na základě výsledků, k nimž jsme dospěli výše, budeme moci při studiu gramatik s konečným počtem stavů použít výsledků ze studia konečných automatů a naopak budeme moci výsledky ze studia gramatik s konečným počtem stavů aplikovat při studiu konečných automatů. Proto budeme v dalších kapitolách při studiu gramatik s konečným počtem stavů užívat, aniž to výslovně řekneme, výsledků dosažených v tomto oddílu při studiu konečných automatů. Dále budeme studovat pravidelné události v pojetí Kleeneho; ukážeme, že jsou ekvivalentní s událostmi reprezentovatelnými konečným automatem. Tak se ukáže, že určité třídy nejrůznějších jevů i předmětů jsou izomorfní, a rozšíří se perspektivy zkoumání gramatik s konečným počtem stavů.

Poukážeme nyní na některé korespondence mezi pojmy a závěry z teorie konečných automatů na jedné straně a mezi pojmy a závěry týkajícími se gramatik s konečným počtem stavů na straně druhé. Pojem dvojznačné gramatiky z F_1 odpovídá pojmu indeterministického konečného automatu, stejně jako nedvojznačnost gramatiky odpovídá vlastnosti automatu být deterministický. Na základě teorému 2 v VI. oddílu je každá gramatika z F_1 ekvivalentní s určitou nedvojznačnou gramatikou z F_1; právě tak na základě teorému 16 v VI. oddílu je každý konečný automat ekvivalentní s určitým konečným deterministickým automatem. Teorém 5 v VI. oddílu říká, že $L(F_1)$ tvoří Booleovu algebru množin; teorém 14 v VI. oddílu říká, že $\mathscr{T}$ je Booleova algebra množin. Na základě závěrů, k nimž dospějeme v této kapitole, vyplývají oba teorémy jeden z druhého, neboť $L(F_1) = \mathscr{T}$. Zejména je korolár k teorému 14 v VI. oddílu opakováním teorému 7 v témž oddílu, který říká, že každý konečný jazyk má konečný počet stavů.

Takto je možno k celé řadě závěrů dojít dvěma cestami: jednou v duchu teorie konečných automatů, druhou v duchu teorie gramatik s konečným počtem stavů.

Existuje však celá řada závěrů, k nimž dospívá teorie konečných automatů a které mají hluboký lingvistický význam, ale které nemůžeme plně dokázat v rámci teorie gramatik s konečným počtem stavů. Máme na mysli zejména teorémy 10, 13, 17 a 18 v VI. oddílu. Relace kongruence ϱ_L, studovaná v VI. oddílu, se objevuje ve výroku teorému 10 a hraje důležitou úlohu při charakterizaci událostí reprezentovatelných konečným automatem. Relace ϱ_L je však velmi důležitá při studiu analytických gramatik a je rozšířením pojmu rodina, který zavedla O. S. Kulaginová ([184], [287], [228] atd.). Relace ϱ_L odpovídá pojmu distribuce, který je základním pojmem deskriptivní lingvistiky. Relace $x\varrho_L y$ vlastně vyjadřuje, že x a y mají tutéž distribuci; ϱ_L-ekvivalenční třídy jsou třídy distribuční nebo, jak jsou někdy nazývány v americké deskriptivní lingvistice ([140], [110], [354], [78] atd.), třídy syntaktické nebo formální. Jak vyplývá z teorému 10 (z ekvivalence mezi podmínkami a) a e)) a z výsledků závěrů, k nimž dospějeme v této kapitole, jazyk L je jazykem s konečným počtem stavů právě tehdy, když počet distribučních tříd, které jazyk L indukuje v univerzálním jazyce, je konečný. To má četné důsledky, mimo jiné i pro přirozené jazyky, jak to bude vyloženo v oddílu VII. Teorém 13 v VI. oddílu ukazuje na úzký vztah mezi gramatikami s konečným počtem stavů a konečnými automaty na jedné straně a analytickými gramatikami na straně druhé. Pojem derivace rozkladu, který má důležité místo ve znění tohoto teorému, je stejně důležitý i v teorii analytických gramatik založené na teorii množin, kde se pomocí této derivace modelují takové důležité pojmy přirozených gramatik, jako je slovní druh a gramatický rod ([184,] [350], [287], [212], [289], [228], [211], [218], [226]). Rozšíření pojmu typ ze studie [184] vede ostatně k nové charakterizaci jazyků s konečným počtem stavů. V V. oddílu jsme ukázali, že pojem úseku, který byl zaveden v knize [287] a který hraje důležitou úlohu při matematickém modelování gramatického rodu ([211], [218] a [287]), je příbuzný s některými pojmy, které zavrhl V. M. Gluškov při zkoumání souvislosti mezi konečnými automaty a pologrupami ([114], [116]). Teorém 17 v VI. oddílu uvádí celou řadu nových operací, které, jsou-li aplikovány na jazyky s konečným počtem stavů, vedou rovněž k jazykům s konečným počtem stavů; patří sem komplexní součin (nebo prostě součin, který však nesmí být zaměňován s kartézským součinem) a operace uzávěru. Tyto operace tedy umožňují vedle Booleových operací, abychom jazyk s konečným počtem stavů, z něhož vyjdeme, mohli „vnořit" do jazyka, který má tutéž vlastnost, ale je obsažnější; zvláště obdržíme snadno – vyjdeme-li od konečného jazyka L – nekonečný jazyk obsahující L a mající konečný počet stavů. Toho využijeme v oddílu VII. Konečně teorém 18 v oddílu VI podává celkovou charakterizaci třídy jazyků s konečným počtem stavů, která připomíná způsob, jakým se v topologii definuje třída Borelových množin. Úlohu, kterou tam hrají otevřené množiny, zde zastávají konečné jazyky a místo operací spočetného sjednocení a průniku a operace vytvoření doplňků se zde užívá operace konečného sjednocení, komplexního součinu a uzávěru.

Jestliže závěry, k nimž se dospělo v teorii konečných automatů, mají závažné důsledky pro studium gramatik s konečným počtem stavů a přirozených gramatik, opak platí zatím jen v menší míře. Přesto je možno uvést některé práce, které se tímto problémem zabývají ([111] aj.)

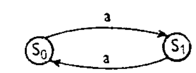
Některé poznatky z teorie konečných automatů (resp. gramatik z F_1) lze však převést do teorie gramatik z F_1 (resp. konečných automatů) jen s určitými změnami. Ukážeme to na těchto teorémech:

Teorém 21. *Nechť je A konečný automat o r stavech. Množina $T(A)$ je nekonečná právě tehdy, když existuje posloupnost $x \in T(A)$ o délce $n \geqq r$.*

Teorém 22. *Nechť je A konečný automat a r počet stavů tohoto automatu. Je-li $T(A)$ nekonečné, produkuje automat A alespoň jednu posloupnost o délce n takovou, že $r \leqq n < 2r$.*

Teorém 21 tedy říká, že $T(A)$ je nekonečné právě tehdy, když obsahuje posloupnost, jejíž délka se alespoň rovná počtu stavů v A. Pro gramatiky z F_1 takový teorém neplatí, jak vyplývá z příkladu na obrázku, kde L_G je konečné, i když existuje posloupnost (aa), jejíž délka se rovná počtu stavů.

Platí však



Teorém 23. *Platí-li $G \in F_4$ a obsahuje-li L_G posloupnost x, jejíž délka je větší než počet stavů v G, který označíme r, je L_G nekonečné.*

Teorém 24. *Platí-li $G \in F_4$ a je-li L_G nekonečné, pak toto L_G obsahuje posloupnost x, jejíž délka n vyhovuje nerovnostem*

$$r < n < 2r\,.$$

16. Místo jazyků s konečným počtem stavů v hierarchii Chomského

N. Chomsky stanovil ve studii [53] hierarchii typů generativních gramatik, které představují generativní modely přirozených jazyků. Každý z těchto modelů odpovídá určitému typu stroje, počínaje konečným automatem a konče Turingovým strojem.

Nechť je V konečná množina prvků zvaná slovník nebo abeceda. Buď V_T část množiny V vytvořená alespoň ze dvou prvků: jednoho jednotkového symbolu, který označíme I, a jednoho hraničního symbolu, který označíme $\#$ a který vyhovuje níže uvedené podmínce 3.

V_T se nazývá terminální slovník, $V_N = V - V_T$ se nazývá nonterminální (pomocný) slovník; klademe podmínku, že $V_N \neq 0$. Z V_N vybereme určitý symbol, který označíme S a nazveme symbolem věty; tento symbol se objeví v jedné z definic, kterou podáváme níže (viz definici terminálního jazyka generovaného gramatikou G).

Buď H podpologrupa volné pologrupy generované množinou V taková, že $I \in H$ a že pro každé $\alpha \in V$ posloupnost vytvořená z jediného symbolu α patří do H. V podpologrupě H budeme uvažovat binární relaci „$\rightarrow$", kterou budeme číst „nahraď" a která splňuje tyto podmínky:

Podmínka 1. Relace „$\rightarrow$" není reflexivní.

Podmínka 2. Relace $A \in V_N$ platí právě tehdy, když existují tři prvky volné pologrupy $D(V)$ generované množinou V – označíme je φ, ψ, ω – takové, že $\varphi A \psi \to \varphi \omega \psi$.

Podmínka 3. Neexistují tři prvky φ, ψ a ω z pologrupy $D(V)$ takové, že by platilo $\varphi \to \psi \# \omega$ a $\psi \neq I \neq \omega$.

Podmínka 4. Existuje konečná množina uspořádaných dvojic $(\chi_1, \omega_1), \ldots, (\chi_n, \omega_n)$ vytvořená z prvků pologrupy $D(V)$ a taková, že pro jakékoli $\varphi \in H$, $\psi \in H$ platí relace $\varphi \to \omega$ právě tehdy, když existuje $\varphi_1 \in D(V)$, $\varphi_2 \in D(V)$ a přirozené číslo $j \leqq n$ s vlastností $\varphi = \varphi_1 \chi_j \varphi_2$ a $\psi = \varphi_1 \omega_j \varphi_2$.

Klademe-li $\varphi_1 = \varphi_2 = I$, platí $\chi_j = \varphi_1 \chi_j \varphi_2$, $\omega_j = \varphi_1 \omega_j \varphi_2$, tedy na základě podmínky 4 platí $\chi_j \to \omega_j$ pro $1 \leqq j \leqq n$. Zejména z toho vyplývá, že $\chi_j \in H$ a $\omega_j \in H$ pro $1 \leqq j \leqq n$.

Systém $G = \langle V, V_T, H, S, \to \rangle$ nazveme gramatikou. Kterákoli dvojice (χ_j, ω_j) z dvojic zavedených podmínkou 4 tvoří gramatické pravidlo. Podmínkou 4 nabývá definice relace „→" konečného charakteru, neboť se redukuje na vyjmenování konečného počtu uspořádaných dvojic vytvořených z prvků pologrupy $D(V)$. Tak nabývá sama definice gramatiky konečného charakteru; je to ostatně podmínka, bez které není pojem gramatiky myslitelný.

Z hlediska přirozených jazyků dospějeme k výše zavedenému pojmu gramatiky zobecněním úvah o takzvaných frázových gramatikách ([276], [354], [280], [49] atd.). Taková gramatika se skládá z konečného počtu „přepisovacích pravidel" tvaru $\varphi \to \psi$, kde φ a ψ jsou posloupnosti symbolů. Množina symbolů obsahuje dva zvláštní symboly: výchozí symbol S, který odpovídá větě, a hraniční symbol $\#$, který označuje každý začátek a každý konec věty. Některé symboly odpovídají slovům a morfémům; ty tvoří „terminální slovník". Jiné symboly odpovídají zprostředkujícím složkám a tvoří „neterminální (pomocný) slovník". S je prvkem nonterminálního slovníku. Taková gramatika pracuje tímto způsobem: Vyjde se od symbolu S, na který se aplikuje určité přepisovací pravidlo. Na takto získanou posloupnost se znovu aplikuje určité přepisovací pravidlo. Takto postupujeme tak dlouho, dokud neobdržíme posloupnost vytvořenou výlučně ze symbolů terminálního slovníku. Taková posloupnost bude S-derivace a úhrn S-derivací bude tvořit jazyk generovaný uvažovanou gramatikou. Pro zpřesnění předpokládejme nonterminální slovník $\{S, A, B, C\}$ a terminální slovník $\{a, b, I, \#\}$. Dále předpokládejme, že máme k dispozici tato přepisovací pravidla: $S \to AB$, $A \to C$, $CB \to Cb$ a $C \to a$. Máme jedinou S-derivaci, kterou obdržíme aplikací všech čtyř pravidel: $\# S \#$, $\# AB \#$, $\# CB \#$, $\# Cb \#$, $\# ab \#$. Jazyk generovaný uvažovanou gramatikou je tedy vytvořen jedinou posloupností $\# ab \#$. Ve výše podaných úvahách se značí rozbor věty S na její bezprostřední složky: A – nominální skupina, V – verbální skupina, C – substantivum, a – jednotlivé substantivum, b – jednotlivé adjektivum. Jestliže například a = elevul (žák), b = învaţă (učí se), dostaneme rozbor věty elevul învaţă (žák se učí) na bezprostřední složky.

Vraťme se k výše definované gramatice G a s použitím vyslovených myšlenek stanovme způsob, jak gramatika pracuje. Budeme postulovat několik modalit, které odpovídají různým omezením, jimž podléhá relace „→".

Než postoupíme dále, dohodneme se o určitém způsobu zápisu, který byl dosud respektován jen částečně a který přispěje ke zjednodušení dalších výkladů. Budeme užívat: a) velkých písmen na označování konečných posloupností prvků z V_N; b) malých písmen na označování konečných posloupností prvků z V_T; c) malých řeckých písmen na označování libovolných konečných posloupností prvků z V; d) počátečních písmen různých abeced na označování symbolů z V; e) písmen z konce různých abeced na označování konečných posloupností prvků z V.

Říkáme, že systém $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ při $n \geqq 1$ je ψ-derivací ω, jestliže $\psi = \varphi_1$, $\omega = \varphi_n$ a $\varphi_i \to \varphi_{i+1}$ pro $1 \leqq i < n$. Systém $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, pro který existují ψ a ω taková, že $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ je ψ-derivací ω, nazýváme derivací. Každé φ_i je prvek derivace; φ_1 je výchozí prvek, φ_n je koncový prvek.

Zápis $\varphi \Rightarrow \psi$ bude značit, že existuje φ-derivace ψ. Je zřejmé, že relace $\Rightarrow$ je relací částečného uspořádání v H.

Mějme dvě derivace $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ a $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. Předpokládejme, že $n < m$ a $\varphi_i = \varphi'_i$ pro $1 \leqq i \leqq n$. Za těchto podmínek říkáme, že první derivace je počáteční segment druhé derivace.

Derivaci nazveme uzavřenou, není-li počátečním segmentem jiné derivace. Koncový prvek uzavřené derivace není vždy posloupnost prvků z V_T; může se stát, že se derivace „zablokuje" u některého prvku, který je posloupností obsahující některé prvky z V_N. Na druhé straně každá derivace, jejímž koncovým prvkem je posloupnost prvků z V_T, není uzavřená; můžeme totiž mít přepisovací pravidla tvaru $ab \to cd$, kde a, b, c, d jsou symboly z V_T.

Položme $\lambda = \# S \#$. Množinu všech posloupností x vytvořených z prvků množiny V_T, pro něž existuje λ-derivace x, nazveme terminálním jazykem generovaným množinou G a označíme jej L_G.

Říkáme, že dvě gramatiky G a G^* jsou ekvivalentní, jestliže platí

$$L_G = L_{G^*}.$$

Budeme nyní uvažovat řadu omezení, která mohou pro některou gramatiku platit:

Omezení 1. Platí-li $\varphi \to \psi$, pak existují tři posloupnosti φ_1, φ_2 a ω a symbol $A \in V_N$ takové, že

$$\varphi = \varphi_1 A \varphi_2, \quad \psi = \varphi_1 \omega \varphi_2 \quad \text{a} \quad \omega \neq I.$$

Omezení 2. Platí-li $\varphi \to \psi$, pak existují tři posloupnosti φ_1, φ_2 a ω a symbol $A \in V_N$ takové, že

$$\varphi = \varphi_1 A \varphi_2, \quad \psi = \varphi_1 \omega \varphi_2, \quad \omega \neq I \text{ a } A \to \omega.$$

Omezení 3. Platí-li $\varphi \to \psi$, pak existují tři posloupnosti φ_1, φ_2 a ω, symbol $a \in V_T$ a dva symboly $A \in V_N$ a $B \in V_N$ takové, že

$$\varphi = \varphi_1 A \varphi_2 \,, \quad \psi = \varphi_1 \omega \varphi_2 \,, \quad \omega \neq I \,, \quad A \to \omega$$

a platí buď relace $\omega = aB$ nebo relace $\omega = a$ $(a \neq \#)$.

Význam těchto omezení je vázán zejména na 4. z výše uvedených podmínek. Omezení 1 ukládá každému pravidlu $\chi_j \to \omega_j$ z gramatiky G standardizovanou formu

$$\varphi_1 A \varphi_2 \to \varphi_1 \omega \varphi_2 \quad (\text{při} \quad \omega \neq I)\,,$$

kde

$$\chi_j = \varphi_1 A \varphi_2 \quad \text{a} \quad \omega_j = \varphi_1 \omega \varphi_2 \,.$$

Nazveme kontextem jakoukoli uspořádanou dvojici prvků volné pologrupy generované množinou V. Kontext se zapisuje formou (φ, ψ). Uvažovat prvek χ v kontextu (φ, ψ) znamená uvažovat posloupnost $\varphi\chi\psi$. Ve formulaci omezení 1 se A a ω vyskytují v kontextu (φ_1, φ_2). Proto lze pravidlo $\varphi_1 A \varphi_2 \to \varphi_1 \omega \varphi_2$ vyjádřit také tak, že platí $A \to \omega$ v kontextu (φ_1, φ_2). Samozřejmě není vyloučena možnost, že $\varphi_1 = \varphi_2 = I$; kontext (I, I) se nazývá nulový kontext.

Omezení 2 má tento význam: každé pravidlo $\chi_j \to \omega_j$ $(1 \leqq j < n)$ má tvar $A \to \omega$ $(\omega \neq I)$. Připomínáme, že A je nekoncový symbol (tedy symbol z V_N).

Omezení 3 ukládá každému pravidlu $\chi_j \to \omega_j$ buď tvar $A \to aB$ nebo tvar $A \to a$. (A a B jsou zde nekoncové symboly, a je koncový symbol, tedy symbol z V_T).

Nyní zavedeme čtyři typy gramatik a čtyři jim odpovídající typy jazyků. Gramatiku G, pro kterou neplatí žádné z uvedených tří omezení, nazveme gramatikou typu 0; jazyk generovaný touto gramatikou je jazykem typu 0. Gramatiku G, pro kterou platí omezení i $(1 \leqq i \leqq 3)$ nazveme gramatikou typu i a jazyk L_G bude jazyk typu i.

Gramatika typu 0 je v podstatě ekvivalentní s Turingovým strojem. Gramatika typu 3 je, jak uvidíme ještě v této kapitole, ekvivalentní s konečným automatem, tedy s gramatikou s konečným počtem stavů. Gramatiky typu 1 a 2 odpovídají rovněž zvláštním třídám matematických strojů. Protože gramatika typu 2 je vytvořena z pravidel $A \to \omega$ $(\omega \neq I)$, která lze aplikovat v jakémkoli kontextu a jsou tedy na kontextu nezávislá, nazývá se také nekontextová gramatika (context free phrase-structure grammar).

Nekontextové gramatiky jsou velmi důležité při modelování přirozených jazyků, protože jsou adekvátnější než gramatiky s konečným počtem stavů. Zároveň se ukázalo, že i jiné důležité typy gramatik studovaných v odborné literatuře jsou ekvivalentní s gramatikami nekontextovými. Z nich uvádíme gramatiky závislostní ([148], [97]), projektivní ([198], [199], [149], [196], [152], [88]), kategoriální ([4], [191], [192], [193], [16], [17]) a takzvané zásobníkové gramatiky (push-down store grammars; [86], [260], [56], [60], [358], [359]). Y. Bar-Hillel podal zjednodušenou variantu nekontextových gramatik takto: Taková gramatika je uspořádaný systém čtyř předmětů $\langle V, T, S, P \rangle$; jednotlivé předměty se definují takto: V je konečná množina zvaná úplný slovník, T je část množiny V zvaná koncový (terminální) slovník, S je prvek množiny $V - T$ (pomocného slovníku) a nazývá se výchozí symbol a P je konečná množina produkovacích pravidel tvaru $X \to x$, kde $X \in V - T$ a x je posloupnost prvků množiny V. Říkáme, že posloupnost x přímo generuje posloupnost y (píšeme $x \to y$), jestliže y vznikne z x aplikací jediného produkovacího pravidla; říkáme, že x generuje y (píšeme $x \Rightarrow y$), jestliže y vznikne z x opakovanou aplikací několika produkovacích pravidel, přičemž počet opakování je konečný (přesněji je možno říci, že x generuje y, jestliže existuje řada posloupností nad V: $z_1, z_2, \ldots, z_n$ takových, že $x = z_1$, $y = z_n$ a z_i přímo generuje z_{i+1} pro $i = 1, \ldots$ $\ldots, n - 1$). Posloupnost prvků z množiny T je větou, jestliže množina S generuje tuto posloupnost. Množina všech vět tvoří jazyk vymezený (nebo reprezentovaný) uvažovanou nekontextovou gramatikou.

Teorém 25. *Jakákoli gramatika (jazyk) typu $i + 1$ je gramatikou (jazykem) typu i* $(0 \leqq i \leqq 2)$.

Teorém 26. *Je-li L jazyk s konečným počtem stavů nad slovníkem Σ, pak $\# L \#$ je jazyk s konečným počtem stavů nad slovníkem $\Sigma \cup \{\#\}$.*

Teorém 27. *Je-li L jazyk nad slovníkem Σ a $\# L \#$ jazyk s konečným počtem stavů nad slovníkem $\Sigma \cup \{\#\}$ $(\# \notin \Sigma)$, pak je L jazyk s konečným počtem stavů nad slovníkem Σ.*

Teorém 28. *Jazyk typu 3 je jazyk s konečným počtem stavů.*

Teorém 29. *Je-li jazyk L nad slovníkem Σ jazykem s konečným počtem stavů, pak je $\# L \#$ jazyk typu 3 nad slovníkem $\Sigma \cup \{\#\}$.*

Teorém 29'. *Každý jazyk s konečným počtem stavů je jazyk typu 3.*

Z toho vyplývá, přihlédneme-li též k teorému 28, toto:

Určitý jazyk je jazykem s konečným počtem stavů právě tehdy, když je jazykem typu 3.

V následujících výkladech chceme na základě úvah ve článku [54] stanovit postačující podmínku pro to, aby nekontextová gramatika byla gramatikou s konečným počtem stavů. K tomu použijeme pojmu gramatiky se sebezapouštěním, definované touto podmínkou: existují tři řetězy A, φ_1 a φ_2 (A je nekoncový symbol) takové, že $\varphi_1 \neq I \neq \varphi_2$ a $A \Rightarrow \varphi_1 A \varphi_2$ (definice 7 ve studii [53]).

Teorém 30. *Je-li G nekontextová gramatika bez sebezapouštění, je L_G jazyk s konečným počtem stavů.*

Teorém 31. *Je-li G gramatika s konečným počtem stavů, je ekvivalentní s nekontextovou gramatikou G' bez sebezapouštění.*

17. Pokusy a události

Uvažujme nervovou síť vytvořenou z k neuronů $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_k$. Předpokládejme, že $k \geqq 1$. Každý neuron může zaujmout dva stavy: stav činnosti – označíme jej číslicí 1 – a stav klidu – označíme jej číslicí 0. Zastaví-li se pokus s naší nervovou sítí u přítomného okamžiku p, může být popsán maticí níže uvedeného typu (pro jednoduchost klademe $k = 2$).

Takovou matici, v níž každý prvek je buď 0 nebo 1, nazveme binární.

Tab. 9

	$\mathcal{N}_1$	$\mathcal{N}_2$
p	1	0
$p-1$	1	1
$p-2$	0	1
$p-3$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Číslice 1 v prvním řádku prvního sloupce ukazuje, že v přítomném okamžiku p je neuron $\mathcal{N}_1$ v činnosti. Číslice 0 v prvním řádku druhého sloupce ukazuje, že neuron $\mathcal{N}_2$ je v přítomném okamžiku p v klidu atd. Pokus může být v minulosti nekonečný, což jsme naznačili třemi svislými řadami bodů. V tomto případě je tedy uvedená matice nekonečná.

Událost je vlastnost, které může nabýt pokus. Například to, že ve výše uvedeném pokusu je neuron $\mathcal{N}_2$ v okamžiku $p - 2$ v klidu, tvoří událost; to, že neuron $\mathcal{N}_1$ je v okamžiku $p - 1$ v činnosti, ale v okamžiku $p - 2$ v činnosti není, tvoří rovněž událost. Uvedeme ještě několik dalších příkladů na události ve spojení s dvěma neurony $\mathcal{N}_1$ a $\mathcal{N}_2$:

1. $\mathcal{N}_1$ je v okamžiku p v činnosti;
2. $\mathcal{N}_2$ není v činnosti v okamžiku p, ale $\mathcal{N}_1$ je v činnosti v okamžiku $p - 1$;
3. Jeden z neuronů $\mathcal{N}_1$ a $\mathcal{N}_2$ je v činnosti v okamžiku p;
4. Oba neurony $\mathcal{N}_1$ a $\mathcal{N}_2$ jsou v činnosti v okamžiku p;
5. $\mathcal{N}_2$ je v určitém okamžiku v činnosti;
6. $\mathcal{N}_2$ je v činnosti v kterémkoli okamžiku jiném než p.

Označíme-li $\mathcal{P}$ (eventuálně nekonečnou) množinu okamžiků, v nichž se rozvíjí pokus, a $\mathcal{N}$ množinu neuronů, lze celý pokus charakterizovat zobrazením kartézského součinu $\mathcal{P} \times \mathcal{N}$ do množiny $\{0, 1\}$.

Jednoduchá událost s množinou neuronů $\mathcal{N}$ je zobrazením části součinu

$\mathcal{P} \times \mathcal{N}$ do množiny $\{0, 1\}$. Přítomný okamžik můžeme eventuálně chápat jako okamžik 0 a pak je $\mathcal{P}$ buď množina všech záporných celých čísel a nuly nebo část posloupnosti $0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$

Abychom mluvili obecně, můžeme předpokládat, že platí vždy $\mathcal{P} = \{0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots\}$. Je-li uvažovaný pokus konečný, pak označíme-li $-n$ jeho časově nejvzdálenější minulý okamžik, připouštíme, že zobrazení, které definuje pokus, nabývá v tomto případě nulové hodnoty pro jakýkoli prvek $(i, \mathcal{N}_j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{N}$, pro který platí $-i > n$.

Říkáme, že jednoduchá událost e je slučitelná s pokusem $\mathcal{E}$ nebo že událost e se vyskytuje v pokusu $\mathcal{E}$, jestliže znázorníme-li pokus $\mathcal{E}$ zobrazením

$$f : \mathcal{P} \times \mathcal{N} \to \{0, 1\},$$

obdržíme událost e jako omezení zobrazení f na určitou část kartézského součinu $\mathcal{P} \times \mathcal{N}$.

Ve výše rozbíraném pokusu $\mathcal{E}_1$ (viz výše uvedenou tabulku) platí $\mathcal{P} = \{p, p-1, p-2, \ldots\}$, $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2\}$, $f(p, \mathcal{N}_1) = 1$, $f(p, \mathcal{N}_2) = 0$, $f(p - 1, \mathcal{N}_1) = 1$, $f(p - 1, \mathcal{N}_2) = 1$, $f(p - 2, \mathcal{N}_1) = 0$, $f(p - 2, \mathcal{N}_2) = 1$ atd. Události 1, 2 a 4 jsou jednoduché a vyskytují se v pokusu $\mathcal{E}_1$, s nímž jsou slučitelné. Ověřme si, že to platí pro událost 4. Buď $\mathcal{C}_4$ část součinu $\mathcal{P} \times \mathcal{N}$ vytvořená z dvou prvků $(p, \mathcal{N}_1)$ a $(p, \mathcal{N}_2)$. Jednoduchá událost 4 je charakterizována tímto jednoznačným zobrazením f_4 množiny $\mathcal{C}_4$ do množiny $\{0, 1\}$: $f_4(p, \mathcal{N}_1) = 1, f_4(p, \mathcal{N}_2) = 1$. Zobrazení f_4 je právě omezení zobrazení f na podmnožinu $\mathcal{C}_4$ a jednoduchý pokus 4 se tedy vyskytuje v pokusu $\mathcal{E}_1$.

Událost 6 je rovněž jednoduchá. Označme $\mathcal{C}_6$ tuto část kartézského součinu $\mathcal{P} \times \mathcal{N} : \mathcal{C}_6 = \{(p, \mathcal{N}_2), (p - 1, \mathcal{N}_2), (p - 2, \mathcal{N}_2) \ldots\}$. Událost 6 je definována tímto jednoznačným zobrazením f_6 podmnožiny $\mathcal{C}_6$ do množiny $\{0, 1\}$:

$$f_6(n, \mathcal{N}_2) = \begin{cases} 0, \text{ platí-li } n = p \\ 1, \text{ platí-li } n < p. \end{cases}$$

Nemůžeme přesně říci, zdali událost 6 se v pokusu $\mathcal{E}_1$ skutečně vyskytuje, protože neznáme celou matici, která definuje pokus $\mathcal{E}_1$.

Události 3 a 5 nejsou jednoduché, ale lze je obdržet elementárními operacemi aplikovanými na jednoduché události. Označme $\mathcal{C}'$ část kartézského součinu $\mathcal{P} \times \mathcal{N}$ vytvořenou z jediného prvku $(p, \mathcal{N}_1)$ a C'' část téhož součinu vytvořenou z jediného prvku $(p, \mathcal{N}_2)$. Buď e' jednoduchá událost definovaná tímto jednoznačným zobrazením f' množiny $\mathcal{C}'$ do množiny $\{0, 1\} : f'(p, \mathcal{N}_1) = 1$; buď e'' jednoduchá událost definovaná tímto jednoznačným zobrazením množiny $\mathcal{C}''$ do množiny $\{0, 1\}$: $f''(p, \mathcal{N}_2) = 1$. Událost 3 je logickou disjunkcí jednoduchých událostí e' a e''.

Obdobně lze dokázat, že událost 5 je logickou disjunkcí nekonečného počtu jednoduchých událostí.

Jakoukoli událost lze obdržet z jednoduchých událostí logickou disjunkcí nebo konjunkcí.

O tom, zdali se nejednoduchá událost vyskytuje v určitém pokusu, lze rozhodnout rekurentně tímto způsobem:

1. disjunkce událostí se vyskytuje v pokusu $\mathscr{E}$, jestliže se v něm vyskytuje alespoň jeden ze členů disjunkce;

2. konjunkce událostí se vyskytuje v pokusu $\mathscr{E}$, jestliže se v něm vyskytuje každý člen konjunkce.

Tak se událost 3 vyskytuje v pokusu $\mathscr{E}_1$, protože je disjunkcí událostí e' a e'' a událost e' se v pokusu $\mathscr{E}_1$ vyskytuje. Rovněž událost 5 se vyskytuje v pokusu $\mathscr{E}_1$, neboť je disjunkcí nekonečného počtu jednoduchých událostí, z nichž se alespoň dvě v pokusu $\mathscr{E}_1$ vyskytují.

Předpokládejme, že se omezíme na události týkající se pevně stanoveného časového období skládajícího se z λ ($\geqq 1$) po sobě následujících okamžiků $p - \lambda + 1, \ldots, p$, přičemž p je přítomný okamžik. Takové události se nazývají určité události o délce (trvání) λ. Z výše uvedených příkladů jsou určité události 1 – 4, zatímco události 5 a 6 určité nejsou.

18. Pravidelné události v pojetí Kleeneho

Jak vyplývá z úvah v předchozí kapitole, je možno událost definovat jako rozklad množiny pokusů, který má dva prvky; první prvek zahrnuje pokusy, v nichž se událost vyskytuje, druhý pokusy, v nichž se událost nevyskytuje. Z matematického hlediska lze pokus s k neurony a o délce λ popsat binární maticí s k sloupci a λ řádky. Probíhá-li λ množinu kladných celých čísel, obdržíme množinu všech pokusů s k neurony a o konečné délce.

Jednotkovou událostí (označíme ji I_k nebo I) nazveme událost, která se vyskytuje v každém pokusu; nevlastní událostí (označíme ji $\bar{I}_k$ nebo $\bar{I}$) nazveme událost, která se nevyskytuje v žádném pokusu.

Budeme uvažovat tři operace s množinami binárních matic s pevně stanoveným počtem sloupců k a s libovolným (tedy konečným nebo nekonečným) počtem řádků. To znamená, že budeme brát v úvahu pouze ty binární matice, které popisují pokusy s k neurony.

První operace je operace sjednocení známá z teorie množin: jsou-li E a F dvě množiny matic, je jejich sjednocení $E \cup F$, které budeme označovat také $E \vee F$, množina těch matic, které patří alespoň do jedné z množin E a F. Značka $\vee$ je vzata z matematické logiky, kde operaci sjednocení odpovídá logická disjunkce či prostě disjunkce a množinové operaci průniku odpovídá logická konjunkce.

Součin EF (nikoli kartézský!) množin matic E a F je množina těch matic, které lze obdržet položením kterékoli matice z množiny F pod kteroukoli konečnou

matici z množiny E. Jestliže zvolená matice z množiny E má λ_1 řádků a zvolená matice z množiny F má λ_2 řádků (přičemž číslo λ_2 může být konečné nebo nekonečné), bude odpovídající matice z množiny EF mít $\lambda_1 + \lambda_2$ řádků; tato matice bude konečná právě tehdy, bude-li matice vybraná z množiny F konečná.

Je zřejmé, že operace $E \vee F$ a EF jsou asociativní. Dohodneme se, že bude platit $E^0F = F$, $E^1 = E$, $E^2 = EE$, $E^3 = EEE, \ldots$

Třetí operace, kterou budeme uvažovat, se definuje na základě obou operací předchozích. Jsou-li E a F dvě množiny matic, položíme

$$E * F = \bigcup_{n=0}^{\infty} E^n F .$$

Operaci $*$ nazveme operací iterace levé množiny pravou množinou; $E * F$ je tedy iterát množiny E množinou F.

Označme $\mathscr{R}$ nejmenší třídu množin matic s těmito vlastnostmi:

1. jakákoli množina vytvořená z jediné matice patří do této třídy;
2. prázdná množina patří do této třídy;
3. patří-li do této třídy množiny E a F, patří do ní i množiny $E \vee F$, EF a $E * F$.

Každou množinu matic, která patří do třídy $\mathscr{R}$, nazveme pravidelnou množinou matic.

Událost s k neurony jsme definovali jako rozklad množiny binárních matic s k sloupci, který je vytvořen z dvou prvků. Existuje jediná událost, která se vyskytuje v kterémkoli pokusu odpovídajícím některé matici z prvního prvku rozkladu a nevyskytuje se v žádném z pokusů odpovídajících některé matici z druhého prvku rozkladu. Tak dospějeme zcela přirozeně k definici pojmu události s k neurony jako množiny binárních matic s k sloupci. Obsahuje-li tato množina všechny binární matice s k sloupci, obdržíme jednotkovou událost s k neurony.

Událost, která odpovídá pravidelné množině matic, je pravidelná událost v pojetí Kleeneho či prostě pravidelná událost.

Termínu událost jsme v této kapitole užívali v jiném smyslu než dříve. V dalších výkladech chceme ukázat, že mezi oběma typy událostí je naprostá analogie; tak budeme moci konstatovat, že zde nejde o náhodnou homonymii, ale o dva izomorfní systémy.

19. Izomorfismus mezi pravidelnými událostmi a událostmi reprezentovatelnými konečným automatem

Nechť je Σ konečná neprázdná abeceda. Nechť n označuje počet prvků abecedy Σ a předpokládejme, že existuje přirozené číslo k takové, že $2^k = n$. Za těchto podmínek budeme uvažovat určitou vzájemně jednoznačnou korespondenci – kterou označíme ω – mezi volnou pologrupou generovanou abecedou Σ a mezi množinou konečných binárních matic s k sloupci. Jak je známo, rodina podmnožin množiny o k prvcích má mohutnost 2^k. Přiřadíme vzájemně jednoznačným způsobem každé podmnožině množiny K vytvořené z prvních k přirozených čísel jeden z prvků množiny Σ.

Označme $\mathscr{P}(\sigma)$ tu podmnožinu množiny K, kterou přiřadíme ve smyslu zavedené korespondence prvku $\sigma \in \Sigma$. Je-li $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_\lambda$ konečná posloupnost prvků množiny Σ, přiřadíme této posloupnosti binární matici o k sloupcích a λ řádcích takto: na řádek i $(1 \leqq i \leqq \lambda)$ napíšeme číslici 1 tam, kde se řádek protíná se sloupcem příslušejícím podmnožině $\mathscr{P}(\sigma)$; všude jinde napíšeme číslici 0. Je-li naopak dána binární matice o k sloupcích a λ řádcích, přiřadíme jí posloupnost o délce λ vytvořenou z prvků množiny Σ takto: platí-li $1 \leqq i \leqq \lambda$, označme $\mathscr{R}(i)$ množinu přirozených čísel majících tu vlastnost, že platí-li $m \in \mathscr{R}(i)$, je v poli matice, kde se protíná sloupec m s řádkem i, číslice 1. Je zřejmé, že $\mathscr{R}(i) \subseteq K$. Nechť je σ_i ten prvek množiny Σ, pro který platí $\mathscr{P}(\sigma_i) = \mathscr{R}(i)$. Posloupnost $x = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_\lambda$ bude posloupnost přiřazená uvažované matici. Protože prvek σ_i je pro každé i jednoznačně určen, vyplývá z toho, že i posloupnost x je jednoznačně určena.

Abychom osvětlili výše zavedenou vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi T (volnou pologrupou generovanou množinou Σ) a množinou konečných binárních matic o k sloupcích, uvažujme zvláštní případ $k = 3$ a nechť σ_i $(1 \leqq i \leqq 8)$ jsou prvky množiny Σ. Stanovíme tuto vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi množinou částí množiny $\{1, 2, 3\}$ a množinou Σ: $\sigma_1 \leftrightarrow \{0\}$, $\sigma_2 \leftrightarrow \{1\}$, $\sigma_3 \leftrightarrow \{2\}$, $\sigma_4 \leftrightarrow \{3\}$, $\sigma_5 \leftrightarrow \{1, 2\}$, $\sigma_6 \leftrightarrow \{2, 3\}$, $\sigma_7 \leftrightarrow \{1, 3\}$, $\sigma_8 \leftrightarrow \{1, 2, 3\}$. Mějme nyní nějaký prvek z množiny T, například $\sigma_2\sigma_7\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_3$. Na základě výše definovaného vzájemně jednoznačného zákona odpovídá tomuto prvku množiny T níže uvedená binární matice.

Tab. 10

	1	2	3
σ_2	1	0	0
σ_7	1	0	1
σ_1	0	0	0
σ_2	1	0	0
σ_3	0	1	0
σ_3	0	1	0

Naopak odpovídá této binární matici právě posloupnost $\sigma_2\sigma_7\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_3$; opravdu platí $\mathscr{R}(1) = \mathscr{P}(\sigma_2)$, $\mathscr{R}(2) = \mathscr{P}(\sigma_7)$, $\mathscr{R}(3) = \mathscr{P}(\sigma_1)$, $\mathscr{R}(4) = \mathscr{P}(\sigma_2)$, $\mathscr{R}(5) = \mathscr{P}(\sigma_3)$, $\mathscr{R}(6) = \mathscr{P}(\sigma_3)$.

Protože událost v abecedě Σ je část množiny T a určitá událost s k neurony je množina binárních matic s k sloupci a s konečným počtem řádků, indukuje výše uvedená vzájemně jednoznačná korespondence vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi množinou událostí v abecedě s k prvky a množinou definovaných událostí s k neurony. V této korespondenci se množině T přiřazuje jednotková událost a nule se přiřazuje nemožná událost.

V tomto oddílu jsme uvažovali různé operace s událostmi v téže abecedě Σ: operaci sjednocení a průniku, operaci komplexního součinu a operaci uzávěru. V této kapitole jsme uvažovali různé operace aplikované na události s k neurony: logickou disjunkci, logickou konjunkci (kterou značíme &), operaci součinu a operaci iterace jedné události druhou.

Uvažujme tuto korespondenci mezi oběma řadami operací:

$\vee$	$\cup$
&	$\cap$
součin	komplexní součin

Pokud jde o operaci iterace události E událostí F, jejímž výsledkem je událost $E * F$, přiřadíme ji operaci s událostmi v abecedě Σ, kterou budeme definovat takto (budeme značit E_1 a F_1 události v abecedě Σ přiřazené událostem E a F na základě výše uvedené vzájemně jednoznačné korespondence):

$$\mathrm{cl}\,(E_1)\,F_1 = F_1 \cup E_1F_1 \cup E_1^2F_1 \cup \dots \cup E_1^nF_1 \cup \dots$$

Toto přiřazení je zcela přirozené; událost $\mathrm{cl}\,(E_1)\,F_1$ skutečně obdržíme z události $E * F$, nahradíme-li ve vyjádření události $E * F$ symbol E symbolem E_1, symbol F symbolem F_1, znak $\vee$ znakem $\cup$ a součin komplexním součinem. Zápis $\mathrm{cl}\,(E_1)\,F_1$ je oprávněný. Protože totiž E_1^0 označuje událost, která obsahuje jedinou posloupnost, totiž posloupnost s nulovým účinkem, vyplývá z toho, vyjdeme-li z distributivnosti komplexního součinu vzhledem k sjednocení, že

$$\mathrm{cl}\,(E_1)\,F_1 = (E_1^0 \cup E_1^1 \cup E_1^2 \cup \dots \cup E_1^n \cup \dots)\,F_1\,;$$

výraz v závorce se rovná, jak vyplývá z definice, výrazu $\mathrm{cl}\,(E_1)$.

Uvážíme-li, že součin je distributivní vzhledem k operaci logické disjunkce, obdržíme

$$E * F = F \vee (E \vee E^2 \vee E^3 \vee \dots \vee E^n \vee \dots)\,F\,.$$

Označíme-li E^0 událost vytvořenou pouze z nulové matice a položíme-li

$$E^{\infty 0} = E^0 \vee E^\infty\,, \quad \text{kde} \quad E^\infty = \bigvee_{n=1}^{\infty} E_n\,,$$

obdržíme, uvážíme-li, že $F = E^0 F$,

$$E * F = E^{\infty 0} F.$$

Přechod od E k E^∞ nazveme operací ∞-iterace a přechod od E k $E^{\infty 0}$ operací $\infty 0$-iterace. Jak vidíme, tato druhá operace odpovídá operaci uzávěru aplikované na události v abecedě Σ.

Teorém 32. *Vzájemně jednoznačná korespondence ω, stanovená mezi množinou událostí v abecedě Σ (s k prvky) a množinou určitých událostí s k neurony je izomorfismus vzhledem k dvojicím operací $(\vee, \cup)$, $(\&, \cap)$, (součin, komplexní součin) a ($\infty 0$-iterace, uzávěr).*

Jinými slovy, jsou-li E a F události v abecedě Σ a platí-li $E_1 = \omega(E)$, $F_1 = \omega(F)$, pak $E_1 \cup F_1 = \omega(E \vee F)$, $E_1 \cap F_1 = \omega(E \,\&\, F)$, $E_1 F_1 = \omega(EF)$ a cl $(E_1) = \omega(E^{\infty 0})$.

Teorém 33. *Událost E_1 v abecedě Σ (s k prvky) je reprezentovatelná konečným automatem právě tehdy, když určitá událost E s k neurony, přiřazená izomorfismem ω, je pravidelná událost v pojetí Kleeneho.*

ODDÍL VII

Gramatiky s konečným počtem stavů a přirozené jazyky

1. Syntaktické třídy v jazyce s konečným počtem stavů

Užívání gramatik s konečným počtem stavů jakožto modelů přirozených jazyků má některé zajímavé aspekty. Existují určité souvislosti mezi gramatikami s konečným počtem stavů na jedné straně a některými pojmy gramatiky přirozených jazyků na straně druhé.

Podle teorému 10 (bod e) v VI. oddílu gramatika G s konečným počtem stavů indukuje rozklad množiny všech frází, označené T, na konečný počet tříd, které jsou ekvivalenčními nebo kongruenčními třídami vzhledem k relaci kongruence ϱ_L; jazyk L_G je sjednocením takových tříd.

Kongruenční třída, do které patří určitá fráze, se někdy nazývá syntaktickou (nebo syntagmatickou) třídou této fráze. V přirozených jazycích jsou syntaktické třídy dvojí podle toho, zda obsahují nebo neobsahují alespoň jednu správnou frázi. Jak vyplývá ze samotné definice relace kongruence, dvě fráze, které patří do téže syntaktické třídy, se mohou v libovolném kontextu vzájemně nahrazovat tak, že byla-li celá fráze správná, zůstane správnou i po provedeném nahrazení, a byla-li celá fráze nesprávná, zůstane i po provedeném nahrazení nesprávnou; přesněji řečeno jsou-li f_1 a f_2 dvě fráze patřící do téže syntaktické třídy, pak pro jakoukoli dvojici frází f a g jsou fráze ff_1g a ff_2g buď obě správné nebo obě nesprávné. Zvláště z toho vyplývá, dosadíme-li za f a g frázi s nulovým účinkem, že obsahuje-li určitá syntaktická třída správnou frázi, jsou všechny fráze, které tato třída obsahuje, rovněž správné.

Relace zaměnitelnosti, kterou jsme právě uvažovali, bylo v moderní lingvistice často použito při definici pojmu syntaktické kategorie; tatáž relace je základem distributivní analýzy, která byla rozvinuta zejména v americké deskriptivní lingvistice a v teorii gramatiky založené na teorii množin, zvláště v pracích O. S. Kulaginové, která definuje pojem konfigurace různých řádů, založený právě na zmíněné relaci zaměnitelnosti [184].

2. Zjišťování konstrukční homonymie

Pro jazyk s konečným počtem stavů je charakteristické to, že v takovém jazyce je počet syntaktických tříd konečný.

Jak jsme viděli (viz teorémy 16, 19 a 20 v oddílu VI), může být jazyk s konečným počtem stavů reprezentován (generován) buď konečným deterministickým automatem nebo konečným indeterministickým automatem nebo konečně gramatikou s konečným počtem stavů. Reprezentujeme-li jazyk s konečným počtem stavů pomocí konečného deterministického automatu nebo pomocí nedvojznačné gramatiky s konečným počtem stavů, pak je věta příslušného jazyka jednoznačně určena posloupností stavů, kterou byla generována; jinými slovy dvěma různým generujícím posloupnostem stavů automatu (nebo gramatiky) odpovídají různé věty příslušného jazyka. Jinak je tomu v konečném indeterministickém automatu a v dvojznačné gramatice s konečným počtem stavů. Tam existuje zpravidla několik posloupností stavů, které generují tutéž větu. V článku [19] se navrhuje, aby v takových případech byl stavům automatu (nebo gramatiky) připisován „lingvistický význam". Dochází k jevu, který N. Chomsky (v knize [51], § 8) nazval konstrukční homonymií (constructional homonymity); tatáž věta připouští několik reprezentací, několik způsobů konstrukce. N. Chomsky to dokládá následujícím příkladem:

Mějme například posloupnost anglických fonémů [ənejm]. Tato posloupnost je do určité míry dvojznačná; může být interpretována jako a name (jméno) nebo jako an aim (účel, cíl). Kdyby gramatika, s níž pracujeme, byla systémem s jediným – fonematickým – plánem, který by tedy pracoval pouze s fonémy, nemohli bychom zmíněnou dvojznačnost odstranit ani ji nijak vysvětlit. Jestliže však gramatika obsahuje nejen fonematický plán, ale také plán morfologický, můžeme konstatovat, že jde o morfémy a, an, aim, name, jejichž fonematickým vyjádřením jsou posloupnosti [ə], [ən], [ejm], [nejm] a že posloupnost fonémů [ənejm] připouští dvojí reprezentaci v morfologickém (morfematickém) plánu. Kdykoli určitá posloupnost fonémů připouští ve vyšším plánu, než je fonematický, alespoň dva způsoby rozkladu čili dvě různé interpretace, říkáme, že jde o jev konstrukční homonymie.

Podobným příkladem je v rumunštině posloupnost fonémů [prindeįar], která může být interpretována jako prinde iar (opět chytá) nebo jako prinde i-ar (chytil by je).

Obecně můžeme konstrukční homonymii definovat nejen vzhledem k fonematickému plánu, ale vzhledem k jakémukoli jinému jazykovému plánu. Jestliže určitá posloupnost jednotek některého plánu odpovídá alespoň dvěma posloupnostem jednotek plánu vyššího, říkáme, že jde o konstrukční homonymii. V článku [50] uvádí N. Chomsky tento příklad konstrukční homonymie na úrovni slova: Anglická věta they are flying planes může být interpretována jako they-are-flying planes nebo jako they – are flying – planes.

Právě tak rumunská věta pregătesc baia copilului může být interpretována buď ve smyslu „připravuji koupel dítěti" – tedy tvar copilului je chápán jako dativ – nebo ve smyslu, který odpovídá chápání tvaru copilului jako genitivu („připravuji koupel dítěte"). N. Chomsky ukázal, že v takových případech je možno zjišťovat konstrukční homonymii frázovými gramatikami.

Schopnost gramatiky zjišťovat případy homonymie je důležitý činitel při stanovení stupně její adekvátnosti vzhledem ke gramatice přirozeného jazyka. N. Chomsky připisuje v knize [51], § 8 i v článku [50] velkou důležitost schopnosti frázových

gramatik zjišťovat případy homonymie „konstrukčními" metodami. Jak však poznamenávají Y. Bar-Hillel a E. Shamir v článku [18], N. Chomsky nepostřehl, že tuto možnost má i gramatika s konečným počtem stavů a konečný automat.

Omezíme-li se jen na fonematický plán, můžeme skutečně interpretovat dvě různé posloupnosti stavů, které generují tutéž posloupnost fonémů, jako dva různé morfematické rozklady téže posloupnosti. Obdobně je možno postupovat i v ostatních případech, které jsme shora uvedli. V článku [50], § 6 však N. Chomsky tvrdí, že zatímco frázová gramatika dochází na základě dvojznačné věty they are flying planes k dvěma neekvivalentním dedukcím, nelze to říci o gramatice s konečným počtem stavů.

Na druhé straně se zdá, že frázové gramatiky vysvětlují některé konstrukční homonymie jednodušeji a hlouběji. Přesné stanovení těchto výhod, které mají frázové gramatiky, však vyžaduje další zkoumání.

3. Slučitelnost některých relací koordinace s gramatikami s konečným počtem stavů

Teorém 7 v VI. oddílu říká, že kterýkoli konečný jazyk je jazykem s konečným počtem stavů. Jelikož přirozený jazyk je z určitého hlediska konečný, nabízí se závěr, že přirozené jazyky jsou jazyky s konečným počtem stavů. Kdybychom však považovali přirozené jazyky za konečné, byly by formulace gramatických pravidel těžkopádné a neúčinné. Gramatika je souhrn procesů a rekurzívních pravidel, jejichž aplikace se může v podstatě opakovat donekonečna; to je však v rozporu s předpokladem konečnosti jazyka generovaného příslušnou gramatikou. Uvažujme například toto pravidlo:

R_1 – Jsou-li x a y rumunské věty, pak je x şi y („x a y") rovněž rumunská věta.

Jestliže libovolně opakujeme aplikaci tohoto pravidla, obdržíme libovolně dlouhé věty; má-li x délku m a y délku n, má věta x şi y délku $m + n + 1$.

Buď $z_1 = x$ şi y, $z_2 = z_1$ şi $y, \ldots, z_{p+1} = z_p$ şi y. Věta z_2 má délku $m + n + 3$, věta z_{p+1} má délku $m + n + 1 + 2p$. Z toho vyplývá, že pro dosti velké p je věta z_p libovolně dlouhá. Protože pro $p \neq p'$ platí $z_p \neq z_{p'}$, platí také, že vyjdeme-li od dvou vět x a y (které popř. mohou být totožné), neomezený počet aplikací pravidla R_1 vede k nekonečnému počtu vět a tedy k nekonečnému jazyku.

Ukážeme však, že pravidlo R_1 nepřekračuje možnosti gramatiky s konečným počtem stavů. Je to třeba chápat takto:

Teorém 1. *Nechť je L jazyk s konečným počtem stavů a α slovo ze slovníku jazyka L. Označme L' nejmenší jazyk (jehož existenci lze snadno dokázat) s těmito vlastnostmi: 1. $L \subseteq L'$; 2. platí-li $x \in L'$ a $y \in L'$, pak platí $x\alpha y \in L'$. Za těchto podmínek je jazyk L' jazykem s konečným počtem stavů.*

Důkaz. Položme:

$$L_\alpha = L\{\alpha\} ;$$

jinými slovy L_α je součin jazyka L a jazyka vytvořeného z jediné věty α. Je zřejmé, že

$$L' = L \cup (L_\alpha) L \cup (L_\alpha)^2 L \cup \ldots \cup (L_\alpha)^n L \cup \ldots = L_\alpha * L ,$$

kde $*$ označuje operaci definovanou v 18. kapitole VI. oddílu. Na základě teorému 17 v VI. oddílu je L jakožto součin dvou jazyků s konečným počtem stavů rovněž jazyk s konečným počtem stavů. Na základě teorému 33 v oddílu VI je i jazyk $L' = L_\alpha * L$ jazykem s konečným počtem stavů.

Poznámka. Je-li dán jazyk L s konečným počtem stavů, neznamená to, že pro každé slovo σ a pro každé $x \in L$, $y \in L$ patří věta $x\sigma y$ nutně do jazyka L. Abychom se o tom přesvědčili, stačí dosadit za L konečný jazyk. Při určité volbě jazyka L a slova σ však může uvedené tvrzení platit, jak ukazuje případ jazyka L' v teorému 1.

4. Podmiňovací konstrukce překračují možnosti gramatik s konečným počtem stavů

Budeme nyní uvažovat toto pravidlo:

R_2 — Jsou-li x a y anglické věty, pak věta If x then y je rovněž anglická.

Rumunská obdoba pravidla R_2 byla rozebrána v VI. oddílu a bylo konstatováno, že tato obdoba překračuje možnosti gramatik s konečným počtem stavů. (Viz teorém 8 v oddílu VI.) Zatímco však v konstrukci Dacă x, atunci y (Jestliže x, pak y) může být slovo atunci popř. vypuštěno, v její anglické obdobě slovo then vypuštěno být nemůže; anglická varianta je proto z hlediska, které nás zde zajímá, přesvědčivější. Ukážeme, že pravidlo R_2 překračuje možnosti gramatiky s konečným počtem stavů. Přesný smysl tohoto tvrzení podává

Teorém 2. *Nechť je L jazyk s konečným počtem stavů a α a β dvě slova ze slovníku jazyka L. Označme L'' nejmenší jazyk (jehož existenci lze snadno dokázat) s těmito dvěma vlastnostmi: 1. $L \subseteq L''$; 2. jestliže $x \in L''$ a $y \in L''$, pak platí $\alpha x \beta y \in L''$. Za těchto podmínek jazyk L'' není jazykem s konečným počtem stavů.*

Důkaz. Je zřejmé, že jazyk L'' obsahuje jakoukoli větu tvaru

$$\underbrace{\alpha\alpha \ldots \alpha}_{n \text{ krát}} \times \underbrace{\beta y \beta y \ldots \beta y}_{\beta y \ n \text{ krát}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Věty $z_1 = \alpha x \beta y$, $z_2 = \alpha z_1 \beta y, \ldots, z_{n+1} = \alpha z_n \beta y, \ldots$ skutečně patří všechny do jazyka L''.

Připusťme pro důkaz sporem, že L'' je jazyk s konečným počtem stavů. Na základě teorému 10 v VI. oddílu má relace kongruence $\varrho_{L''}$ konečný index, jinými slovy počet $\varrho_{L''}$-ekvivalenčních tříd, na něž se rozkládá T, je konečný. Existuje tedy posloupnost přirozených čísel $p_1 < p_2 < \ldots < p_s < \ldots$ taková, že posloupnosti

$$\underbrace{\beta y \beta y \ldots \beta y}_{\beta y \ p_s \text{ krát}} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

patří všechny do téže $\varrho_{L''}$-kongruenční třídy. Z toho vyplývá, že všechny posloupnosti tvaru

$$\underbrace{\alpha\alpha \ldots \alpha}_{p_1 \text{ krát}} \times \underbrace{\beta y \beta y \ldots \beta y}_{\beta y \ p_s \text{ krát}} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

jsou větami jazyka L'', což odporuje definici tohoto jazyka. Předpoklad, že L'' je jazyk s konečným počtem stavů, je tedy nesprávný.

Poznámka. Interpretujeme-li veličiny teorému 2 tak, že za L dosadíme angličtinu a za α a β slova if a then, bude jazyk L'' obsahovat i věty, které mají tvar

$$\underbrace{\text{if if} \ldots \text{if}}_{n \text{ krát}} \times \underbrace{\text{then } y \text{ then } y \ldots \text{then } y}_{\text{then } y \ m \text{ krát}} \quad (m \neq n) ,$$

které nejsou v souhlasu s gramatikou angličtiny. V článku [19] se poznamenává, že toto tvrzení by někteří mohli považovat do určité míry za libovolné, a navrhuje se jiné gramatické pravidlo angličtiny, jehož pomocí by se přesvědčivěji ukázala neshoda mezi gramatikami s konečným počtem stavů a gramatikou angličtiny. Uvažují se totiž věty tvaru

$$\underbrace{\text{anti anti} \ldots \text{anti}}_{k \text{ krát}} \ \underbrace{\text{missile missile} \ldots \text{missile}}_{m \text{ krát}}$$

a připouští se, že taková věta je anglická právě tehdy, když $m \geqq 1$, $k \geqq 0$ a $m = k + 1$. V tomto případě lze dokázat, že jazyk s konečným počtem stavů, který obsahuje všechny věty tohoto druhu, obsahuje i věty, které nejsou anglické.

Y. Bar-Hillel a E. Shamir poznamenávají v článku [19], že mnozí lingvisté a mnozí angličtí mluvčí by mohli na rozdíl od většiny logiků prohlásit, že hořejší úvahy jsou v rozporu se skutečností. Mezi lingvisty a anglickými mluvčími by se opravdu našlo málo těch, kteří by souhlasili s tvrzením, že posloupnost

If it rains then it pours then if it rains then it pours

je správná anglická věta. Logik naproti tomu snáze připustí, že tato posloupnost je správná, protože pravidlo R_2 mu připomíná některá pravidla, jichž se užívá při konstrukci určitých formálních systémů. Lingvisté by pravděpodobně místo pravidla R_2 spíše přijali pravidlo

R_{2a} — Jsou-li x a y anglické věty a nezačíná-li věta x slovem if, pak věta if x then y je anglická.

Budeme-li však v teorému 2 pracovat s pravidlem R_{2a} místo pravidla R_2, nebude již podaný důkaz platit.

5. Jiné aspekty nesouhlasu mezi gramatikami s konečným počtem stavů a přirozenými jazyky

Díváme-li se na věc z praktického hlediska, ukáže se nám nesouhlas mezi gramatikami s konečným počtem stavů a gramatikami přirozených jazyků také v tom, že za předpokladu, že přirozený jazyk je jazyk s konečným počtem stavů, by počet těchto stavů byl tak veliký, že příslušná gramatika by byla nezajímavá a prakticky nepoužitelná. V přirozeném jazyce je totiž počet distribučních (to jest ϱ_L-kongruenčních) tříd velmi značný a tedy index relace ϱ_L (viz teorém 10 v oddílu VI) je velmi vysoké číslo; z toho vyplývá i velmi značný počet stavů gramatiky.

Neadekvátnost gramatik s konečným počtem stavů vzhledem k přirozeným jazykům by bylo možno dokázat také takto: Mějme slovník vytvořený z $2k$ slov: $a_1, a'_1, a_2, a'_2, \ldots, a_k, a'_k$. Nechť x znamená posloupnost vytvořenou ze slov a_i (bez čárky) a x' odpovídající posloupnost ze slov a'_i. Nechť L znamená jazyk vytvořený z vět tvaru xx'. Na základě teorému 10 v oddílu VI lze snadno dokázat

Teorém 3. *L není jazyk s konečným počtem stavů.*

Důkaz. Jazyk L je vytvořen právě z vět tvaru

$$a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}a'_{i_1}a'_{i_2}\ldots a'_{i_n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Kdyby jazyk L byl jazyk s konečným počtem stavů, měla by relace kongruence ϱ_L na základě teorému 10 v oddílu VI konečný index a tedy by existovala dvě přirozená čísla p a q taková, že by platilo $p \neq q$ a věty

$$a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_p} \quad \text{a} \quad a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_q}$$

by byly ϱ_L-kongruentní. Z toho by vyplývalo, že věta

$$a_{i_1}a_{i_2}a_{i_p}a'_{i_1}a'_{i_2}\ldots a'_{i_q}$$

by patřila do jazyka L, což však je v rozporu s tím, že platí $p \neq q$, a se způsobem, jímž jsme definovali jazyk L.

Poznámka. V článku [19] je teorém 3 interpretován takto: Mějme anglické věty tvaru

John, Mary, David, ..., are a widower, a widow, a widower, ..., respectively.

Taková věta bude v angličtině správná právě tehdy, když první skupinu tří bodů nahradíme posloupností vlastních jmen, kterou označíme τ a v níž dvě po sobě jdoucí vlastní jména budou od sebe oddělena čárkou, a druhou skupinu tří bodů nahradíme posloupností τ' vytvořenou z výrazů tvaru a widower nebo a widow, přičemž posloupnosti τ a τ' budou mít tutéž délku a n-tý výraz posloupnosti τ' bude a widower nebo a widow podle toho, zdali n-té slovo posloupnosti τ bude substantivum rodu mužského nebo ženského.

Jazyk L obsažený v teorému 3 je modelem souboru vět uvažovaného tvaru. Našli jsme tedy soubor anglických vět majících tu vlastnost, že libovolný jazyk s konečným počtem stavů, který obsahuje tento soubor, obsahuje i věty, které nejsou správné, i když jsou vytvořeny ze slov anglického slovníku. Jde o věty zmíněného typu, v nichž se však délka posloupnosti τ' nerovná délce posloupnosti τ. Speciálně z toho, že angličtina zahrnuje jazyk L, kterým je výše uvedený soubor vět, vyplývá, že angličtina není jazyk s konečným počtem stavů.

Mohlo by se namítnout, že žádný anglický mluvčí nikdy neužil a pravděpodobně ani neužije věty uvedeného typu, v níž by byla délka posloupnosti τ a τ' větší než 20, protože by pak již nebyl schopen si zapamatovat, jak se střídala jména jednoho pohlaví s jmény pohlaví druhého a tedy by již nebyl zaručen správný sled výrazů a widower a a widow. Takové věty jsou opravdu jen potenciální a v praxi se nevyskytují.

6. Některým dvojznačnostem je možno se vyhnout za cenu překročení gramatik s konečným počtem stavů

Ukážeme nyní na jiný aspekt vztahů mezi gramatikami s konečným počtem stavů a přirozenými jazyky. Výrokový kalkul obsahuje logické spojky jako jsou & a $\vee$, jejichž přibližná interpretace je „a“ a „nebo“. Anglická věta

On parents' day, Mary will play the piano and John will recite or Paul will sing

je zřejmě dvojznačná právě tak jako výraz

Five minus three plus one .

Ve výrokovém kalkulu však je pamatováno na to, aby k takovým dvojznačnostem nedocházelo.[12] Zavádějí se pravidla tohoto typu: jsou-li p a q výroky, pak $(p \,\&\, q)$ a $(p \vee q)$ jsou rovněž výroky; jsou-li a a b čísla, pak $(a + b)$ a $(a - b)$ jsou rovněž čísla. Tím se každé z obou shora uvedených anglických vět přiřazují dva matematické výrazy; první větě se přiřazují výrazy $((p \,\&\, q) \vee r)$ a $(p \,\&\, (q \vee r))$, druhé větě se přiřazují výrazy $((5 - 3) + 1)$ a $(5 - (3 + 1))$. Všechny tyto čtyři matematické výrazy jsou jednoznačné.

Předpokládejme na okamžik, že rumunština je jazyk s konečným počtem stavů. Pak můžeme prohlásit, že uplatníme-li současně pravidlo R_1 a pravidlo

R_3 – Jsou-li x a y rumunské věty, je x sau y („x nebo y“) rovněž rumunská věta,

[12] K diskusi o tom, jaký užitek může přinést při řešení takových dvojznačností moderní logika, viz článek W. V. Quina [281]. Jeho krátká recenze je obsažena v článku [223].

nedostáváme se do rozporu s tím, že rumunština je jazyk s konečným počtem stavů. Smysl a odůvodnění tohoto tvrzení podává

Teorém 4. *Nechť je L jazyk s konečným počtem stavů a nechť jsou α a β dvě různá slova ze slovníku jazyka L.*

Označme L''' nejmenší jazyk (jehož existenci lze snadno dokázat), který vyhovuje těmto vlastnostem: 1. $L \subseteq L'''$; 2. platí-li $x \in L'''$ a $y \in L'''$, pak platí $x\alpha y \in L'''$ a $x\beta y \in L'''$. Za těchto podmínek je L''' jazykem s konečným počtem stavů.

Důkaz. Budeme postupovat stejně jako při důkazu teorému 1. Budeme užívat zápisu $L_\alpha = L\{\alpha\}$ a $L_\beta = L\{\beta\}$ a budeme klást

$$L' = L_\alpha * L\,, \quad L'''_1 = L'_\beta * L'\,,$$
$$L'' = L_\beta * L\,, \quad L'''_2 = L''_\alpha * L''\,.$$

Jelikož L je jazyk s konečným počtem stavů, vyplývá z toho na základě teorému 17 v oddílu VI, že L_α a L_β jsou rovněž jazyky s konečným počtem stavů; z toho vyplývá na základě teorému 33 v oddílu VI, že i jazyky L' a L'' jsou jazyky s konečným počtem stavů. Podrobíme-li jazyky L' a L'' téže úvaze, jaké jsme shora podrobili jazyk L, dojdeme k závěru, že i jazyky L'''_1 a L'''_2 jsou jazyky s konečným počtem stavů. Všimněme si nyní, že $L''' = L'''_1 \cup L'''_2$. Na základě teorému 3 v oddílu VI z toho vyplývá, že L''' je jazyk s konečným počtem stavů a tím je teorém 4 dokázán. (Je zřejmé, že věta jazyka L''' má tvar $x_1\alpha_1x_2\alpha_2 \ldots x_{n-1}\alpha_{n-1}x_n$, kde $x_i \in L$ pro $1 \leqq i \leqq n$ a z prvků α_i $(1 \leqq i \leqq n - 1)$ se některé rovnají α, jiné β.)

Poznámka. Teorém 4 připouští mimo jiné tuto interpretaci: To, že přirozený jazyk je uzavřený vzhledem k operacím konjunkce a disjunkce vět, není v rozporu s předpokladem, že jde o jazyk s konečným počtem stavů. Je však třeba si všimnout toho, že aplikace operací konjunkce a disjunkce dvou vět způsobem uvedeným v teorému 4 vede k zmíněným dvojznačnostem. Těmto dvojznačnostem se můžeme vyhnout, jestliže za předpokladu, že uvažovaný jazyk je jazyk psaný, zavedeme místo operací $p \,\&\, q$ a $p \vee q$ operace $(p \,\&\, q)$ a $(p \vee q)$. Logické spojky & a $\vee$ je samozřejmě nutno nahradit odpovídajícími výrazy v příslušném jazyce: v rumunštině și a sau, v angličtině and a or, v ruštině и a или, v němčině und a oder, ve francouzštině et a ou atd. Za těchto podmínek odpovídají dvojznačnému výrazu $p \,\&\, q \vee r$ dva nedvojznačné výrazy $(p \,\&\, q) \vee r$ a $p \,\&\, (q \vee r)$. Této dvojznačnosti se však vyhneme za cenu toho, že již nejde o jazyk s konečným počtem stavů. Smysl a odůvodnění tohoto tvrzení podává

Teorém 5. *Nechť je L jazyk s konečným počtem stavů a nechť jsou α, β, γ a δ čtyři slova, vždy po dvou navzájem odlišná, ze slovníku jazyka L. Označme L^{IV} nejmenší jazyk (jehož existenci lze snadno dokázat), který vyhovuje těmto dvěma vlastnostem: 1. $L \subseteq L^{IV}$; 2. jestliže platí $x \in L^{IV}$ a $y \in L^{IV}$, pak platí $\gamma x\alpha y\delta \in L^{IV}$ a $\gamma x\beta y\delta \in L^{IV}$. Za těchto podmínek L^{IV} není jazyk s konečným počtem stavů.*

Důkaz. Je zřejmé, že jazyk L^{IV} obsahuje jakoukoli větu tvaru

$$\underbrace{\gamma\gamma \ldots \gamma}_{n\ \text{krát}} \times \underbrace{\alpha x\delta\alpha x\delta \ldots \alpha x\delta}_{\alpha x\delta\ n\ \text{krát}} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,,$$

kde $x \in L$. Na druhé straně pro $n \neq m$ věta

$$\underbrace{\gamma\gamma \ldots \gamma}_{n\ \text{krát}} \times \underbrace{\alpha x\delta\alpha x\delta\alpha x\delta \ldots \alpha x\delta}_{\alpha x\delta\ m\ \text{krát}}$$

nepatří do jazyka L^{IV}. Ukážeme, že tyto skutečnosti jsou v rozporu s předpokladem, že L^{IV} je jazyk s konečným počtem stavů: Nechť je L^{IV} jazyk s konečným počtem stavů. Na základě teorému 10 v oddílu VI má relace kongruence $\varrho_{L^{IV}}$ indukovaná jazykem L^{IV} v množině T konečný index. Mezi posloupnostmi z množiny T tvaru

$$\underbrace{\gamma\gamma \ldots \gamma}_{n\ \text{krát}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

tedy existují dvě posloupnosti, které patří do téže $\varrho_{L^{IV}}$-kongruenční třídy. Nechť jsou p a q dvě hodnoty čísla n $(p \neq q)$, pro které jsou příslušné věty kongruentní. Z toho, že posloupnost

$$\underbrace{\gamma\gamma \ldots \gamma}_{p\ \text{krát}} \times \underbrace{\alpha x\delta\alpha x\delta \ldots \alpha x\delta}_{\alpha x\delta\ p\ \text{krát}}$$

je větou jazyka L^{IV}, vyplývá, že i věta

$$\underbrace{\gamma\gamma \ldots \gamma}_{q\ \text{krát}} \times \underbrace{\alpha x\delta\alpha x\delta \ldots \alpha x\delta}_{\alpha x\delta\ p\ \text{krát}}$$

patří do jazyka L^{IV}, což však není pravda.

Předpoklad, že L^{IV} je jazyk s konečným počtem stavů, je tedy nesprávný. Tím je teorém 5 dokázán.

Poznámka. Interpretujeme-li jazyk L jako přirozený psaný jazyk, α jako slovo, které v jazyce L má význam „a", β jako slovo, které v jazyce L má význam „nebo", γ jako levou závorku (( ), δ jako pravou závorku ( )), má teorém 5 právě uvedený význam; přechodem od operací $p \,\&\, q$ a $p \vee q$ k operacím $(p \,\&\, q)$ a $(p \vee q)$ jsou odstraněny dvojznačnosti, ale zároveň jsou překročeny možnosti gramatiky s konečným počtem stavů.

Teorémy 4 a 5 vystihují zajímavý rozdíl mezi jazykem mluveným a jazykem psaným. Z důkazu teorému 5 vyplývá také

Teorém 5'. *Nechť je L jazyk s konečným počtem stavů a nechť jsou α, γ a δ tři slova, vždy po dvou navzájem odlišná, ze slovníku jazyka L. Označme L^{V} nejmenší jazyk, který vyhovuje těmto dvěma podmínkám: 1. $L \subseteq L^{V}$; 2. jestliže platí $x \in L^{V}$, pak platí $\gamma x\alpha x\delta \in L^{V}$. Označme L^{VI} nejmenší jazyk, který vyhovuje těmto podmínkám: 1. $L \subseteq L^{VI}$; 2. jestliže platí $x \in L^{VI}$ a $y \in L^{VI}$, pak platí $\gamma x\alpha y\delta \in L^{VI}$. Za těchto podmínek jazyky L^{V} a L^{VI} nejsou jazyky s konečným počtem stavů.*

7. Nekonečné úseky přirozených jazyků, které mohou být generovány gramatikami s konečným počtem stavů

Teorém 4 má některé aspekty, které zasluhují bližšího povšimnutí. Jak jsme viděli, nesouhlas mezi přirozenými jazyky a gramatikami s konečným počtem stavů se projevuje nejrůznějším způsobem. Jinými slovy v přirozených jazycích existují četné gramatické postupy, které překračují možnosti a rámec gramatik s konečným počtem stavů. Na druhé straně takové závěry, jako jsou teorémy 1 a 4, a úvaha o možnostech dvojznačných gramatik s konečným počtem stavů a konečných indeterministických automatů řešit některé problémy konstrukční homonymie vedou k nutnosti zjišťovat netriviální – tedy nekonečné – úseky přirozených jazyků, které mohou být generovány gramatikou s konečným počtem stavů. Zároveň bude nutné podrobněji zkoumat explikativní sílu těchto gramatik; takové zkoumání bude muset přihlížet ke všem aspektům: ke konečným automatům – se všemi jejich variantami – k pravidelným událostem ve smyslu Kleeneho, ke konečným, orientovaným a ohodnoceným grafům atd.

Pokud jde o jednoduchost, jsou gramatiky s konečným počtem stavů zřejmě nejjednodušší a nejpohodlnější. Turingův stroj je příliš obecný. Bližší je konečný automat, který je lepší aproximací fyzikálního stroje a číslicového počítače. Je pravda, že generativní schopnost konečného automatu je menší než u Turingova stroje, avšak obecnost Turingova stroje je ve skutečnosti značně neoperativní. Jak se poznamenává ve studii [283], Turingův stroj může vypočítat jakoukoli obecně rekurzívní funkci, ale jen malá část těchto funkcí přichází v úvahu při použití v praxi.

Vraťme se k teorémům 1 a 4. Uvažujme konečnou část určitého přirozeného jazyka, tedy konečnou množinu jeho vět, kterou označíme L. Na základě teorému 7 v oddílu VI je L jazykem s konečným počtem stavů a tedy může plnit úlohu toho jazyka L, o němž se mluví v teorému 1; abychom mluvili přesněji, předpokládejme, že L představuje část rumunského jazyka. Nahraďme α slovem și („a“). V tomto případě představuje jazyk L', který se vyskytuje ve výroku teorému 1, množinu všech vět, které lze obdržet z vět jazyka L kopulativními konstrukcemi. Je zřejmé, že jazyk L' je nekonečný. Na druhé straně z teorému 1 vyplývá, že L' je jazyk s konečným počtem stavů. Tak jsme obdrželi nekonečný úsek rumunštiny, který může být generován gramatikou s konečným počtem stavů. To odporuje tvrzení v článku [50], § 2.4, podle kterého gramatika s konečným počtem stavů nemůže generovat nekonečný úsek přirozeného jazyka.

Kdybychom interpretovali α nikoli jako și (a), nýbrž jako sau (nebo) nebo dar (ale) nebo deci (tedy), pak by množina L' představovala úhrn vět, které lze obdržet z vět jazyka L disjunktivními, resp. adversativními nebo konkluzívními konstrukcemi. Ve všech těchto případech je L' jazyk s konečným počtem stavů. Obecněji můžeme říci, že α vyjadřuje operaci koordinace. Z toho lze vyvodit, že operace koordinace typu $x\alpha y$ nepřekračuje možnosti gramatik s konečným počtem stavů.

Teorém 4 lze snadno zobecnit úplnou indukcí, když místo dvou slov α a β uvažujeme libovolný konečný počet takových slov. Tím dostaneme

Teorém 4'. *Nechť je L jazyk s konečným počtem stavů. Nechť jsou $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$ slova, vždy po dvou navzájem odlišná, ze slovníku jazyka L. Označme L''' nejmenší jazyk, který vyhovuje těmto podmínkám:* 1. $L \subseteq L'''$; 2. *jestliže platí $x \in L'''$ a $y \in L'''$, pak platí $x\alpha_1 y \in L'''$, $x\alpha_2 y \in L'''$, $\ldots$, $x\alpha_n y \in L'''$. („Nejmenší jazyk“ obdržíme jako průnik jazyků s vlastnostmi* 1 *a* 2.) *Za těchto podmínek je L''' jazyk s konečným počtem stavů.*

Teorém 4′ má tento význam: současné použití několika operací koordinace (jejichž počet je konečný) nepřekračuje rámec gramatik s konečným počtem stavů. Mohli bychom říci, že gramatika některých typů koordinačních vztahů je v mezích gramatik s konečným počtem stavů.

Úseky přirozených jazyků, které mohou být generovány gramatikami s konečným počtem stavů, lze ještě rozšířit, především použitím booleovských operací. Z teorémů 5 a 14 v oddílu VI vyplývá, že sjednocení a průnik dvou jazyků s konečným počtem stavů jsou rovněž jazyky s konečným počtem stavů a také doplněk jazyka s konečným počtem stavů je jazyk s konečným počtem stavů. Za druhé lze použít operace komplexního součinu a operace uzávěru; z teorému 17 v oddílu VI vyplývá, že ani tyto operace nepřesahují rámec jazyků s konečným počtem stavů. Vezmeme-li v úvahu ekvivalentnost pravidelných událostí v pojetí Kleeneho a jazyků s konečným počtem stavů, můžeme použít i operace iterace $E * F$ (viz oddíl VI).

8. Aproximace přirozeného jazyka pomocí jazyků s konečným počtem stavů

N. Chomsky se ve studii [50], § 2 zabýval způsobem popisu přirozeného jazyka nekonečnou posloupností gramatik s konečným počtem stavů. Ve skutečnosti zde nejde o gramatiky s konečným počtem stavů, ale o markovovské procesy s konečným počtem stavů. Pro jakékoli přirozené číslo n se uvažuje markovovský proces s konečným počtem stavů definovaný takto: Každý stav představuje určitou frázi uvažovaného přirozeného jazyka, která má délku n; uvažovaný jazyk můžeme označit L (počet stavů se tedy bude rovnat počtu frází o délce n, které lze vytvořit na základě slovníku jazyka L). Pravděpodobnost, že opuštění stavu S – přiřazeného frázi $a_1 a_2 \ldots$ $\ldots a_n$ – se děje vytvořením slova X, se rovná podmíněné pravděpodobnosti toho, že se slovo X vyskytne v jazyce L po posloupnosti $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Shora definovaný markovovský proces je $(n + 1)$-ou aproximací jazyka L.

Jak však poznamenává Chomsky, taková reprezentace gramatiky přirozeného jazyka není právě šťastná. Frekvence výskytu určité fráze má ve skutečnosti dosti málo společného s její gramatičností. Chomsky uvádí jako příklad anglickou frázi colorless green ideas sleep furiously (bezbarvé zelené myšlenky zuřivě spí), která je sice gramaticky správná, ale pravděpodobně se nikdy v žádném anglickém textu nevyskytla a její frekvenci lze považovat za nulovou; naproti tomu je mnoho gramaticky nesprávných frází, které se objevují v četných psaných textech i v mluveném jazyce!

Aproximace popsaná Chomským je dosti neurčitá, avšak přesto se v ní jasně zračí snaha definovat $(n + 1)$-ou aproximaci přirozeného jazyka L jako konečný markovovský proces, který generuje právě ty fráze jazyka L, jejichž délka se rovná $n + 1$; každá fráze je přitom generována s takovou pravděpodobností, s jakou se v jazyce vyskytuje.

G. S. Cejtin [345] navrhl definici konvergence posloupnosti modelů k modelovanému předmětu. Jeho definice má na zřeteli právě generativní (syntaktické) matematické modely jazyka a pro případ, který nás zajímá, může být formulována takto:

Nechť je Σ konečný slovník, L jazyk se slovníkem Σ a $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ posloupnost jazyků nad tímto slovníkem. Říkáme, že posloupnost $\{L_n\}$ konverguje k L, jsou-li splněny tyto dvě podmínky:

1. $$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n ;$$

2. pro každou frázi $x \in L$ existuje přirozené číslo n_x takové, že platí-li $n > n_x$, platí $x \in L_n$. V tomto případě říkáme, že jazyk L_n je n-tou aproximací jazyka L. Lze velmi snadno dokázat

Teorém 6. *Je-li dán jazyk L nad konečným slovníkem Σ, existuje posloupnost jazyků s konečným počtem stavů – označíme ji $\{L_n\}$ – která konverguje k jazyku L.*

Důkaz. Jazyk L_n budeme definovat jako množinu těch frází jazyka L, jejichž délka není větší než n. Protože slovník Σ je konečný, je jazyk L_n rovněž konečný a tedy na základě teorémů 7 a 14 v oddílu VI. je L_n jazyk s konečným počtem stavů. Podmínka 1 z definice konvergence je zřejmě splněna. Pokud jde o podmínku 2, platí $x \in L_n$ pro jakékoli $n > \lambda - 1$, má-li fráze x délku λ.

Poznámka. O gramatice G_n s konečným počtem stavů, která generuje jazyk L_n, můžeme říci, že je n-tou aproximací gramatiky jazyka L; protože však L je jazyk nespecifikované povahy – popř. je to jazyk přirozený – je i gramatika jazyka L nespecifikované povahy. Má-li být aproximace, o níž se mluví v teorému 6, zajímavá a má-li mít praktický význam, je nutné, aby posloupnost gramatiky G_n mohla být zvolena tak, aby počet stavů gramatiky G_n nerostl současně s n a aby pro $n \to \infty$ nekonvergoval rovněž k nekonečnu. Existují jazyky L, které nejsou jazyky s konečným počtem stavů a u kterých lze zachovat tuto podmínku? Čím jsou takové jazyky charakterizovány? To jsou problémy, které si zaslouží dalšího zkoumání.

9. Konfigurace, bezprostřední složky a jazyky s konečným počtem stavů

Pokusíme se o charakterizaci jazyků s konečným počtem stavů z hlediska pojmu složka – který je základním pojmem ve strukturální syntaxi amerických deskriptivistů (viz [276], [354], [49] a [140]) – a pojmu konfigurace, který byl zaveden a studován při modelování gramatiky pomocí teorie množin ([184], [287]).

Vysvětlíme zde tyto pojmy na základě prací I. I. Revzina ([287], [288] a [290]), v jehož výkladech provedeme pouze několik málo změn.

Nechť je L jazyk nad konečným slovníkem Σ. Prvky slovníku Σ nazveme slova. Nechť je $x = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ fráze nad slovníkem Σ. Nejprve budeme definovat rekurzívně pojem složky fráze x takto:

1. každé slovo fráze x je složkou této fráze;

2. každá fráze y, která patří do téže distribuční třídy jako některá ze složek fráze x, je rovněž složkou fráze x. (Dvě fráze s_1 a s_2 patří do téže distribuční třídy, jestliže pro libovolnou dvojici frází s_3 a s_4 patří fráze $s_3s_1s_4$ a $s_3s_2s_4$ buď obě do L nebo obě do $T - L$, kde T znamená volnou pologrupu generovanou slovníkem Σ).

Z podané definice vyplývá, že složka fráze x není nutně její částí. Na druhé straně se pojem složka definuje nejen pro $x \in L$, ale pro jakékoli $x \in T$. Tento pojem osvětlíme dvěma příklady, jedním z rumunštiny a jedním, který převezmeme z I. I. Revzina, z ruštiny.

Mějme rumunskou frázi Elevul silitor învață foarte bine (Pilný žák se učí velmi dobře). Na základě bodu 1 shora uvedené definice tvoří každé ze slov elevul, silitor, învață, foarte a bine složku fráze. Bod 2 zavádí prakticky nekonečný počet složek. Především je složkou fráze jakékoli substantivum mužského nebo středního rodu v nominativu singuláru s určitým členem, neboť patří do téže distribuční třídy jako slovo elevul; obdobně lze zavést další složky na základě distribuční třídy každého z dalších slov. Tyto třídy však neobsahují jen slova, ale i některé fráze o délce větší než 1. Tak fráze foarte bine patří do téže distribuční třídy jako slovo bine (dobře), tedy je složkou uvažované fráze; fráze învață foarte bine patří do téže distribuční třídy jako slovo învață (učí se) a fráze elevul silitor patří do téže distribuční třídy jako slovo elevul (žák); také tyto fráze jsou tedy složkami uvažované fráze.[13]

Mějme nyní ruskou frázi

Большая	ворона	взлетела	на	высокий	куст .
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Použitím pravidla 1 obdržíme šest složek této fráze: (1), (2), (3), (4), (5), (6). Použitím pravidla 2 obdržíme velký počet složek, například frázi (1) (2), která je v téže distribuční třídě jako slovo (2), frázi (5) (6), která je v téže distribuční třídě jako slovo (6), frázi (3) (4) (5) (6), která je v téže distribuční třídě jako slovo (3).

Lze pozorovat, že existují dva druhy složek fráze x; některé jsou ve frázi x přímo obsaženy – nazveme je zahrnuté složky – jiné ve frázi x obsaženy nejsou – nazveme je nezahrnuté složky Tak například vzhledem k hořejší rumunské větě je složka foarte bine zahrnutá, složka prea bine (příliš dobře) nezahrnutá. Zatímco pravidlo 1 zavádí pouze zahrnuté složky, pravidlo 2 zavádí složky zahrnuté i nezahrnuté.

[13] Pro poslední tři fráze má naše tvrzení jen statistickou platnost; například nahradíme-li ve větě *elevul acesta învață* (tento žák se učí) slovo elevul frází elevul silitor, dostaneme větu, o jejíž správnosti lze pochybovat. Takovým neshodám není možno se vyhnout, dokud konfrontujeme přirozený jazyk s matematickým modelem.

Zavedeme nyní pojem bezprostřední složky fráze x jako takovou zahrnutou složku fráze x, která není obsažena v jiné zahrnuté složce této fráze. Jinými slovy bezprostřední složka je složka maximálně nasycená. Hořejší rumunská věta obsahuje dvě bezprostřední složky: elevul silitor a învaţă forte bine. Složka elevul silitor se rozkládá na elevul a silitor, složka învaţă foarte bine se rozkládá na învaţă a foarte bine a složka foarte bine na foarte a bine. Uvedená ruská věta obsahuje rovněž dvě bezprostřední složky: Большая ворона a взлетела на высокий куст; fráze (1) (2) se rozkládá na bezprostřední složky (1) a (2), fráze (3) (4) (5) (6) se rozkládá na bezprostřední složky (3) a (4) (5) (6), z nichž složka (4) (5) (6) se dále rozkládá na (4) a (5) (6), složka (5) (6) pak dále na (5) a (6).

Zavedeme pojem generalizované složky fráze x definovaný takto:

1. jakákoli část fráze x je generalizovanou složkou této fráze;

2. jakákoli fráze, která patří do téže distribuční třídy jako generalizovaná složka fráze x, je generalizovanou složkou této fráze.

Obdobně jako u pojmu složka se zavádějí i zde pojem zahrnuté (resp. nezahrnuté) generalizované složky a pojem bezprostřední generalizované složky. Je zřejmé, že jakákoli složka je generalizovaná, ale ne naopak. Fráze, která patří do téže distribuční třídy jako x, se nazývá nevlastní složka fráze x.

Teorém 7. *Aby byl jazyk L jazykem s konečným počtem stavů, je nutná a postačující tato podmínka:*

α) *Existuje konečný počet frází $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s touto vlastností: každé frázi x z množiny T odpovídá jedno a jen jedno přirozené číslo i $(1 \leqq i \leqq n)$ takové, že x_i je nevlastní složka fráze x.*

Důkaz. Podmínka α je nutná. Nechť je L jazyk s konečným počtem stavů. Na základě teorému 10 v oddílu VI má relace kongruence ϱ_L indukovaná v množině T jazykem L konečný index. Avšak ϱ_L-kongruenční třídy jsou právě distribuční třídy indukované jazykem L v množině T, tedy jejich počet je konečný; označme jej n. Vyberme z každé z n distribučních tříd po jedné frázi: dostaneme n frází $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Protože každá fráze $x \in T$ se vyskytuje v jedné a jen jedné z n distribučních tříd, existuje jednoznačně určené i $(1 \leqq i \leqq n)$ takové, že platí $x \varrho_L x_i$; x_i je tedy nevlastní složkou x a podmínce α je vyhověno.

Podmínka α je postačující. Nechť je L jazyk, pro který je splněna podmínka α. Z toho vyplývá, že jakákoli fráze x je ϱ_L-ekvivalentní s určitou frází x_i $(1 \leqq i \leqq n$, i závisí na $x)$; protože frází x_i je konečný počet, lze z toho vyvodit, že relace kongruence ϱ_L má konečný index. Z teorému 10 (z dostatečnosti podmínky e) v oddílu VI vyplývá, že L je jazyk s konečným počtem stavů.

Poznámka. Protože ϱ_L-kongruenčních tříd vymezených v množině T jazykem L s konečným počtem stavů je konečný počet, existuje v množině T alespoň jedna distribuční třída, která obsahuje libovolně dlouhé fráze; to znamená, že existuje alespoň jedna fráze, která připouští libovolně dlouhé generalizované složky. Na druhé straně existuje alespoň jedna ϱ_L-kongruenční třída, která obsahuje alespoň jedno slovo

ze slovníku Σ. Všechny fráze, které patří do takové třídy, budou složkami libovolné fráze, jež obsahuje slova z příslušné třídy.

Dvě složky určité fráze se nazývají ekvivalentní, patří-li do téže ϱ_L-kongruenční třídy. Z dosavadních úvah snadno vyplývá

Teorém 8. *Je-li L jazyk s konečným počtem stavů, pak existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ s těmito vlastnostmi:*

1. *libovolná fráze z množiny T, jejíž délka je větší než n_k, připouští k generalizovaných složek, které jsou vzájemně ekvivalentní $(k = 1, 2, \ldots)$;*

2. *existuje fráze z množiny T o délce n_k, která nepřipouští k vzájemně ekvivalentních generalizovaných složek.*

Rychlost, kterou posloupnost $\{n_k\}$ $(1 \leqq k < \infty)$ směřuje k nekonečnu, je mírou stupně periodičnosti frází z množiny T vzhledem k jazyku L. Máme zde další kritérium pro srovnávání jazyků s konečným počtem stavů.

Pojem složky určité fráze vzhledem k jazyku L je velmi blízký pojmu konfigurace prvního řádu, který byl zaveden a studován v pracích [184], [287], [288] a [290]. Pojem konfigurace vyššího řádu se definuje rekurzívně zároveň s pojmem fráze vyššího řádu takto:

1. Platí-li $x \in T$, je-li délka x větší než 1 a existuje-li $\sigma \in \Sigma$ takové, že $x \varrho_L \sigma$, je x konfigurací prvního řádu;

2. fráze, která neobsahuje žádnou konfiguraci prvního řádu, je frází prvního řádu;

3. fráze $x \in T$ o délce větší než 1 je konfigurací n-tého řádu, jestliže existuje $\sigma \in \Sigma$ takové, že pro jakékoli $y \in T$ a $z \in T$, pro které platí $u = yxz$ a $v = y\sigma z$, patří fráze $n+1$-ého řádu u a v buď obě do L nebo obě do $T - L$.

4. fráze, která neobsahuje žádnou konfiguraci n-tého řádu, je frází n-tého řádu. Slovo σ se nazývá výslednice konfigurace n-tého řádu.

Je-li určitá konfigurace konfigurací n-tého řádu, je i konfigurací jakéhokoli řádu vyššího než n-tého. Minimální řád určité konfigurace se nazývá stupeň konfigurace.

Je zřejmé, že konfigurace prvního řádu, jejíž výslednicí je slovo σ, tvoří složku o délce rovné alespoň dvěma a příslušící jakékoli frázi, která obsahuje slovo σ. Provedeme nyní relativizaci pojmu složky takto: Nechť je $u = yxz$ fráze jazyka L. Říkáme, že x je relativní složka fráze u, jestliže existuje slovo σ, pro které fráze $v = y\sigma z$ patří do jazyka L; o slově σ říkáme, že je jádrem relativní složky x fráze u.

Je zřejmé, že je-li určitá fráze x o délce $\geqq 2$ konfigurací n-tého řádu s výslednicí σ, je x relativní složkou s jádrem σ jakékoli fráze $n-1$-ého řádu z jazyka L.

Zavedeme pojem indexu množiny konfigurací takto: Označíme symbolem $\mathscr{C}_1$ množinu frází majících tu vlastnost, že existuje konečný počet slov $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ takový, že jakákoli fráze z množiny $\mathscr{C}_1$ je ϱ_L-kongruentní s některým ze slov σ_i $(1 \leqq i \leqq n)$. Říkáme, že množina $\mathscr{C}_1$ má index 1 a fráze této množiny o délce $\geqq 2$ tvoří množinu konfigurací s indexem 1. Označíme symbolem $\mathscr{C}_n$ množinu frází majících tu vlastnost, že existuje konečný soubor frází o délce $\leqq n$ takových, že jakákoli fráze z $\mathscr{C}_n$ je ϱ_L-kongruentní s některou frází z uvedeného souboru. Říkáme, že množina $\mathscr{C}_n$ má index n a fráze této množiny o délce $\geqq 2$ tvoří množinu konfigurací s indexem n.

S použitím teorému 10 (bod e) v VI. oddílu lze snadno vyslovit

Teorém 9. *Jazyk L je jazykem s konečným počtem stavů právě tehdy, když existuje přirozené číslo n takové, že $L = \mathscr{C}_n$.*

Je zřejmé, že můžeme-li v teorému 9 klást $n = p$, můžeme klást také $n > p$. Nejmenší přirozené číslo n, pro které platí $L = \mathscr{C}_n$, se nazývá index jazyka L. Čím je tento index menší, tím vykazuje jazyk L větší periodičnost v tom smyslu, že fráze jazyka L obsahují několik podfrází z téže ϱ_L-kongruenční třídy. Jestliže se index rovná 1, je jazyk L vytvořen pouze ze slov a konfigurací prvního řádu, a naopak.

Bylo by zajímavé studovat v rámci jazyka s konečným počtem stavů specifické rysy konfigurací a frází vyššího řádu i specifické rysy bezprostředních složek.

10. Jazyky Chomského L_1, L_2 a L_3

Teorému 10 z oddílu VI, kterého jsme v tomto oddílu již použili mnohokrát, užijeme nyní k důkazu, že jazyky Chomského L_1, L_2 a L_3 ([50], [51]) nejsou jazyky s konečným počtem stavů. To je důležité i pro jazyky přirozené, protože jazyky L_1, L_2 a L_3, jak se ukazuje v knize [51], modelují určité konstrukční typy v angličtině.

Teorém 10. *Mějme tyto tři jazyky nad slovníkem $\Sigma = \{a, b\}$: jazyk L_1 vytvořený výlučně z frází ab, $aabb$, $aaabbb$, ...; jazyk L_2 vytořený výlučně z frází tvaru xx^*, kde x je libovolná fráze nad slovníkem Σ a x^* je obrácená fráze k x (je-li $x = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n$, pak $x^* = \sigma_n\sigma_{n-1} \dots \sigma_1$); jazyk L_3 vytvořený výlučně z frází tvaru xx, kde x je libovolná fráze nad slovníkem Σ. Jazyky L_1, L_2 a L_3 nejsou jazyky s konečným počtem stavů.*

Důkaz. Použijeme teorému 10 (zejména bodu e) z oddílu VI a ukážeme, že jestliže jazyk L s konečným počtem stavů obsahuje jazyk L_i ($1 \leqq i \leqq 3$), pak rozdíl $L - L_i$ není prázdný. Z toho zřejmě vyplývá, že L_i není jazyk s konečným počtem stavů. Mějme nejprve $i = 1$. Protože relace ϱ_L má konečný index, existují dvě přirozená čísla n a m, $n \neq m$ taková, že platí $a^n\varrho_L a^m$ (položili jsme $a^p = aa \dots a$, kde se a opakuje p-krát). Z toho a z relace $a^nb^n \in L$ vyplývá, že $a^mb^n \in L$; platí však $a^mb^n \in L - L_1$ a tedy $L - L_1 \neq 0$. Z toho vyplývá, že L_1 není jazyk s konečným počtem stavů.

Mějme nyní $i = 2$. Platí $x^n(x^n)^* \in L$ pro $n = 1, 2, \dots$ Protože relace ϱ_L má konečný index, existují dvě přirozená čísla $n \neq m$, pro která platí $x^n\varrho_L x^m$, tedy $x^m(x^n)^* \in L$. Platí však $x^m(x^n)^* \in L - L_2$, tedy $L - L_2 \neq 0$.

Mějme $i = 3$. Platí $a^nba^nb \in L$ pro $n = 1, 2, \dots$ Jako v předcházejících případech existují čísla m a n, $m \neq n$, taková, že platí $a^n\varrho_L a^m$. Z toho vyplývá, že $a^mba^nb \in L$. Avšak platí $a^mba^nb \in L_3$ a tedy $L - L_3 \neq 0$. Tím je teorém 10 dokázán.

Vysvětlivky, další problémy a doplňky ke studiu gramatik s konečným počtem stavů

1. Gramatikami s konečným počtem stavů se zabýval již ve své knize [51] Chomsky, avšak způsobem více intuitivním než matematickým. Některá tvrzení obsažená v knize [51] Chomsky přesně formuloval a důkladně zdůvodnil již ve své dřívější práci [50]. Je třeba poznamenat, že pojem „věty generované gramatikou s konečným počtem stavů“ je v knize [51] definován poněkud šíře než v pracích [50] a [52]. (Definici obsaženou v práci [52] jsme přijali i my ve svých úvahách v oddílu VI.) V knize [51] byl vypuštěn požadavek, aby konečný stav byl totožný se stavem počátečním. (Tento požadavek byl v práci [52] i v našich úvahách v VI. oddílu označen (i)). Nazveme řetězy, které vyhovují všem podmínkám obsaženým v definici věty generované gramatikou s konečným počtem stavů — s eventuálním vynecháním podmínky (i) — quasivětami generovanými uvažovanou gramatikou, kterou označíme G. Množinu quasivět generovaných gramatikou G nazveme quasijazykem generovaným gramatikou G a označíme jej Λ_G. Soubor posloupností symbolů, který označíme L, nazveme quasijazykem s konečným počtem stavů, jestliže existuje gramatika G s konečným počtem stavů taková, že $L = \Lambda_G$. Je zřejmé, že

$$L_G \subseteq \Lambda_G\,.$$

Na základě výsledků, k nimž jsem dospěli v oddílu VI, můžeme prohlásit, že $L_G = \Lambda_G$, jinými slovy, že není nutné, aby koncový stav splýval se stavem počátečním.

Základem gramatik s konečným počtem stavů je studium konečných markovovských procesů; takovéto „stroje“ jsou hojně studovány v teorii komunikace [320]. Požadavek, aby koncový stav splýval se stavem počátečním, vznikl na základě práce B. Mandelbrota [207]. Pro problémy studované v kapitole 14 oddílu VI je důležité, že tato shoda koncového stavu s počátečním není podstatná.

Jak ukazují závěry, k nimž jsme dospěli v VI. oddílu, na třídu jazyků s konečným počtem stavů nemá vliv ani podmínka, aby počáteční stav nebyl stavem přechodovým, ani to, že existuje jeden nebo několik stavů počátečních a jeden nebo několik stavů koncových.

2. Označme F_8 množinu těch gramatik s konečným počtem stavů, v nichž symbol vyjadřující přechod od jednoho stavu k druhému je jednoznačně určen, jinými slovy v nichž z toho, že (i, j, k) a (i, h, k) jsou přípustné trojice, vyplývá, že $j = h$. Bylo by zajímavé zjistit, zdali $L(F_8)$ je vlastní podmnožinou $L(F_1)$.

3. Ve spojitosti s gramatikami s konečným počtem stavů vzniká otázka, která již byla probírána v mnoha článcích (viz např. [102], [195], [273]), pokud jde o automaty; jde o to stanovit pro určitý jazyk L s konečným počtem stavů, jaký je minimální počet stavů, jejž může mít gramatika $G \in F_1$, kterou je generován jazyk L. Obdobná otázka vzniká pro $G \in F_i$, kde $2 \leqq i \leqq 4$. Rovněž je zajímavé zkoumat, jaký je minimální počet přípustných trojic v gramatice G generující jazyk L, tedy jaký je minimální počet pravidel, jež taková gramatika obsahuje. Tento problém je třeba řešit pro každou třídu F_i, $1 \leqq i \leqq 4$ zvlášť.

4. V prvních kapitolách VI. oddílu byly uvažovány některé operace aplikované na jazyky a gramatiky s konečným počtem stavů, zvláště operace sjednocení a vytvoření doplňků. V článku [69] byly studovány některé typy ohodnocených grafů, ekvivalentních s gramatikami s konečným počtem stavů. Protože operace sjednocení a vytvoření doplňků jsou definovány i v teorii grafů (viz např. práce [26] a [264]), bylo by zajímavé zkoumat, do jaké míry existuje izomorfismus mezi operacemi prováděnými s gramatikami na jedné straně a operacemi prováděnými s ohodnocenými grafy na straně druhé.

5. Mějme dva jazyky L_1 a L_2 takové, že $L_1 \cap L_2 = 0$ a jazyk $U - (L_1 \cup L_2)$ je nekonečný. Je možné, aby jazyky L_1 a L_2 byly neoddělené? (K pojmu oddělených jazyků viz kap. 6 oddílu VI.) Kladnou odpověď na tuto otázku podal A. V. Gladkij v dopise autorovi této knihy.

6. I. I. Revzin navrhl některé modifikace pojmu gramatiky s konečným počtem stavů ([287], str. 117–122); zabýval se i některými aspekty gramatik s konečným počtem stavů souvisících s poetikou. Na svazové konferenci o aplikaci matematických metod na studium beletristických textů, konané r. 1961 v městě Gorkém, vystoupil I. I. Revzin ve své přednášce s myšlenkou modelování pojmu parodie pomocí gramatik s konečným počtem stavů.

7. Na některé aplikace gramatik s konečným počtem stavů při studiu slabiky upozornil S. K. Šaumjan ve své knize [336].

8. Ve 2. a 16. kapitole VI. oddílu byly zavedeny a studovány různé formalizace pojmu gramatického pravidla. Tímto problémem se znovu zabýval z širší perspektivy N. Chomsky ve studii [56]. Úvahy, které ve své práci rozvinul, jsou ve zkratce tyto (viz též [224]):

Gramatikou jazyka L se rozumí mechanismus, který umožňuje stanovit nekonečnou množinu (správných) vět jazyka L a popsat jejich strukturu. K popisu struktury je zapotřebí:

(a) třídy gramatik $G_1, G_2, \ldots$;
(b) třídy vět $P_1, P_2, \ldots$;
(c) funkce f definované takto: $f(i, j)$ je množina strukturních popisů věty P_i, získaných pomocí gramatiky G;
(d) funkce $m(i)$, přiřazené gramatice G_i;
(e) funkce g definované takto: $g(i, n)$ je popis konečného automatu, u něhož jsou vstupní signály právě věty zastoupené v (b) a výstupní signály jsou některé nebo všechny prvky $f(i, j)$ definované v bodě (c) (n je parametr, který určuje kapacitu automatu).

Vysvětlíme krátce, jaký má význam zavedení výše stanovených předmětů:

předměty (a) vyhovují požadavku, aby obecná teorie jazyka poskytovala schéma gramatického popisu a aby přesně definovala pojem gramatického pravidla;

předměty (b) je možno zavést použitím pevně stanovené abecedy, například té, které užívá Roman Jakobson ve své teorii o binárních distinktivních rysech;

předměty (c) vyžadují, aby bylo možno stanovit, co lze získat od gramatiky, pokud jde o určité zvláštní věty, nepřihlíží-li se k přínosu intuice. Je-li věta P_i dvojznačná, musí množina $f(i, j)$ obsahovat alespoň dva prvky.

(d) Funkce m zavedená v bodě (d) je mírou složitosti rozhodující o volbě mezi několika gramatikami, které jsou slučitelné s určitými údaji (viz k tomu knihu [51] a studii Morrise Halleho ve sborníku [166]; krátkou zmínku o této studii najde čtenář v článku autora této knihy [223]).

předmět (e) vyjadřuje požadavek jiného druhu; gramatika je v podstatě teorie jazyka, která specifikuje a generuje množinu vět a přiřazuje každé větě určitý strukturní popis.

Protože gramatika, jak byla popsána výše, se staví zcela stejně k mluvčímu i k posluchači, chová se k nim neutrálně a klade si jako jediný cíl vytvoření teorie vět jazyka a teorie jejich generování a jejich popisu, je možno se pokusit o zkonstruování funkce g tak, že $g(i, n)$ je modelem pro tvoření (identifikování) vět mluvčím (posluchačem), který užívá gramatiky G_i a jehož paměť má kapacitu danou hodnotou čísla n.

V duchu těchto požadavků analyzuje N. Chomsky ve studii [56] dva typy gramatik: gramatiky, ve kterých je hlavní pozornost soustředěna na složkovou strukturu („constituent structure grammars"), a gramatiky transformační. V téže studii podává Chomsky poměrně přesnou definici obou typů.

9. Jiné aspekty problémů, o nichž jsme mluvili v bodě 8, studuje N. Chomsky v článku [53]. Seznámíme čtenáře s některými obecnými úvahami obsaženými v tomto článku a doplníme je několika vlastními postřehy:

I když většina zkoumaných jazyků obsahuje nekonečné množství vět, strukturu těchto jazyků je třeba popsat prostřednictvím určitého systému konečného počtu prvků. Právě takový soubor tvoří gramatiku jazyka. Gramatika má tedy nutně konečný charakter. Právě v tomto rozporu mezi nutně konečným charakterem gramatiky na jedné straně a nekonečností každého přirozeného jazyka na straně druhé spočívá obtížný problém strukturního popisu jazyka. Na gramatiku určitého jazyka se můžeme dívat jako na funkci, jejímž oborem je sám jazyk. Teorie jazyka musí stanovit určitou třídu funkcí – označíme ji F – s jejichž pomocí mohou být dedukovány gramatiky konkrétních jazyků.

Nejslabší podmínka, kterou je možno gramatice předepsat, je ta, aby třída F byla obsažena ve třídě Turingových strojů, které nepodléhají dalším omezením. Nejrestriktivnější podmínka je ta, aby gramatika byla konečným markovovským procesem – konečným automatem.

Jak jsme viděli v 6. kapitole oddílu VI a v oddílu VII, podmínka, aby gramatika pracovala jako konečný automat, je příliš přísná; gramatiky přirozených jazyků takovou gramatiku daleko překračují. Přesto některé nekonečné úseky přirozených jazyků mohou být popsány gramatikami s konečným počtem stavů.

I když gramatiky s konečným počtem stavů mají menší generativní schopnost než gramatiky typu 2 (viz kap. 16 oddílu VI), hlavní nedostatek gramatik s konečným počtem stavů nespočívá v této okolnosti, nýbrž v tom, že i pro jazyky, které tyto gramatiky mohou generovat, je jejich explikativní síla a jejich schopnost vytvářet strukturní popisy dosti omezená. O některých takových možnostech gramatik s konečným počtem stavů jsme mluvili v oddílu VII. Existují jistě ještě další možnosti, na které ukážou další zkoumání.

Gramatiky, pro které platí jako jediná podmínka, aby třída F byla obsažena ve třídě obecných Turingových strojů, jsou příliš obecné, než aby byly zajímavé. Skutečně toho víme o přirozeném jazyku jen na základě toho, že věty tohoto jazyka tvoří rekurzívně spočetnou množinu, velmi málo.

Teorie jazyka musí stanovit takovou třídu strukturních popisů, kterou označíme F, a takový funkcionál Φ, že je-li dáno $f \in F$ a x z oboru hodnot f, pak $\Phi(f, x)$ vytváří strukturní popis věty x vzhledem ke gramatice f a ukazuje mimo jiné, jaké jiné věty mají stejnou strukturu jako x. Je zřejmé, že není možno podat vyhovující definici třídy F a funkcionálu Φ, jsou-li prvky třídy F definovány jen jako systémy o dosti chudé struktuře, jako je Turingův stroj.

Tak tvoří zájem o strukturní vlastnosti přirozených jazyků empirický, intuitivní základ studia strojů, které mají větší generativní sílu než konečné automaty a zároveň mají speciálnější a bohatší strukturu než Turingův stroj. Naopak studium různých typů strojů, které z hlediska generativní síly tvoří přechod mezi konečným automatem a Turingovým strojem, je velmi důležité pro pochopení gramatik přirozených jazyků, protože tyto stroje vytvářejí modely některých podstatných aspektů přirozených jazyků a tím zevrubně osvětlují gramatickou strukturu těchto jazyků. Takové zprostředkující modely byly stručně vyloženy v kap. 16 oddílu VI. V bibliografii je udán velký počet článků o takových modelech: [11], [15], [20], [21], [55], [57], [59], [70], [91], [93], [126], [128], [129], [157], [159], [161], [165], [174], [194], [233], [239], [244], [260], [287], [288], [300], [303], [308], [309], [314], [317], [318], [329], [337], [338], [352], [353], jakož i práce citované již dříve.

Hlavním problémem, který bezprostředně souvisí s teorií jazyka, je stanovení místa, které zaujímá vzhledem k přirozeným jazykům každý typ stroje tvořící přechod mezi konečným automatem a Turingovým strojem. Bylo by například velmi zajímavé vědět, zdali je zásadně možno generovat přirozený jazyk jen pomocí frázové gramatiky typu 1 nebo 2, jak byly definovány v 16. kap. oddílu VI. Zdá se, že tento problém, který dosud nebyl vyřešen, je dosti obtížný, než aby mohl být řešen přímo. Zatím se provádějí předběžná zkoumání. Je snaha stanovit ty strukturní vlastnosti jazyků, které mohou být popsány gramatikami různých typů z hierarchie Chomského. Je jistě důležité najít v určité třídě gramatik tu gramatiku G, která generuje daný jazyk L. Výsledek však nebude uspokojivý, jestliže gramatika G nebude umět také vysvětlit strukturu vět jazyka L. Zde se právě projevuje nedostatečnost gramatik s konečným počtem stavů z hlediska zkoumání přirozených jazyků i některých jazyků umělých, jako je například ALGOL nebo jiné jazyky pro matematické programování.

10. Může se zdát paradoxní, že nejzajímavější lingvistické aspekty gramatik a jazyků s konečným počtem stavů nevyplývají z jejich bezprostředního studia, nýbrž z převedení výsledků dosažených v teorii konečných automatů a v teorii událostí reprezentovatelných takovými automaty do teorie gramatik a jazyků s konečným počtem stavů. Mohli bychom říci, že myšlenky, metody a závěry teorie konečných automatů jsou více lingvistické než myšlenky, metody a závěry teorie gramatik s konečným počtem stavů. Tak, abychom dali pregnantnější příklad, relace kongruence, o níž jsme mluvili v oddílu VI, je v podstatě rozklad univerzálního jazyka na distribuční třídy; dvě posloupnosti x a y patří do téže distribuční třídy vzhledem k jazyku L, jestliže pro jakoukoli dvojici posloupností z a w posloupnosti zxw a zyw buď patří obě do jazyka L nebo obě v jazyce L chybějí. Tento pojem „totožné distribuce" je základním pojmem deskriptivní lingvistiky (viz též oddíl VII); na něm se zakládají definice některých důležitých pojmů, jako je složka, subordinace a závislost. Tentýž pojem „totožné distribuce" zaujímá přední místo v gramatickém modelu O. S. Kulaginové [184]. Teorém 10 v VI. oddílu říká mimo jiné, že událost L je reprezentovatelná konečným automatem právě tehdy, když počet distribučních tříd vzhledem k jazyku L je konečný. Některými lingvistickými důsledky této okolnosti jsme se zabývali v oddílu VII. Zde chceme poznamenat, že teorém 10 v oddílu VI poskytuje „lingvistickou" charakterizaci událostí reprezentovatelných konečným automatem. Není bez zajímavosti zkoumat, k čemu vedou v teorii konečných automatů četné myšlenky, metody a závěry, s nimiž se pracuje v deskriptivní lingvistice a které vycházejí z pojmu distribuce.

Jinou skutečnost, kterou jsme vyložili v VI. oddíle a která má mnoho lingvistických aspektů, ale pochází částečně z teorie pravidelných událostí vypracované Kleenem [175], vyjadřují teorémy 14 a 17 v oddílu VI. Ve smyslu těchto teorémů zůstáváme i při booleovských operacích, operaci komplexního součinu a operaci uzávěru ve třídě událostí reprezentovatelných konečným automatem. To je velice důležité, neboť jak ukázali Y. Bar-Hillel a jeho spolupracovníci ve studiích [17] a [2] a S. Scheinberg v článku [303], třída jazyků 2 již nemá tuto vlastnost. Teorém 18 v oddílu VI. – a to je právě to nejzajímavější – podává dokonce celkovou charakteristiku množiny událostí reprezentovatelných konečným automatem a ukazuje, že tato množina je charakterizována tím, že je minimální, pokud jde o to, že při booleovských operacích, komplexním součinu a uzávěru s touto množinou vystačíme.

11. Jak je známo (viz například práce [287] a [222]), matematické modely jazyka se dělí na analytické čili deskriptivní a na syntetické čili generativní podle toho, zdali množina správných vět se chápe jako daná nebo zdali je cílem modelování. Gramatiky s konečným počtem stavů jsou zřejmě generativní modely, protože neanalyzují již existující soubor vět, ale takový soubor generují. Každému generativnímu modelu se však přiřazují některé modely analytické. Jakmile jsme totiž stanovili jazyk generovaný určitou gramatikou, přistupujeme k analýze struktury jeho vět. N. Chomsky žádá, aby oba druhy zkoumání postupovaly ruku v ruce, aby byly pokud možno alternativní, současné, a ne aby následovaly po sobě; jinými slovy Chomsky žádá od gramatiky, aby zároveň generovala věty a vysvětlovala, popisovala jejich strukturu, prvky, z nichž jsou vytvořeny, vztahy mezi větami, a to všechno aby bylo dáno samotnou povahou generativního procesu. Tento požadavek je plněn ve větší míře gramatikami typu 1 a 2 (viz kap. 16 oddílu VI), v menší míře gramatikami s konečným počtem stavů a konečnými automaty. Musíme však poznamenat, že je-li teorie konečných automatů teorií některých generativních modelů jazyka, je teorie událostí reprezentovatelných konečným automatem teorií některých modelů deskriptivních. Takové závěry, k jakým vedou teorémy 5, 14, 17 a 18 v VI. oddílu, jsou etapy v analytickém modelování jazyků s konečným počtem stavů.

Souvislost mezi analytickým a generativním modelováním se projevuje i v pojmech a metodách, jichž oba způsoby modelování užívají. Již ve 27. kapitole oddílu V jsme poukázali na některé souvislosti mezi řetězy a úseky v pojetí Revzinově ([287], [350], [226]) na jedné straně a určitými fakty týkajícími se automatů a pologrup, na které upozornil Gluškov ([114], [116]), na straně druhé. Teorémy 11, 12 a 13 v oddílu VI ukazují na další souvislosti mezi analytickými a generativními gramatikami. Konstatuje se, že pojem derivace rozkladu (viz práci [184]), který je základním pojmem analytické teorie gramatiky, založené na teorii množin, slouží k charakterizaci událostí reprezentovatelných konečným automatem (a tedy jazyků s konečným počtem stavů). Uvědomíme-li si, že tentýž pojem derivace rozkladu slouží k modelování pojmu slovního druhu ([350], [212], [228]) a pojmu jmeného rodu ([211], [218]), vyplývá z toho organická jednota matematického aparátu užívaného při studiu generativních a deskriptivních aspektů gramatiky. Pro to mluví i některá fakta z teorie gramatik různých typů z hierarchie Chomského (viz kap. 16 oddílu VI). Základním pojmem je zde pojem derivace věty na základě jiné věty. Matematickou obdobu tohoto pojmu nacházíme jak v modelování gramatického rodu ([211], [218]), tak v matematickém modelování pádu ([351], [227]). Máme na mysli pojem řetěz v pojetí Revzinově a ekvivalenci, pomocí níž jsou modelovány pády v modelu Kolmogorova a Uspenského.

Jak pojem derivace rozkladu, tak i relace derivace jedné věty na základě druhé by si zasloužily hlubšího algebraického zkoumání.

12. V kapitole 16 oddílu VI i ve výše uvedených poznámkách jsme se zmiňovali o Turingově stroji. Načrtneme zde definici tohoto pojmu. Turingův stroj je možno podle pojetí jeho autora (pojetí Turingova stroje se časem několikrát měnilo) popsat

takto (viz například práci [322]). Mějme pásku, která jde oběma směry do nekonečna a je rozdělena na čtvercová políčka uspořádaná lineárně. Nechť je V konečná množina symbolů, které mohou být zaneseny do těchto políček. Uvažujme mechanismus, který je schopen přečíst symbol napsaný v určitém políčku, eventuálně jej nahradit jiným symbolem a potom postoupit k sousednímu políčku vlevo nebo vpravo. Tyto operace se provádějí takto: Mechanismus je schopen konečného počtu stavů; v každém okamžiku se nachází v jednom z nich. Když mechanismus čte symbol napsaný do určitého políčka, aplikuje do tohoto políčka určitý symbol – který může, ale nemusí být odlišný od symbolu, který přečetl; pak přejde do určitého stavu, který může, ale nemusí být odlišný od stavu předcházejícího, a nato postoupí k sousednímu políčku – vlevo nebo vpravo podle toho, v jakém stavu se mechanismus nachází, a podle symbolu, který přečetl.

Proveďme nyní na základě tohoto popisu formalizaci způsobu, jímž Turingův stroj pracuje. Nechť V je konečná množina prvků zvaných symboly, $\mathscr{S}$ konečná množina prvků zvaných stavy, $B = \{+, -\}$. Mezi symboly z množiny V je také takzvaný prázdný symbol, který, je-li zapsán do určitého políčka, je nechává volné. Rovněž je možno stanovit podmínku, aby jeden ze stavů z množiny $\mathscr{S}$ byl stavem, v němž mechanismus přestává pracovat. Činnost Turingova stroje je zcela dána stanovením určité části $\mathscr{P}$ kartézského součinu $\mathscr{S} \times V \times V \times \mathscr{S} \times B$. Jestliže například platí $S' \in \mathscr{S}$, $S'' \in \mathscr{S}$, $v' \in V$, $v'' \in V$ a $(S', v', v'', S'', +) \in \mathscr{P}$, znamená to, že jakmile je mechanismus ve stavu S' a přečte symbol v', nahradí tento symbol symbolem v'', přejde do stavu S'' a postoupí k sousednímu políčku vpravo. Aby bylo možno blíže osvětlit, jak Turingův stroj začíná pracovat, je třeba si představit, že existuje určitý stav mechanismu – zvaný počáteční – v němž se mechanismus nachází v počátečním okamžiku, a že symbol, který mechanismus v tomto počátečním okamžiku přečte, je nulový.

Turing dokázal, že stroj výše popsaného typu může provádět jakýkoli početní postup. Dále ukázal, že stroje tohoto typu mohou být očíslovány a že existuje univerzální stroj (dále „univerzální Turingův stroj"), který po přečtení pořadového čísla určitého Turingova stroje – například čísla n – provede přesně ty operace, které by provedl stroj v pořadí n-tý, kdyby vyšel od počátečního stavu a přečetl prázdný symbol.

13. M. O. Rabin a D. Scott uvažovali ve studii [283] stejně jako J. C. Shepherdson ve studii [324] pojem bilaterálního konečného automatu nad abecedou Σ, definovaný jako systém $A = (\mathscr{S}, \Sigma, f, S_0, F)$, kde $\mathscr{S}$ a Σ jsou konečné množiny, prvky množiny $\mathscr{S}$ jsou stavy automatu a prvky množiny Σ jsou symboly automatu; $S_0 \in \mathscr{S}$ je počáteční stav automatu a F je část množiny $\mathscr{S}$, jejíž prvky jsou koncové stavy automatu; f je zobrazení kartézského součinu $\Sigma \times \mathscr{S}$ do kartézského součinu $\mathscr{L} \times \mathscr{S}$, přičemž $\mathscr{L} = \{-1, 0, 1\}$.

Je zřejmé, že bilaterální konečný automat se liší od obyčejného konečného automatu (který bychom mohli nazvat unilaterálním) tím, že f není zobrazením součinu $\Sigma \times \mathscr{S}$ do množiny $\mathscr{S}$, ale do součinu $\mathscr{L} \times \mathscr{S}$.

Bilaterální konečný automat A pracuje takto: Nechť je $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ posloupnost symbolů z množiny Σ. Budeme uvažovat posloupnost n políček; v prvním políčku bude napsán symbol σ_1, ve druhém symbol $\sigma_2, \ldots,$ v n-tém symbol σ_n. Konečná posloupnost n políček obsazených těmito symboly tvoří pásku přiřazenou posloupnosti $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$; číslo n je délka pásky.

Předpokládejme, že automat A je ve stavu S_0 a „přečte" symbol σ_1 napsaný do prvního políčka pásky (jinými slovy vyjde od stavu S_0 a vytvoří symbol σ_1). Dále předpokládejme, že je-li automat A v libovolném stavu S a postoupí dále vytvořením symbolu $\sigma \in \Sigma$ – při $f(\sigma, S) = (p, S')$ – přejde do stavu S' a buď přečte symbol umístěný v sousedním políčku vlevo od políčka předcházejícího nebo nepřečte nic nebo přečte symbol umístěný v sousedním políčku vpravo od políčka předcházejícího podle toho, zdali $p = -1$, $p = 0$ nebo $p = 1$. (V případě $S = S_0$ nemůže p nabýt hodnoty -1.) Jestliže automat A přečte tímto způsobem i symbol umístěný v posledním políčku a nachází se v určitém stavu z množiny F, říkáme, že takto získanou posloupnost symbolů z množiny Σ automat akceptoval nebo generoval.

Množina všech posloupností generovaných bilaterálním konečným automatem A – označíme ji $T(A)$ – tvoří událost generovanou automatem A. Je-li dána událost L nad abecedou Σ a existuje-li bilaterální konečný automat A takový, že $T(A) = L$, říkáme, že L je událost reprezentovatelná bilaterálním konečným automatem.

Na základě výše provedeného popisu můžeme nyní přejít k formalizaci způsobu, jakým bilaterální konečný automat pracuje.

Množinou $T(A)$ generovanou bilaterálním konečným automatem A nazveme množinu všech posloupností $\sigma_0\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}$ vytvořených ze symbolů z množiny Σ, pro které existuje celé číslo $m > 0$, posloupnost $m + 1$ celých čísel $p_0, \ldots, p_m$ a posloupnost $m + 1$ stavů automatu A $S_0, \ldots, S_m$ takové, že

1. $p_0 = 0$ a S_0 je počáteční stav automatu A;
2. $0 \leqq p_i < n$ pro $i = 0, \ldots, m - 1$;
3. $p_m = n$ a $S_m \in F$;
4. $(p_i - p_{i-1}, S_i) = f(S_{i-1}, \sigma_{p_{i-1}})$ pro $i = 1, \ldots, m$.

Posloupnost $p_0, \ldots, p_m$ je třeba interpretovat jako posloupnost postavení automatu A na pásce. Tímto způsobem číslo $p_i - p_{i-1}$ udává změnu v postavení stroje mezi okamžikem $i - 1$ a okamžikem i.

Teorém 15 v práci [283], který byl znovu dokázán jednodušším způsobem ve studii [324], říká:

Každému bilaterálnímu konečnému automatu A odpovídá unilaterální konečný automat B takový, že $T(A) = T(B)$.

Tento teorém ukazuje, že ani schopnost konečného automatu pracovat „oběma směry" nijak neobohacuje množinu jazyků s konečným počtem stavů.

14. Systematický výklad abstraktní teorie automatů, který se však liší od našeho výkladu v této knize, podal V. M. Gluškov v článku [116], kde studuje s některými

modifikacemi typy automatů, které zavedl Mealy [236] a Moore [248]. Nazveme Mealyho-Gluškovovým automatem předmět $A = A(\mathscr{A}, \mathscr{X}, \mathscr{N}, \delta, \lambda)$ skládající se z tří neprázdných množin $\mathscr{A}$, $\mathscr{X}$ a $\mathscr{N}$ a ze dvou funkcí $\delta = \delta(a, x)$, $\lambda = \lambda(a, x)$. $\mathscr{A}$ je množina stavů automatu, $\mathscr{X}$ je množina vstupních signálů, $\mathscr{N}$ je množina výstupních signálů, δ zobrazuje $\mathscr{A} \times \mathscr{X}$ v množině $\mathscr{A}$ a nazývá se přechodovou funkcí automatu a λ zobrazuje $\mathscr{A} \times \mathscr{X}$ v množině $\mathscr{N}$ a nazývá se výstupní funkcí automatu.

Mealyho-Gluškovův automat je počáteční, je-li v množině stavů označené $\mathscr{A}$ určen libovolný prvek a_0, zvaný počáteční stav automatu A.

Jsou-li množiny $\mathscr{A}$, $\mathscr{X}$ a $\mathscr{N}$ konečné, říkáme, že A je konečný Mealyho-Gluškovův automat. I když pojem Moorova-Gluškovova automatu (viz definici 5 ve studii [116]) je zvláštním případem pojmu automatu Mealyho-Gluškovova, bylo dokázáno (viz teorém 4 ve studii [116]), že k jakémukoli Mealyho-Gluškovovu (konečnému) automatu existuje (konečný) Mooreův-Gluškovův automat, který je s ním ekvivalentní. (Pojem ekvivalence dvou automatů vyplývá z definice 3 ve studii [116].)

Definice 15 ve studii [116] zavádí pojem pravidelné události takto: Pravidelnou událostí se nazývá každá událost v konečné abecedě $\mathscr{X}$, kterou je možno získat z elementárních událostí této abecedy (totiž z událostí vytvořených z jediného slova, které je samo vytvořeno z jediného symbolu $x \in \mathscr{X}$) pomocí konečného počtu disjunkcí, násobení a iterací; také prázdná událost je považována za pravidelnou.

Z teorému 18 v VI. oddílu a z toho, že Gluškovova operace iterace (viz definici 13 ve studii [116]) je totožná s operací uzávěru, kterou jsme zavedli v VI. oddílu, bezprostředně vyplývá, že pravidelné události v pojetí Gluškovově splývají s událostmi reprezentovatelnými konečným automatem, jimiž jsme se zabývali v oddílu VI. Tato skutečnost nijak nepřekvapuje; Gluškov vyšel při stanovení pojmu pravidelné události z téže základní studie S. C. Kleeneho [175], o které mluvíme v VI. oddílu této knihy. Jak vyplývá z teorému 33 (oddíl VI), existuje určitý izomorfismus mezi událostmi reprezentovatelnými konečným automatem a pravidelnými událostmi v pojetí Kleeneho.

Teorém 15 ve studii [116] říká mezi jiným, že každá událost reprezentovatelná Mealyho-Gluškovovým konečným automatem je pravidelnou událostí (v pojetí Gluškovově) a teorém 16 v téže studii říká mezi jiným, že každá pravidelná událost (v pojetí Gluškovově) je reprezentovatelná konečným počátečním Mealyho-Gluškovovým automatem prostřednictvím množiny stavů automatu. Takto je pojem události reprezentovatelné konečným počátečním Mealyho-Gluškovovým automatem v podstatě ekvivalentní s pojmem události reprezentovatelné konečným automatem (kterým jsme se zabývali v VII. oddílu). Na základě výše podaných výkladů je tvrzení obsažené v teorému 19 ve studii [116], podle kterého je univerzální událost v určité konečné abecedě pravidelnou událostí, obdobou teorému, který říká, že univerzální jazyk je jazyk s konečným počtem stavů, a teorému 14 v VI., oddílu, který říká mezi jiným, že univerzální událost je reprezentovatelná konečným automatem.

Ekvivalence mezi pravidelnými událostmi v pojetí Gluškovově a událostmi reprezentovatelnými konečným automatem umožňuje dojít k novým operacím, které, jsou-li aplikovány na událost reprezentovatelnou konečným automatem, vedou rovněž k události reprezentovatelné konečným automatem. Máme na mysli operaci doplnění, operaci rozšíření a operaci zkrácení, které jsou všechny definovány ve studii [116]. Doplnění události L je událost, která je vytvořena množinou všech počátečních podposloupností posloupností v události L (posloupnost x je počáteční podposloupností posloupnosti y, jestliže existuje posloupnost z – která může být eventuálně prázdná – taková, že $y = zz$; z toho vyplývá, že prázdná posloupnost je počáteční podposloupností libovolné posloupnosti). Rozšíření události L je vytvořeno všemi posloupnostmi y, pro které existuje $x \in L$ takové, že x je počáteční podposloupností y. Zkrácení události L je vytvořeno z těch neprázdných posloupností $y \in L$, pro které každá neprázdná počáteční podposloupnost patří do L. V teorémech 18, 19, a 20 ve studii [116] se říká mimo jiné, že doplnění, rozšíření a zkrácení pravidelné události (v pojetí Gluškovově) jsou rovněž pravidelné události. Z toho vyplývá, že jsou-li operace doplnění, rozšíření a zkrácení aplikovány na události reprezentovatelné konečným automatem (nebo, což je totéž, na jazyky s konečným počtem stavů), vedou rovněž k událostem reprezentovatelným konečným automatem, tedy k jazykům s konečným počtem stavů.

Tak jsme došli k novým možnostem, jak najít nekonečné úseky přirozených jazyků, které mohou být generovány gramatikami s konečným počtem stavů. Lingvistický aspekt operací doplnění, rozšíření a zkrácení by si tedy zasluhoval zvláštního zkoumání.

Teorém 18 ve studii [116] říká mimo jiné, že jsou-li operace konečného průniku a operace vytvoření doplňků aplikovány na pravidelné události (v pojetí Gluškovově), vedou rovněž k pravidelným událostem (v pojetí Gluškovově). Tato zjištění odpovídají teorémům v VI. oddílu naší knihy, v nichž se tvrdí, že jazyky s konečným počtem stavů tvoří Booleovu algebru množin, a teorému 14 v VI. oddílu, v němž se tvrdí, že události reprezentovatelné konečným automatem tvoří rovněž Booleovu algebru množin.

V. G. Bodnarčuk zavedl obecnou operaci superpozice událostí; aplikujeme-li tuto operaci na pravidelné události, dostaneme rovněž pravidelné události [30] (viz též teorém 21 ve studii [116]). Mnohé operace s událostmi jsou zvláštní případy této operace superpozice.

15. Nekonečný jazyk, v němž je délka každé věty vyjádřena prvočíslem, není jazykem s konečným počtem stavů. Bylo by zajímavé zjistit, jaké místo zaujímá takový jazyk v hierarchii Chomského. Je to jazyk typu 2? Jestliže ne, je to jazyk typu 1? A. V. Gladkij ukázal v dopise autorovi této knihy, že nejde o jazyk typu 2, nýbrž o jazyk typu 1.

Podobný problém vzniká v souvislosti s jazykem typu Kleeneho, totiž s nekonečným jazykem, v němž délka každé věty je dokonalý čtverec. Jak ukázal Kleene (viz též oddíl VI této knihy), takový jazyk není jazykem s konečným počtem stavů. A. V. Gladkij ukázal v dopise autorovi této knihy, že ani v tomto případě nejde o jazyk typu 2, nýbrž o jazyk typu 1.

16. Je možno dokázat, že platí tento

Teorém. *Nechť Π je vlastnost přirozeného čísla. Nutná a postačující podmínka pro to, aby existovala nekonečná aritmetická řada, jejíž každý člen má vlastnost Π, je existence nekonečného jazyka s konečným počtem stavů, jehož každá věta má délku rovnou číslu s vlastností Π.*

Důkaz. Podmínka je nutná. Nechť je $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nekonečná aritmetická řada, jejímiž členy jsou přirozená čísla. Nechť je λ rozdíl této řady. Předpokládejme, že každé číslo a_n má vlastnost Π. Pro zpřesnění a pro jednoduchost budeme pracovat se slovníkem vytvořeným z jediného prvku, který označíme a. Sestavíme gramatiku G s konečným počtem stavů takto: Gramatika G má $a_1 + \lambda$ stavů: $S_0, S_1, S_2, \ldots$ $\ldots, S_{a_1}, S_{a_1+1}, \ldots, S_{a_1+\lambda-1}$, kde S_0 je počáteční stav. Pro $0 \leqq i \leqq a_1 + \lambda - 2$ vznikne při přechodu od stavu S_i k stavu S_{i+1} slovo a, při přechodu od stavu $S_{a_1+\lambda-1}$ ke stavu S_{a_1} vznikne rovněž slovo a, ale při přechodu od stavu S_{a_1} ke stavu S_0 vznikne prázdné slovo. Takto vytvořená gramatika je gramatika zcela produktivní a patří do F_4 (k těmto pojmům viz VI. oddíl). Je zřejmé, že gramatika G obsahuje nezákladní cyklus s počátkem v S_{a_1}. Jazyk L_G obsahuje přesně ty věty

$$\underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ krát}},$$

kde $n = a_1 + p\lambda$, přičemž p je libovolné nezáporné celé číslo. Platí však $a_p = a_1 + (p - 1)\lambda$ $(p = 1, 2, \ldots)$; každá věta jazyka L_G má tedy délku, kterou lze vyjádřit některým členem uvažované aritmetické řady, tedy číslem s vlastností Π.

Podmínka je postačující. Předpokládejme, že existuje nekonečný jazyk L s konečným počtem stavů, v němž se délka každé věty rovná číslu s vlastností Π. Na základě závěrů, k nimž jsme dospěli v oddílu VI., můžeme připustit, že existuje zcela produktivní gramatika G patřící do F_4 a taková, že $L_G = L$. Na základě teorému 6 z oddílu VI. obsahuje gramatika G nezákladní cyklus; nechť je délka tohoto cyklu λ a počáteční stav (počátek) cyklu S_{a_1}. Nechť je μ délka posloupnosti, která vzniká přechodem od stavu S_0 k stavu S_{a_1} a ω délka posloupnosti, která vzniká přechodem od stavu S_{a_1} ke stavu S_0. Z toho vyplývá, že v jazyce L_G existuje pro jakékoli přirozené číslo p věta o délce $\mu + \omega + p\lambda$ (stačí projít $p$krát nezákladní cyklus s počátkem v S_{a_1}). Pro jakékoli přirozené číslo p má tedy číslo $\mu + \omega + p\lambda$ vlastnost Π. Protože čísla $\mu + \omega + p\lambda$ $(p = 1, 2 \ldots)$ tvoří nekonečnou aritmetickou řadu, je dostatečnost této podmínky dokázána.

17. Pojetí konečných automatů podobné tomu, které je základem gramatik typu 3 z hierarchie Chomského, se vyskytuje v práci [37]. Bylo by zajímavé podrobně studovat vztahy mezi pravidelnými systémy, které zavádí a kterých užívá J. Richard Büchi v práci [37], na jedné straně a gramatikami z hierarchie Chomského na straně druhé.

18. Podrobným studiem vztahů mezi gramatikami s konečným počtem stavů na jedné straně a ostatními typy gramatik z hierarchie Chomského, jakož i dalšími

typy gramatik na straně druhé se zabývají mimo jiné Y. Bar-Hillel, M. Perles a E. Shamir v pracích [20] a [21] a zejména R. James Evey ve studii [86]. V práci R. J. Eveyho jsou podrobně studovány gramatiky z hierarchie Chomského. Konstatuje se, že gramatiky typu 1 nejsou příliš důležité, protože omezení 1 je velmi slabé a značně přibližuje tyto gramatiky gramatikám bez jakéhokoli omezení (tedy gramatikám typu 0). V téže práci je studována hierarchie šesti typů automatů a zkoumají se vztahy mezi různými typy automatů a různými typy gramatik. Ukazuje se i zde, že Turingovy stroje odpovídají gramatikám typu 0 a stroje s konečným počtem stavů odpovídají gramatikám typu 3. Zvláště důležitý je závěr, že takzvané zásobníkové automaty („push down store machines") jsou ekvivalentní s frázovými gramatikami (phrase structure grammars). Výklad všech těchto problémů je podřízen hlavnímu předmětu studie, jímž je generování a analýza umělých jazyků, jakož i překládání z jednoho umělého jazyka do druhého. V práci je ostatně podána formalizovaná definice pojmu umělého jazyka a jeho různé charakterizace. V závěru R. James Evey opravuje mínění některých autorů, podle nichž programovací jazyky (ALGOL, FORTRAN aj.) mohou být generovány frázovými gramatikami. Je-li tomu tak v případě takzvaného ALGOLu 60 [254], obecně vzato vzniká problém, jak ukazuje Evey, jak najít nový stroj, který by generoval i syntax i sémantiku jazyků, jako je ALGOL a FORTRAN.

19. Modelováním počátečních souhláskových skupin v rumunštině pomocí teorie grafů se zabývají práce [208], [210] a [230].

20. První práce, které zavádějí do studia automatů pojem pravděpodobnosti, jsou teprve z nedávné doby ([383], [385]). Na druhé straně, jak se ukazuje v pracích [50] a [51], zavedení pravděpodobnosti do studia gramatik s konečným počtem stavů vede bezprostředně k studiu konečného markovovského procesu. Bylo by zajímavé zjistit, jak se obráží na pozadí pravděpodobnosti ekvivalence mezi konečnými automaty Rabina-Scotta a gramatikami s konečným počtem stavů.

Bibliografie k II. části

[1] Achmanova O. S., Mel'čuk I. A., Padučeva E. V., Frumkina R. M.: *O točnych metodach issledovanija jazyka.* Izd. Moskovskogo univ., 1961.

[2] Aizerman M. A., Gusev L. A., Rozonoer L. I., Smirnova I. M., Tal A. A.: Automate finite. Partea I, *Analele româno-sovietice, Automatică și Cibernetică,* **2**, 1963, 24–39.

[3] — Gusev L. A., Rozonoer L. I., Smirnova I. M., Tal A. A.: Automate finite. Partea a II-a, *Analele româno-sovietice, Automatică și Cibernetică,* **3**, 1963, 99–109.

[4] Ajdukiewicz K.: Die syntaktische Konnexität. *Studia Philosophica,* **1**, 1935, 1–27.

[5] Andrejev N. D.: Modelirovanije jazyka na baze jego statističeskoj i teoretiko-množestvennoj struktury. *Tezisy soveščanij po matematičeskoj lingvistike,* Leningrad 1959, 15–22.

[6] — Models as a tool in the development of linguistic theory. *Word* **18**/1–2, 1962, 186–197.

[7] Aufenkamp D. D.: Analiz posledovatel'nostnych. *Matematika* 3/6, 1959, 145–148.

[8] — Chochn F. E.: Analiz posledovatel'nostnych mašin. *Matematika* 3/3, 1959, 129–146.

[9] Babickij K. I.: K voprosu o modelirovanii struktury prostogo predloženija. In: *Problemy strukturnoj lingvistiki,* Moskva 1962, 115–129.

[10] Bagrinovskaja G. P., Kulagina O. S., Liapunov A. A., Mološnaja T. N.: Nekotoryje voprosy matematičeskoj lingvistiki, voznikajuščije v svjazi s mašinnym perevodom. *Maš. perev. i prikl. lingvistika* **6**, 1961, 19–38.

[11] Banerji Ranan B.: Phrase Structure Languages, Finite Machines, and Channel Capacity. *Information and Control,* **6**/2, 1963, 153–162.

[12] Bar-Hillel Y.: A quasi-arithmetical notation for syntactic description. *Language,* **29**, 1953, 47–58.

[13] — Three methodological remarks on "Fundamentals of Language". *Word,* **13**, 1957, 323–335.

[14] — Recursive definitions in empirical sciences. In: *Proceedings of the Eleventh International Congress of Philosophy,* **5**, Brussels, 1953, 160–165.

[15] — Some recent results in theoretical linguistics. *Logic, Methodology and Philosophy of Science.* In: *Proceedings of the* 1960 *International Congress,* Stanford, California, 1962, 551–557.

[16] — The present status of automatic translation of languages. Appendix II. In: *Advances Computers,* **1**, F. L. Alt., ed., Academic Press, New York 1960.

[17] — Gaifman C. and Shamir E.: On categorial and phrase-structure grammars. *Bulletin of the Research Council of Israel,* **9***F*, 1960, 1–16.

[18] — Kasher A. and Shamir E.: Measures of Syntactic Complexity. (*Applied Logic Branch Technical Report* No. 13). The Hebrew University, Jerusalem, Israel, August 1963.

[19] — and Shamir E.: Finite state languages: Formal representations and adequacy problems. *Bulletin of the Research Council of Israel,* **8***F*, 1960, 155–166.

[20] — Perles M. and Shamir E.: On formal properties of simple phrase-structure grammars. (*Applied Logic Branch Technical Report,* No. 4). The Hebrew University, Jerusalem, Israel, July 1960.

[21] — PERLES M., SHAMIR E.: On formal properties of simple phrase structure grammars. *Z. Phonetik, Sprachwiss. Kommunikationsforsch.* **14**, 1961, 143–172.
[22] BARZDINIŠČ J. M.: Nekotoryje voprosy sinteza abstraktnych avtomatov. *Latvinskij Gos. Univ. im. P. STUČKI – Učenyje zapiski* **41**/5, 1961, 51.
[23] BELECKIJ M. I.: Neskol'ko modelej jazyka. *Doklady na Konferencii po obrabotke informacij, mašinnomu perevodu i avtomatičeskomu čteniju teksta*, **2**, Moskva 1961.
[24] — GRIGORJAN V. M., ZASLAVSKIJ I. D.: Aksiomatičeskoje opisanije porjadka i upravlenija slov v nekotorych tipach predloženij. In: *Matematičeskije voprosy kibernetiki i vyčislitel'noj techniki*. Jerevan 1963, 71–85.
[25] BELEVITCH V.: *Langage des machines et langage humain.* Office de Publicité, S. A. Bruxelles, 1956.
[26] BERGE CL.: *Théorie des graphes et ses applications.* Dunod, Paris 1958.
[27] BERKELEY E. C.: *Circuit Algebra.* Introduction. New York 1952.
[28] BLOCH A. S.: Transformări echivalente ale maşinilor secvenţiale (překlad z Avtomatika i telemechanika, **21**, 1960, 11). *Anal. Rom. Sov.* seria *Automatică şi Cibernetică*, **2**, 1963, 40–48.
[29] BODNARCHUK V. G.: Analysis of generalized graphs by equations solution technique in some algebra. In: *IFAC International Symposium of Theory of switching systems and finite automata. 24. IX. – 2. X. 1962*, Abstract of papers, Moscow 1962, 3.
[30] BODNARČUK V. G.: Avtomaty i sobytija. *Ukrainskij Mat. žurnal*, **14**/4, 1962, 351–361.
[31] BRAFFORT P.: *Eléments de linguistique mathématique.* Euratom, Enseignement préparatoire aux techniques de la documentation automatique, Bruxelles 1960, 51–85.
[32] BRATČIKOV I. L.: Nekotoryje teoremy formal'noj morfologii. *Doklady na Konferencii po obrabotke informacij, mašinnomu perevodu i avtomatičeskomu čteniju teksta*, **2**, Moskva 1961.
[33] — FITIALOV S. J., CEJTIN G. S.: O strukture informacii dlja mašinnogo perevoda. *Doklady na Konferencii po obrabotke informacij, mašinnomu perevodu i avtomatičeskomu čteniju teksta*, 2, Moskva 1961.
[34] BRZOZOWSKI J. A. (1962a): A survey of regular expressions and their applications. In: *IRE Trans. Electron. Computers EC*-**11**, 324–335. Též *Tech. Report* No. 4, Electrical Engineering Depart. Digital Systems Laboratory, Princeton Univ., Princeton, N. J. 1962.
[35] — Properties of Regular Expressions and State Diagrams. Electrical Engineering Depart. Digital Systems Laboratory, *Technical Report* No. 15, March 1962.
[36] BÜCHI J. R.: Weak second-order Arithmetic and finite automata. The University of Michigan, *Technical Report*, September 1959.
[37] — Regular canonical Systems and Finite Automata. The University of Michigan, College of Literature, Science and the Arts, Department of Philosophy, *Technical Report*, Ann Arbor, December 1959.
[38] — ELGOT C. C. and WRIGHT J. B.: The nonexistence of certain algorithms of finite automata theory (Abstract). *Notices of the Amer. Math. Soc.*, **5**, 1958, 98.
[39] BURKS A. N.: Finite cellular automata. In: *IFAC, International Symposium of Theory of switching systems and finite automata, 24. IX.–2. X. 1962 (Abstract of papers)*, Moscow 1962.
[40] BURKS A. W., WARREN P. W. and WRIGHT J. B.: An analysis of a logical machine using parenthesis-free notation. *Math. Tables and other aids to computation*, **8**/46, 1954, 53–57.
[41] — HAO WANG: The logic of Automata. *J. Assoc. Comput. Mach.* part. I, 4, 1957, 193–218, 279–297.
[42] — WRIGHT J. B.: Theory of logical nets. In: *Proc. IRE*, **41**/10, 1953, 1357–1365.
[43] CAMION P.: Analyse algébrique élémentaire du critère de Lecerf-Ihm. *Rapport GRISA*, Euratom, 3, 1960, 1–7.
[44] CARNAP R.: *Logical Syntax of Language.* Harcourt, Brace & Co., New York, 1937.

[45] CARROLL J. B.: An operational model for language behavior. *Anthropological Linguistics*, **1**/1, 1959, 37–54.
[46] CECCATO S.: Operational linguistics and translation. *Methodos*, **12**, 45–47, 1960, 11–80.
[47] — La macchina che osserva e descrive. *Ricerca scient.*, Parte 1, 2, 3–4, 1962, 37–58.
[48] CHAO YUEN REN: Models in Linguistics and models in general. In: *Proceedings of the 1960 International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Stanford, California 1962, 558–566.
[49] CHATMAN S.: Immediate Constituents and Expansion Analysis. *Word*, **11**/3, 1955.
[50] CHOMSKY N.: Three models for the description of language. *IRE Transactions on Information Theory*, **IT-2**/3, 1956, 113–124.
[51] — *Syntactic Structures.* 's Gravenhage, 1957.
[52] — MILLER G. A.: Finite state language. *Information and Control*, **1**/2, 1958, 91–112.
[53] — On certain formal properties of grammars. *Information and Control*, **2**/4, 1959, 137–167.
[54] — A note on phrase structure grammars. *Information and Control*, **2**/4, 1959, 393–395.
[55] — Explanatory models in linguistics. In: *Proceedings of the 1960 International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Stanford, California 1962, 528–550.
[56] — On the notion rule of grammar. In: *Proceedings of the Symposium on the Structure of Language and Its Mathematical Aspects.* American Math. Soc. 1960, 1961, 6–24.
[57] — Some methodological remarks on generative grammar. *Word*, **17**/2, 1961, 219–239.
[58] — The logical basis of linguistic theory. In: *Proc. IX-th Int. Congress of Linguists*, Cambridge, Mass., 1962.
[59] — Context-free grammars and pushdown storage. *Quarterly Progress Reports no. 65, Research Laboratory of Electronics. M. I. T.*, 1962.
[60] — Formal properties of grammars. In: *Handbook of Mathematical Psychology*, **2**, edited by Luce R. D., Bush R. R. and Galanter E., New York, Wiley, 1963, 323–418.
[61] — and MILLER G. A.: Introduction to the Formal Analysis of Natural Languages. In: *Handbook of Mathematical Psychology*, 2, edited by Luce R. D., R. R. Bush, and E. Galanter, New York, Wiley 1963, 269–321.
[62] CHURCH A.: Application of recursive arithmetic in the theory of computers and automata. In: *Advanced Theory of the Logical Design of Digital Computers*, Univ. of Michigan, June 1958.
[63] COHEN D.: Picture Processing in a Picture Language Machine. *National Bureau of Standard, Report 7.885*, April 30, 1963.
[64] COPI I. M., ELGOT C. C., WRIGHT J. B.: Realization of events by logical nets. *J. Assoc. Comput. Mach.* **5**/2, 1958, 181–196.
[65] CORBÉ M., TABORY R.: Introduction à une syntaxe automatique de l'anglais. Méthode des fragments. I-e part. *Traduction automatique*, **2**/4, 1961, 92–99.
[66] CRĂCIUN C.: Sur la notion de racine dans la théorie algébrique de la grammaire. *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées*, **10**/3, 1965, 323–331.
[67] — Sur une généralisation de la notion de catégorie grammaticale au sens de Dobrušin. *Cahiers de linguistique théorique et appliquée*, **2**, 1964.
[68] CULBERTSON J. T.: Some uneconomical robots. In: *Automata studies* (edited by C. E. Shannon and J. McCarthy), Princeton University Press, 1956, 99–116.
[69] ČULÍK K.: Some notes on finite state language and events represented by finite automata using labelled graphs. *Časopis pro pěstování mat.*, **86**, 1961, 43–55.
[70] — On some axiomatic systems for formal grammars and languages. *IFIP Congress*, Munich, 1962.
[71] — Formal structure of ALGOL and simplification of its description. In: *Proceed. Symp. Symb. Languages and Data Processing*, Roma 1962, 75–82.

[72] — Ispol'zovanije abstraktnoj semantiki i teorii grafov v mnogojazyčnych perevodnych slovarjach. *Problemy kibernetiki.*

[73] CURRY H. B.: Some logical aspects of grammatical structure. In: *Proceedings of the Symposium in applied mathematics*, **12**, *Structure of Language and its mathematical aspects*, 1961, 56–68.

[74] —, FEYS R.: *Combinatory Logic.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1958.

[75] DAVIS M. D.: A note on universal Turing machines. In: *Automata Studies* (edited by C. E. Shannon and J. McCarthy), Princeton University Press, 1956, 167–176.

[76] DAVIS M.: *Computability and Unsolvability.* McGraw-Hill, New York, 1958.

[77] DELAVENAY E.: Vers une linguistique générale répondant aux besoins de la traduction automatique. *Traduction automatique* **2**/2–3, 1961, 71.

[78] DIDERICHSEN L.: The importance of distribution versus other criteria in linguistic analysis. *Reports for the eighth international congress of linguists*, Oslo, **1**, 1957, 24.

[79] DOBRUŠIN R. L.: Elementarnaja grammatičeskaja kategorija. *Bjulleteň ob'edinenija po problemam mašinnogo perevoda*, **5**, Moskva 1957, 19–21.

[80] — Matematičeskije metody v lingvistike. *Matematičeskoje prosveščenije*, **6**, 1961, 37–60.

[81] ELGOT C. C.: *Decision problems of finite automata design and related Arithmetics.* The Univ. of Michigan Research Institute. Ann Arbor, June 1959.

[82] — Decision problems of finite-state machines. *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, **98**/21, 1960.

[83] ERDÖS P.: Some applications of Brun's Method. *Acta scientiarum mathematicarum*, **13**, Szeged 1949, 57–63.

[84] EVEN S.: On Information Lossless automata. Sperry Rand Research Center, *Report SRRC-RR-***63**-1, January 1963.

[85] EVEY R. J.: A fail-safe predictive translation algorithm for the incomplete parenthetic language. *Math. Linguistic Seminar Papers*, **6**, 1960.

[86] — The Theory and applications of pushdown store machines. The Computation Laboraratory of Harvard University. Mathematical Linguistics and Automatic Translation, *Report No. NSF-***10**, Cambridge, Mass., May 1963 (Anthony G. Oettinger, principal investigator).

[87] FILLMORE CH. J.: *The position of embedding transformations in a grammar.* The Ohio State University, Research Foundation, 1314 Kinnear Road Columbus 12, Ohio Project on Linguistic Analysis, Report No. 3. National Science Foundation Grant No. NSF-5 G 5055.

[88] FITIALOV S. J.: O modelirovanije sintaksisa v strukturnoj lingvistike. In: *Problemy strukturnoj lingvistiki*, Moskva 1962, 100–114.

[89] — Formal'no-matematičeskije modeli jazykov i struktura algoritmov perevoda. *Tezisy soveščanija po matematičeskoj lingvistike*, Leningrad 1959.

[90] — O postrojenii formal'noj morfologii v svjazi s mašinnym perevodom. *Doklady na Konferencii po obrabotke informacij, mašinnomu perevodu i avtomatičeskomu čteniju teksta*, **2**, Moskva 1961.

[91] FLOYD R. W.: A note on mathematical induction on phrase structure grammars. *Inform. and Control*, **4**/4, 1961, 353–358.

[92] — A descriptive language for symbol manipulation. *Journal of the ACM*, **8**/4, 1961, 579–584.

[93] — On ambiguity in phrase structure languages. *Commun. Assoc. Comput. Mach.*, **5**/10, 1962, 526–534.

[94] — Syntactic analysis operator precedence. *Journal of the ACM*, **10**/3, 1963, 316–333.

[95] FREUDENTHAL H.: Toward a cosmic language. *Yale Scient. Mag.*, **35**/3, 1960, 6–11.

[96] FROLOV I. T.: Problemele gnoseologice ale modelării sistemelor biologice. *Probleme de filozofie*, **2**, 1961, 45–59.

[97] GAIFMAN C.: *Dependency systems and phrase-structure systems.* P-2315, The Rand Corporation, Santa Monica, Calif. 1961.

[98] GENTILHOMME Y., TABORY R.: Le problème des vraies polysémies et la méthode du paramètre contextuel. *Traduction automatique*, **1**/1, 1960, 9–13.

[99] GIEDY M. J.: Autorship hypotheses and reliability of informants. *Stud. log.* **12**, 1961, 171–194.

[100] GILL A.: Cascades finite-state machines. *IRE Trans. Electron. Computers*, *EC*-**10**, September 1961, 366–370.

[101] GINSBURG S.: On the length of the smallest uniform experiment which distinguishes the terminal states of a machine. *J. Assoc. Comput. Mach.*, **5**/3, 1958, 266–280.

[102] — A technique for the reduction of a given machine to a minimal state machine. *IRE Trans. on Electronic Computers*, *EC*-**8**, September 1959, 346–356.

[103] — Some remarks on abstract machines. *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, **96**, September 1960, 400–444.

[104] — *An introduction to the mathematical machine theory.* Addison-Wesley, 1962.

[105] — Examples of abstract machines. *IRE Trans. Electron. Computers. EC*-**11**, 2, 1962, 132–135.

[106] — and RICE H. G.: *Two families of languages related to ALGOL.* Technical Memo 578/000/1, SDC, Santa Monica, Calif., July 1961.

[107] — and ROSE G. F.: *Operations which preserve definability in languages.* SP series, SP-511, SDC, Santa Monica, Calif., October 1961.

[108] GINZBURG A. and YOELI M.: Products of automata and the problem of covering. *Technical Report No. 15*, Jerusalem, Israel, July 1963.

[109] GLASERFELD E.: Some notes on inter-language correspondence. *Methodos*, **12**, 45–47, 1960, 117–129.

[110] GLEASON H. A., Jr.: *An introduction to descriptive linguistics.* New York 1956.

[111] GLEBSKI I. V.: Codificarea cu ajutorul automatelor cu memorie internă finită (překlad z: Problemy kibernetiki, 7, 1962). *Analele romăno-sovietice*, seria *Automatică și Cibernetică*, **1**, 1963, 3–28.

[112] GLUŠKOV V. M.: Ob odnom algoritme sinteza abstraktnych avtomatov. *Ukr. matem. žurn.*, **12**/2, 1960, 147–156.

[113] — Ob odnom metode analiza abstraktnych avtomatov. *Dokl. AN SSSR*, **9**, 1960, 1151–1154.

[114] — Abstraktnyje avtomaty i razvitije svobodnych polugrupp. *Dokl. AN SSSR*, 1961.

[115] — Nekotoryje problemy sinteza cifrovych avtomatov. *Vyčisl. matem. i matem. fiz.* **3**, 1961, 371–411.

[116] — Teoria abstractă a automatelor (překlad z ruštiny). *Analele romăno-sovietice, Seria matematică-fizică*, **2**, 1962, 8–61.

[117] — *Sintez cifrovych avtomatov.* Fizmatgiz, 1962.

[118] GOODMAN N.: Graphs for linguistics. *Structure of language and its mathematical aspects, PSAM*, **12**, 1962, 51–55.

[119] GORN S.: *On the logical design of formal mixed languages.* Moore School of Electrical Engineering, Univ. of Pennsylvania, Philadelphia 1959.

[120] — An axiomatic approach to prefix languages. *Paper, Symp. Symbolic Languages in Data Process.*, Gordon & Breach Rome, March 1962.

[121] — Detection of generative ambiguities in context-free mechanical languages. *Journal of the ACM* **10**/2, 1963, 196–208.

[122] GREENBERG J. H.: The measurement of linguistic diversity. *Language*, **32**, 1956, 109–115.

[123] GOODSTEIN R. L.: *Mathematical Logic.* Leicester Univ. Press, 1957.

[124] GORSKIJ D. P.: Formal'naja logika i jazyk. In: *Filos. vopr. sovremen. formal. logiki*, AN SSSR, Moskva, 1961, 53–90.

[125] GREIBACH S.: *Iterations for the Syntactic Analyzer.* Mathematical Linguistics and Automatic Translation. Rpt. No. NSF-6, Sec. IV, The Computation Laboratory of Harvard Univ., 1961.

[126] GREIBACH SHEILA A.: The Undecidability of the Ambiguity Problem for Minimal Linear Grammars. *Information and Control*, **6**, 1963, 119–125.

[127] – *Formal Systems in Linguistics.* The RAND Corp., Santa Monica, Calif., 1962.

[128] – *Inverses of phrase structure generators.* Harvard Univ., Cambridge, Massachusetts, June 1963.

[129] – The ambiguity problem for minimal linear grammars (vyjde v *Information and Control*).

[130] GREMS M., BAGLEY P.: Logic of english grammar. *Commun. Assoc. Comput. Mach.*, **5**/7, 1962, 398.

[131] GRIGORIEV V. I.: *Ce este analiza distributivă.* Probleme de lingvistică, București, 1960.

[132] GREGORCZYK A.: Fonctions récursives. *Collection de Logique mathématique* **17** (série A). Gauthier Villars, Paris 1961.

[133] GUTENMACHER K. I.: Modelirovanije matematičeskoje. *Bol'šaja sovetskaja enciklopedija*, **28**, 1954.

[134] HARARY F., PAPER H. H.: Toward a general calculus of phonemic distribution, *Language*, 33, 1957, 143–169.

[135] HARPER K. E., HAYS D. G.: The use of machines in the construction of a grammar and computer program for structural analysis. In: *Proceedings of the International Congress on Information Processing*, UNESCO, Paris 1959.

[136] HARRIS Z. S.: *Methods in structural linguistics.* Chicago 1951.

[137] – Discourse analysis. *Language*, **28**, 1962. 1–30.

[138] – Co-occurrence and transformation in linguistic structure. *Language*, 33, 1957, 283–340.

[139] – The transformational model of language structure. *Anthropological Linguistics*, **1**/1, 1959, 27–29.

[140] – *Structural linguistics.* University of Chicago Press. Fifth Impression, 1961.

[141] – *String analysis of sentence structure.* Mouton and Company, The Hague, 1962.

[142] – Computer syntactic analysis. *Transformations and Discourse Analysis Papers No.* 15 *Reports to the National Science Foundation Univ. of Pennsylvania*, Philadelphia.

[143] HARTMANIS J.: Symbolic analysis of a decomposition of Information Processing machines. *Information and Control*, 3, 1960, 154–178.

[144] – On the state assignment problem for sequential machines, I. *IRE Trans. Electron. Computers, EC*-**10**, June 1961, 157–165.

[145] – STEARNS R. E.: Some dangers in state reduction of sequential machines. General Electric Research Lab. Rep. 62-RL-3070E, Schenectady, N. Y., July 1962.

[146] – STEARNS R. E.: Some dangers in state reduction of sequential machines. *Information and Control*, **5**, 1962, 252–260.

[147] HARWOOD F. W.: Axiomatic syntax. The construction and the evaluation of a syntactic calculus. *Language*, **31**/3, 1955, 409–413.

[148] HAYS D. G.: *Grouping and dependency theories.* P-1910, The Rand Corporation, Santa Monica, Calif., 1960.

[149] – Basic principles and technical variations in sentence structure determination. P-1948, Mathemat. division, The Rand Corporation, Santa Monica, Calif. 1960.

[150] HERDAN G.: *Type-Token Mathematics.* Mouton & Co., 's Gravenhage, 1960.

[151] HERMES H.: *Aufzählbarkeit und Berechenbarkeit.* Springer, 1961.

[152] HIRSCHBERG LYDIA, LINCH IRINA: Discussions sur l'hypothèse de projectivité. *Rapport CETIS, Euratom*, **35**, 1961.

[153] HIZ H. I.: The intuitions of grammatical Categories. *Transformations and Discourse Analysis Projects*, No. 29, Univ. of Pennsylvania, Philadelphia.

[154] HJELMSLEV L.: *Prolegomena to a theory of language.* Baltimore 1953.

[155] HOCKETT C. F.: Two models of grammatical description. *Word*, **10**/2–3, 1954, 210–234.

[156] HOLLAND J. H.: Cycles in Logical Nets. *Technical Report*, University of Michigan, August 1959.

[157] HOLT A.W.: Transformations and discourse analysis Projects. A mathematical and applied investigation of tree structures for computer syntactic analysis. June 1963.

[158] HOŘEJŠ J.: Preobrazovanija, opredelenyje konečnymi avtomatami. *Problemy kibernetiki*, **9**, 1963, 23–26.

[159] HUZINO S.: On some applications of the pushdown store technique. *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University*, **15**/1, 1961, 6–20.

[160] – Theory of finite automata. *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University*, Ser. A, **15**/2, 1961.

[161] – A remark on the paper "On some applications of the pushdown store technique". *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University*, Ser. A, **16**/2, 1962, 63–65.

[162] – and YONEYAMA M.: On a proof of Shepherdson's theorem. *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University*. Ser. A, **16**/2, 1962, 88–93.

[163] IRONS E. T.: A syntax directed compiler for ALGOL 60. *Comm. ACM* **4**, 1961, 51–55.

[164] IVANOV V.: Cybernetics and the science of language. *Mod. Language J.* **46**/4, 1962, 158 až 159.

[165] IVERSON K. E.: The description of finite sequential processes. *IBM Research Report*, RC-359, 1960.

[166] JAKOBSON R. (ed.): Structure of language and its mathematical aspects. In: *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, **12**, Amer. Math. Soc. 1961.

[167] JANOVSKAJA S. A.: Matematičeskaja logika i osnovanija matematiki. *Matematika v SSSR za sorok let 1917–1957*, **1**, 116.

[168] JEFFREY R. C.: Some recent simplifications of the theory of finite automata. *Technical Report 219*, Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1959.

[169] JOSHI A. K.: Computation of syntactic structure. *Information retrieval and mach. transl. Part. 2.*, New York–London, Interscience, 1961, 831–840. Discuss. 895–921.

[170] KÁLMAR L.: On the incorporation of the theory of automatical digital computers into the algebraic theory of automata by Moore, Mealy and Glushkov. In: *IFAC Intern. Symp. Theory switching systems and finite automata*, 24. IX.–2. X. 1962 (Abstract of papers), Moscow, 1962, 46–47.

[171] KARACUBA A. A.: Rešenije odnoj zadači iz teorii konečnych avtomatov. *Usp. mat. nauk*, **15**/3 (93), 1960, 157–159.

[172] KASHER A. and LOUVISH D.: *Syntactic Simplification.* (Applied Logic Branch Technical Report No. 14.) The Hebrew University of Jerusalem, Israel, August 1963.

[173] KAUFMAN B.: Iterative Computation of String Nesting. *Transformations and Discourse Analysis Projects*, No. 20, Univ. of Pennsylvania, Philadelphia.

[174] KIRSCH R. A. and RANKIN B. K.: Modified simple phrase structure grammars for grammatical induction. (National Bureau of Standards, *Technical Note 193.* Issued July 10, 1963), May 1, 1963.

[175] KLEENE S. C.: Representation of events in nerve nets and finite automata. In: *Automata Studies* (C. E. Shannon and J. McCarthy, eds.), Princeton Univ. Press, 1956.

[176] KLEIN S. and SIMMONS R. F.: A computational Approach to Grammatical Coding of English Words. *Journ. Assoc. Comput. Machinery*, July **10**/3, 1963, 334–347.

[177] KOBRINSKIJ N. E., TRACHTENBROT B. A.: *Vvedenije v teoriju konečnych avtomatov*. Gosud. izd. Fiz.-Mat. Lit., Moskva 1962.
[178] KOLMOGOROV A. N.: Modelirovanije. *Bol'šaja sovetskaja Enciklopedija*, **28**, 1954.
[179] KOPTILOV V. V.: O formal'nom razgraničenii omonimij i polisemij. In: *Prikladn. lingvistika i mašin. perev.*, Kijevsk. Univ., 1962, 76–78.
[180] KOUTSOUDAS A.: Defining linear context to resolve lexical ambiguity. *Language and Speech*, 2/4, 1959, 211–235.
[181] KOZMIDIADI V. A., CHERNIAVSKII V. C.: On the ordering of the set of automata. *Voprosy Teorii Mat. Mašin*. 2, Fizmatgiz, Moscow, 1962, 34–51.
[182] KUNO S., OETTINGER A. G.: Multiple-path Syntactic Analyzer. In: *Proc. of IFIP Congress*, Munich 1962.
[183] — — *Multiple-path Syntactic Analyzer*. Math. Linguistics and Automatic Translation, Rpt. No. NFS-8, Sec. I, The Computation Laboratory of Harvard Univ., 1963.
[184] KULAGINA O. S.: Ob odnom sposobe opredelenija grammatičeskich ponjatij na baze teorii množestv. *Problemy kibernetiki*, **1**, 1958, 203–214.
[185] KURYŁOWICZ J.: La notion de l'isomorphisme. *Travaux du Cercle linguistique de Copenhague*, **5**, Recherches Structurales 1949, 48–60.
[186] KUZNETSOV O. P.: On a certain class of regular events. In: *IFAC Intern. Symp. Theory switching systems and finite automata*. 24. IX.–2. X. 1962 (Abstract of papers), Moscow 1962, 58–59.
[187] LAMB S. M.: Segmentation. In: *Proceedings of the National Symposium on Machine Translation*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1961, 335–342.
[188] LASCELLES MONICA: A theory in distributional syntax: classes and constants. *Language and Speech*, 3/1, 1960, 50–60.
[189] LAMB S. M.: *On the Nature of Sememe*. 1961.
[190] — *Outline of Stratificational Grammar*. Berkeley, University of California, 1962.
[191] LAMBEK J.: The mathematics of sentence structure. *American Mathematical Monthly*, **65**, 1958, 154–170.
[192] — Contributions to a mathematical analysis of the English verb-phrase. *Journal of the Canadian Linguistic Association*, **5**, 1959, 83–89.
[193] — On the calculus of syntactic types. Structure of language and its mathematical aspects. *Twelfth Symposium in Applied Mathematics (R. Jakobson, ed.) Amer. Math. Soc.*, 1961, 166–178.
[194] LANDWEBER P. S.: Three Theorems on Phrase Structure Grammars of Type 1. *Information and Control*, **6**, 1963, 131–136.
[195] LAZAREV V. G., PYLL E. I.: Reduction of member of internal states in certain classes of finite automata. In: *IFAC Intern. Symp. Theory switching systems and finite automata*. 24. IX.–2. X. 1962 (Abstract of papers), Moscow 1962, 60–61.
[196] LECERF Y.: Programme des conflits, modèle de conflits. *La traduction automatique*, **1**/4, 5, 1960.
[197] — Une représentation algébrique de la structure des phrases dans diverses langues naturelles. *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, **252**, 2, 1961, 232–234.
[198] — IHM P.: Eléments pour une grammaire générale des langues projectives. *Rapport GRISA, Euratom*, **1**, 1960, 1–19.
[199] — — Zu einer Theorie der G. Ordnungen. *Rapport CETIS, Euratom*, **2**, 1960.
[200] LEE C. Y.: Categorizing automata by W-machine programs. *Journ. Assoc. Comput. Mach.*, **8**, 1961, 384–399.
[201] LEROY A.: Algol. *Revue française du traitement de l'information*, **1**, 1963.
[202] LETIČEVSKIJ A. A.: O sinteze konečnych avtomatov. *Dokl. AN SSSR*, **2**, 1961, 139–141.
[203] — Uslovija polnoty dlja konečnych avtomatov. *Vyčisl. matem. i matem. fiz.*, **4**, 1961.

[204] LETICHEVSKY A. A.: Alphabetic mappings and finite automata. In: *IFAC. Intern. Symp. Theory switching systems and finite automata*. 24. IX. – 2. X. 1962 (Abstracts of papers), Moscow, 1962, 61.
[205] LONGACRE R. E.: String constituent analysis. *Language*, **36**/1, 63–88.
[206] MANDELBROT B.: *An informational theory of the statistical structure of language*. Communication theory, London 1953.
[207] — On recurrent noise limiting coding. In: *Proc. Symposium on Information Networks*, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1954, 205–221.
[208] — Structure formelle des textes et communications. *Word*, **10**/1, 1954.
[209] MARCUS S., VASILIU EM.: Mathématiques et phonologie. Théorie des graphes et consonantisme de la langue roumaine. I. *Revue de mathématiques pures et appliquées*, **5**/2, 1960, 319–340.
[210] — — Mathématiques et phonologie. Théorie des graphes et consonantisme de la langue roumaine II. *Revue de mathématiques pures et appliquées*, **5**/3–4, 1960, 681–704.
[211] — Le genre grammatical et son modèle logique. *Cahiers de linguistique théorique et appliquée*, **1**, 1962, 103–122.
[212] — Asupra unui model logic al părţii de vorbire. *Studii şi cercetări matematice*, **13**/1, 1962, 37–62.
[213] — Un criteriu contextual de clasificare a cuvintelor. *Studii şi cercetări lingvistice*, **13**/2, 1962, 177–189.
[214] — Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire. I. *Revue de mathématiques pures et appliquées*, **7**/1, 1962, 91–107.
[215] — Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire. II. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **8**/3–4, 1962, 323–329.
[216] — Ob odnoj logičeskoj modeli elementarnoj grammatičeskoj kategorii. III. *Revue de mathématiques pures et appliquées* 7/4, 1962, 683–691.
[217] — Aspectul logic al opoziţiilor lingvistice. II. Opoziţii ordonate, paradigme, morfeme şi cvasimorfeme. *Studii şi cercetări matematice*, **13**/4, 1962, 539–551.
[218] — A synchronic analysis of the grammatical gender. *Revue de linguistique*, **8**/1, 1963, 99–111.
[219] — Automates finis, progressions arithmétiques et grammaires à un nombre fini d'états. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **256**/17, 1963, 3571–3574.
[220] — Langues complètement adéquates et langues régulières. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **10**/1, 1964, 7–13.
[221] — Logičeskij aspekt lingvističeskich oppozicij. In: *Problemy strukturnoj lingvistiki*, **2**, Moskva 1963, 47–74.
[222] — Modelarea matematică a limbii. *Limba română*, **5**, 1963, 478–492.
[223] — Structura limbii şi aspectele ei matematice. (Simpozionul de matematică aplicată). *Studii şi cercetări lingvistice*, **14**/2, 1963, 265–271.
[224] — Structure of language and its mathematical aspects. In: *Proceedings of the Symposium in applied mathematics*, **12**. Amer. Math. Soc., 1961. Recenze v ruštině in: *Revue de math. pures et appl.*, **8**/3, 1963, 497–502.
[225] — Aspecte ale modelării matematice în lingvistică. *Studii şi cercetări lingvistice*, **14**/4, 1963, 487–501.
[226] — Typologie des langues et modèles logiques. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **14**/3–4, 1963, 269–281.
[227] — Modèles mathématiques pour la catégorie grammaticale du cas. *Revue de mathématiques pures et appliquées*, **8**/4, 1963, 585–610.
[228] — *Lingvistică matematică. Modele matematice în lingvistică*. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti 1963.

[229] — Sur les grammaires à un nombre fini d'états. *Cahiers de linguistique théorique et appliquée*, **2**, 1964, 147—164.

[230] — VASILIU EM.: Matematică şi fonologie. Teoria grafelor şi consonantismul limbii române. *Fonetică şi Dialectologie*, **3**, 1962, 15—55.

[231] MARKOV A. A.: *Teoria Algoritmilor* (překlad z ruštiny). Biblioteca Analelor Româno-Sovietice, 1963.

[232] MATTHEWS G. H.: Analysis by synthesis of natural languages. In: *Proceedings of 1961 International Conference on Machine Translation of Languages and Applied Language Analysis*, **2**, Her Majesty's Stationery Office, London, 532—540.

[233] — Discontinuity and Asymmetry in Phrase Structure Grammars. *Information and Control*, **6**, 1963, 137—146.

[234] McCARTHY J.: The inversion of functions defined by Turing Machines. In: *Automata Studies* (edited by C. E. Shannon and J. McCarthy), Princeton University Press, 1956, 177—182.

[235] McCULLOCH W. S., PITTS E.: A logical calculus of the ideas imminent in nervous activity. *Bull. Math. Biophys.*, **5**, 1943, 115—133.

[236] MEALY G.: A method for synthesizing sequential circuits. *Bell System Tech. J.*, **34**, 1955, 1045—1079.

[237] MEDVEDEV Y. T.: On a class of events representable in a finite automaton. *Report No. 34 to 73*, Lincoln Laboratories, Lexington, Mass., 1958.

[238] MEL'ČUK I. A.: O „vnutrennej fleksii" v indoevropejskich i semitskich jazykach. *Voprosy jazykoznanija* **4**, 1963, 27—40.

[239] MEYERS L. F., WANG W. S.-Y.: Tree representations in Linguistics. (The Ohio State Univ., Research Foundation, 1314 Kinnear Road Columbus 12, Ohio Project on Linguistic Analysis, *Report No.* **3**. National Science Foundation).

[240] MICHEA R.: Notes et réflexions sur le problème des polysémies dans la traduction automatique. *Traduction automatique*, **2**, 1961, 14—16.

[241] MINSKY M. L.: Some universal elements for finite automata. In: *Automata Studies* (edited by C. E. Shannon and J. McCarthy) Princeton University Press, 1956, 117—128.

[242] — Recursive unsolvability of Post's problem of tag. *Annals of Math.*, **74**, 1961, 437—455.

[243] MINSKY M. L.: Steps toward artificial intelligence. In: *Proceedings of the IRE*, **49**, 1, 1961, 8—30.

[244] MITCHELL R. P.: Properties of a class of categorial grammars. In: *Preprints of paper for the Ninth International Congress of Linguists*, Cambridge, Mass., August 1962, 68.

[245] MIZUTANI S.: On algebra of the junction of linguistic elements. In: *Preprints of papers for the Ninth International Congress of Linguists*, Cambridge, Mass., August 1962, 70.

[246] MOISIL GR. C.: *Teoria algebrică a mecanismelor automate*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.

[247] MOLOŠNAJA T. N.: O ponjatii grammatičeskoj konfiguracii. *Strukturno-tipologičeskije issledovanija*, Moskva 1963, 46—59.

[248] MOORE E. F.: Gedanken-experiments of sequential machines. In: *Automata Studies*, Princeton. Princeton University Press, 1956, 129—156.

[249] MOUNIN G.: La syntagmatique de R. F. Mikus. *Traduction automatique*, **3**/2, 1962, 44—46.

[250] MYHILL J.: Finite automata and the representation of events. *WADC Technical Report 57—624*, 1957, 112—137.

[251] — Linear Bounded Automata. *Wright Air Development Division, Technical Note*, 1960, 60—165.

[252] NAUGHTON R. MC.: The theory of automata. Chapter in: *Advances in Computers*, **2**, Academic Press, New York, 1961.

[253] — YAMADA H.: Regular Expressions and State Diagrams. Department of Electrical Engineering, Digital Systems Laboratory, *Technical Report* **15**, March 1962.

[254] NAUR P.: Report on the algorithmic language ALGOL 60. *Comm. of the ACM*, **3**/5, 1960, 299—314.

[255] NEEDHAM R. M.: *The theory of clumps* II, M. L. 139. The Cambridge Language Research Unit.

[256] NERODE A.: Linear automaton transformations. In: *Proceedings of the Amer. Math. Soc.* **9**, 1958, 541—544.

[257] NETHERWOOD D. S.: Minimal sequential machines. *IRE Transactions Electr. Comp.*, *EC*-**8**, 3, 1959, 339—345.

[258] NIKOLAEVA T. M.: Soviet developments in machine translation: Russian sentence analysis. *Mech. Translat.*, **5**/2, 1958, 51—59.

[259] OETTINGER A. G.: Linguistics and mathematics. In: *Studies presented to Joshua Whatmough on His Sixtieth Birthday*, 1957, 179—186.

[260] — Automatic Syntactic Analysis and the Pushdown Store. *PSAM* **12**, Amer. Math. Soc., 1961, 104—129.

[261] — The geometry of symbols. *Annals of the Computation Laboratory of Harvard University*, **31**, Harvard Univ. Press, 1962.

[262] ONICESCU O.: *Strategia jocurilor*. Ed. Academiei R.P.R. Bucureşti, 1961.

[263] OTT G. H., FEINSTEIN N. H.: Design of Sequential Machines from their Regular Expressions. *JACM*, **8**, 1961, 585.

[264] OYSTEIN O.: Theory of graphs. American Mathematical Society, *Colloquium publications*, **38**, 1962.

[265] PARIKH R. J.: Language generating devices. *Quarterly Progress Report No. 60. Res. Lab. of Electronics, M. I. T.*, 1961, 199—212.

[266] PARKER-RHODES A. F.: *The lattice properties of syntactic relations in an open language*. Cambridge, England, 1961.

[267] — and Members of the Cambridge Language Research Unit (edited by K. Sparck Jones): *A lattice Model of syntactic description*. July, 1961.

[268] — WOOD MC KONNON R., KAY M., BRATLEY P.: *The Cambridge Language Research Unit Computer Program for Syntactic Analysis*. Cambridge Language Research Unit. Cambridge, England, 1961.

[269] — MASTERMAN M.: *A new Model of Syntactic Description*. Cambridge Language Research Unit., M. L. 142, 1961.

[270] — MASTERMAN M.: *The derivation of syntactic relations from a lattice model*. Cambridge Language Research Unit. Cambridge, England, 1961.

[271] — *Contributions to the theory of clumps*. The Cambridge Language Research Unit., M. L. 138. Cambridge, England, 1961.

[272] — NEEDHAM R. M.: *The theory of clumps. A new concept of classification and selection*. Cambridge Language Research Unit. M. L. 126. Cambridge, England, 1961.

[273] PAULL M. C., UNGER S. H.: Minimizing the number of states in incompletely specified sequential switching functions. *IRE Transactions on Electronic Computers*, *EC*-**8**, September 1959, 356—367.

[274] PAZ AZARIA: Homomorphisms between finite automata. *Bulletin of the Research Council of Israel*, **10** *F*/3, 1962, 93—99.

[275] PERLES M., RABIN M. O., SHAMIR E.: The Theory of definite automata. *Applied Logic Branch*, Tech. Report No. 6, The Hebrew University, Jerusalem, Israel.

[276] PIKE K. L.: Taxemes and immediate constituents. *Language*, **19**/2, 1943.

[277] — Grammemic Theory. *General Linguistics*, **2**/2, 1957, 35—41.

[278] — Dimensions of grammatical constructions. *Language*, **38**, Part. 1, 1962, 221—244.

[279] POST E. L.: A variant of a recursively unsolvable problem. *Bull. A. M. S.*, **53**, 1946, 264—268.

[280] Postal P. M.: Constituent structure, a Study of contemporary models of syntactic description. In: *Katz J. and Fodor J. (eds.), Readings in the Philosophy of Language*, Prentice-Hall (Spring 1963).

[281] Quine W. V.: Logic as a source of syntactical insights. Structure of Language and its mathematical aspects, *P. S. A. M.* **12**, Amer. Math. Soc. 1961, 1–5.

[282] Rabin M. O.: Two-way finite automata. *Proc. Summer Institute of Symbolic Logic*, Cornell, 1957, 366–369.

[283] – Scott D.: Finite automata and their decision problems. *I. B. M. J. Res. Dev.* **3**/2, 1959, 114–125.

[284] Raney G. N.: Sequential functions. *Journ. Ass. Comp. Mach.* **5**/2, 1958, 177–180.

[285] Ray Punya Sloka: The logic of linguistics. *Methodos* **13**/51–52, 1961, 239–254.

[286] Redko V. N.: On commutative automata. In: *IFAC, International Symposium of Theory of switching systems and finite automata*. 24. IX.–2. X. 1962 (Abstract of papers), Moscow, 1962, 97.

[287] Revzin I. I.: *Modeli jazyka*. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva 1962.

[288] – O nekotorych voprosach distribucionnogo analiza i jego dal'nejšej formalizacii. In: *Problemy strukturnoj lingvistiki*, Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva 1962, 13–21.

[289] – O ponjatijach odnorodnogo jazyka i jazyka s polnoj transformaciej i vozmožnosti ich primenenija dlja strukturnoj tipologii. In: *Strukturno-tipologičeskoje issledovanija*, **1**, 1962, 19–24.

[290] – Osnovnyje jedinicy sintaksičeskogo analiza i ustanovlenije otnošenij meždu nimi. In: *Strukturno-tipologičeskije issledovanija*, 1962, 119–123.

[291] – Ob odnom podchode k modeljam distributivnogo fonologičeskogo analiza. In: *Problemy strukturnoj lingvistiki*, Moskva 1962, 80–85.

[292] – Ob odnoj sintaktičeskoj modeli. *Voprosy jazykoznanija*, **2**, 1963, 148–150.

[293] Riordan J.: *An introduction to combinatorial analysis*. New York – John Wiley & Sons, Inc. London – Chapman & Hall, Limited, 1958.

[294] Robins R. H.: *In defense of "Word-and-Paradigm"*. Transactions of the Philological Society, 1959.

[295] Robinson J.: General recursive functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1**, 1950, 703–718.

[296] Robinson R. M.: Primitive recursive functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**, 1947, 925–942.

[297] Rogers H.: The present theory of Turing machine computability. *Journal of the Soc. for Ind. and App. Math.*, **7**/1, 1959.

[298] Rosenblueth A., Wiener N.: The Role of models in science. In: *Philosophy of Science*, **12**/4, 1945, 317–320.

[299] Ross A. W.: *An introduction to cybernetics*. London, Chapman & Hall Ltd., 1956.

[300] Salton G.: Manipulation of trees in information retrieval. *Commun. Assoc. Comput. Mach.*, **5**, 2, 1962, 103–114.

[301] – Thorpe R. W.: An approach to the segmentation problem in speech analysis and language translation paper. In: *First International Conf. Machine Translation of Languages and Applied Language Analysis*. Teddington, England, Sept. 1961.

[302] Samelson K., Bauer F. L.: Sequential formula translation. *Comm. of the ACM*, **3**/2, 1960, 76–83.

[303] Scheinberg S.: Note on the Boolean properties of context-free languages. *Information and Control*, **3**, 1960, 372–375.

[304] Schützenberger M. P.: On an application of semi-group methods to some problems in coding. *IRE Trans. on Inform. Theory IT-2*, 1956, 47–60.

[305] – *Un problème de la théorie des automates*. Séminaire Dubreil-Pisot, Paris, Décembre 1959.

[306] – A Remark on finite transducers. *Information and Control*, **4**, 1961, 185–196.

[307] – On the definition of a family of automata. *Information and Control*, **4**, 1961, 245–270.

[308] – Some remarks on Chomsky's context-free languages. *Quarterly Progress Report No. 68*, Research Laboratory of Electronics, M. I. T., October 1961.

[309] – A probleme in the theory of context free languages. In: *Preprints of papers for the Ninth International Congress of linguists*, Cambridge, Mass., August 1962, 96.

[310] – *Certain families of elementary automata*. Symp. on mathematical theory of automata. Polytechnic Institute of Brooklyn 1962.

[311] – Finite counting automata. *Information and Control*, **5**, 1962, 91–107.

[312] – *On a family of formal power series*. Mimeographed, 1962.

[313] – On a theorem of R. Jungen. In: *Proceedings of the Amer. Math. Soc.* **13**/6, 1962, 885–890.

[314] – Chomsky N.: The algebraic theory of context-free languages. *Computer programming and formal systems*. Amsterdam: North-Holland, 1963, 118–161.

[315] Seshu S.: Mathematical models for sequential machines. *IRE Nat. Convent. Rec.*, **7**/2, 1959, 4–16.

[316] Shain B. M.: On some applications of semi-group representation theory to theory of automata. *IFAC. International Symposium of Theory of switching systems and finite automata*. 24. IX.–2. X. 1962 (Abstract of papers), Moscow, 1962, 106–108.

[317] Shamir E.: On sequential languages. *Technical Report No.* **7**. Office of Naval Research, Jerusalem, Israel 1961.

[318] – A remark on discovery algorithms for grammars. *Information and Control*, **5**, 1962, 246–251.

[319] Shannon C. E.: A symbolic analysis of relay and switching circuits. *Trans. AIEE*, **57**, 1938, 713–723.

[320] – A mathematical theory of communication. *Bell System Tech. J.*, **27**, 1948, 379–423.

[321] – A universal Turing machine with two internal states. In: *Automata Studies* (edited by C. E. Shannon and J. McCarthy), Princeton University Press, 1956, 157–166.

[322] – McCarthy J., ed.: *Automata Studies*. Princeton University Press, 1956.

[323] – Weaver W.: *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, Urbana, 1949.

[324] Shepherdson J. C.: The reduction of two-way automata to one-way automata. *IBM Journal Res. Devel.*, **3**/2, 1959, 198–200.

[325] Sherry M. E.: *Syntactic analysis in automatic translation*. Doctoral Thesis, Harvard University, 1960.

[326] Simon J. M.: A note on memory aspects of sequence transducers. *IRE Transactions on Circuit Theory, CT-6*/1, 1959, 26–29.

[327] Skornjakov L. A.: Nervnyje sistemy. *Usp. matem. nauk*, **13**/3, 3 (81), 1958, 233–234.

[328] – Ob odnom klasse avtomatov (nervnyje sistemy). *Problemy kibernetiki*, **4**, 1960, 23–25.

[329] Solomonoff R.: A new method for discovering the grammar of phrase structure languages. *Information Processing*, 1960, 285–290. Unesco Paris; R. Oldenburg, München; Butterworths, London.

[330] – *A formal theory of inductive inference*. Cambridge, Mass., Zator Company, May 1962, 76 p. Report No. V-143.

[331] Somers H. H.: *Analyse mathématique du langage. Lois générales et mesures statistiques*. Louvain-Paris, Beatric-Nauwelaerts, 1959.

[332] Sorkin I. I.: Algoritmičeskaja razrešimost' problemy izomorfizma dlja avtomatov. *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **137**, 1961, 804–806.

[333] – Teorija opredeljajuščich sootnošenij dlja avtomatov. *Problemy kibernetiki*, **9**, 1963, 45–69.

[334] Spivak M. A.: Synthesis of automaton with least number of states and given response. *IFAC. International Symposium of Theory of switching systems and finite automata.* 24. IX.–2. X. 1962 (Abstract of papers), Moscow 1962, 114–115.

[335] Šaumjan S. K.: Problemele lingvistice ale ciberneticii şi lingvistica structurală (překlad z ruštiny). *Probleme de filozofie*, 9, 1960.

[336] — *Problemy teoretičeskoj fonologii.* Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva 1962.

[337] — Teoretičeskije osnovy transformacionnoj grammatiki. *Novoje v lingvistike*, 2, Izd. Inostr. Lit. Moskva 1962, 391–411.

[338] — Soboleva P. A.: *Applikativnaja porождajuščaja model' i isčislenije transformacii v russkom jazyke.* Izd. Akad. Nauk, Moskva 1963.

[339] Tamari D., Ginzburg A.: Representation of multiplicative systems by families of binary relations (I). *Journal London Math. Soc.*, 37, 1962, 410–423.

[340] Tesnière L.: *Eléments de syntaxe structurale.* C. Klincksieck, Paris 1959.

[341] Trachtenbrot B. A.: Sintez logičeskich setej, operatory kotorych opisany sredstvami isčislenija odnomestnych predikatov. *Dokl. AN SSSR*, **118**, 4, 1958.

[342] Trost E.: *Primzahlen.* Verlag Birkhauser, Basel-Stuttgart, 1954.

[343] Turing A. M.: Computability and λ-definability, *J. Symb. Logic.* **2**, 1937, 153–163.

[344] — On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. In: *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, **42**, 1936–1937, 230–265; A correction, *ibid.* **43**, 1937, 544–546.

[345] Cejtin G. C.: K voprosu o postrojenii matematičeskich modelej jazyka. *Doklady na Konferencii po obrabotke informacij, mašinnomu perevodu i avtomatičeskomu čteniju teksta*, 3, Moskva 1961.

[346] Uemov A. I.: Analogie şi model. *Probleme de filozofie*, **3**, 1962, 163–172.

[347] Ungeheuer G.: Das logische Fundament binärer Phonemklassifikationen. *Studia Linguistica*, 1959, 69–97.

[348] Uspenskij B. A.: *Principy strukturnoj tipologii.* Izd. Mosk. Gos. Univ., 1962.

[349] Uspenskij B. A., Uspenskij V. A.: Sintaksičeskije struktury v anglijskom jazyke, izučajemyje elektronnoj vyčislitel'noj mašinoj (Bjuro standartov SŠA). In: *Maš. perev. i prikl. lingvistika* **2**/9, Moskva 1959, 70–73.

[350] Uspenskij V. A.: K opredeleniju časti reči v teoretiko-množestvennoj sisteme jazyka. *Bjulleteň ob'edinenija po problemam mašinnogo perevoda*, **5**, 1957, 22–26.

[351] — K opredeleniju padeža po A. N. Kolmogorovu. *Bjulleteň ob'edinenija po problemam mašinnogo perevoda*, **5**, 1957, 11–18.

[352] Vasiliu E.: Niveluri lingvistice şi structuri transformaţionale. *Studii şi cercetări lingvistice*, **1**, 1962, 15–21.

[353] — Gramaticile generative. *Limba română*, **3**, 1963, 219–231.

[354] Wells R.: Immediate constituents. *Language*, **23**/2, 1947, 81–117.

[355] Whitfield F. J.: Criteria for a model of language. In: *Proceedings of the 1960 International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Stanford, California, 1962, 577–583.

[356] Woodward J. K.: Contextual structure analysis. *Data acquisit. and process. biol. and med.* Oxford–London–New York–Paris, Pergamon Press, 1962, 45–50.

[357] Wundheiler L., Wundheiler A.: *Some logical concepts for syntax.* Mach. Translat. Languages, 2nd print. S 1, Technol. Press. Mass. Inst.-Techn. New York, John Willey and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd. 1957, 194–207.

[358] Yngve V. H.: A model and an hypothesis for language structure. In: *Proceedings of the Amer. Philos. Soc.*, **104**/5, 1960, 446–466.

[359] — The depth hypothesis. *Twelfth Symposium in Applied Mathematics* (*R. Jakobson, ed.*), Providence, R. I., American Mathematical Society, 1961, 130–138.

[360] — Random generation of English Sentences. In: *Proc.* 1961 *Intern. Congr. Machine Translation of Languages and Appl. Language Analysis*, Teddington, England. National Physical Laboratory.

[361] Yoeli M.: Cascade-Parallel Decomposition of Sequential Machines. Vyjde v: *IRE Transactions on Electronic Computers.*

[362] Yoeli M.: The Cascade Decomposition of Sequential Machines. *IRE Trans. on Electronic Computers, EC-10*, December 1961, 587–592.

[363] Yoeli M.: Decompositions of finite automata. *Technical Report* No. 10. Jerusalem, Israel, March 1963.

[364] — Ginzburg A.: *On homomorphic images of transition graphs.* Technion, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel; Technical Report No. 11. Jerusalem, Israel, April, 1963.

[365] Zarechnak M.: Three levels of linguistic analysis in machine translation. *J. Assoc. Comput. Machinery*, **6**/1, 1959, 24–32.

[366] Zarovnyj V. P.: *Avtomatika i telemechanika.* **5**, 1963, 245.

[367] — O predstavlenii funkcii perechodov mašiny associativnymi operacijami. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **150**/2, 1963, 245–247.

[368] Ziff P.: *Semantic analysis.* Ithaca, New York, Cornell Univ. Press, 1960.

[369] Zinkin N. I.: Four communicative systems and four languages. *Word*, **18**/1–2, 1962, 143–172.

[370] Zinoviev A. A.: Despre lingvistica matematică. *Probleme de filozofie.* **9**, 1959.

[371] Brooker R. A., Morris D.: A general translation program for phrase structure languages. *Journ. Assoc. Comput. Machinery*, **9**/1, 1962.

[372] Corbé M., Tabory R.: Introduction à une syntaxe automatique de l'anglais. Méthode des fragments. 1e part. *Traduction automatique*, **2**/4, 1961, 92–99.

[373] Elgot and Rutledge: Operations on finite automata. In: *Proc. Second Ann. Symp. Switching Circuit Theory and Logical Design.* Detroit, 1961, 129–132.

[374] Fleck A. C.: Isomorphism groups of automata. *Journ. Assoc. Computing Machinery*, **9**, 1962, 469–476.

[375] Freudenthal H.: Analyse mathématique de certaines structures linguistiques. *Folia Biotheoretica*, 5, Leiden 1960, 81–95.

[376] Genuys F.: Commentaire sur le langage ALGOL. *Chiffres*, Mars 1962.

[377] Glennie A. E.: *On the syntax machine and the construction of a universal compiler.* Carnegie Institute of Technology, 1960.

[378] Grems M., Bagley P.: Logic of english grammar. *Commun. Assoc. Comput. Mach.*, **5**/7, 1962, 398.

[379] Ingerman Peter Z.: A translation technique for languages, whose syntax is expressible in extended Backus Normal Form. Theory of languages-syntactical structure and meta languages. *Symbolic Languages in Data Processing* (*Proc. Sympos. Internat. Comput. Centre*, Rome 1962), 1–110, Gordon and Breach, New York 1962, 23–64.

[380] Ion I. D.: O svjazi meždu teorijej algoritmov i abstraktnoj teorijej avtomatov. *Revue de mathématiques pures et appliquées.* **8**/4, 1963, 673–682.

[381] Neumann J. von: *The general and logical theory of automata.* Massachusetts Institute of Technology, 1948.

[382] Oehmke Robert H.: On the structure of an Automaton and its input semigroup. *Journal of the Association for Computing Machinery*, **10**, 4, 1963, 521–525.

[383] Onicescu O., Guiaşu S.: *Automate aleatoare abstracte finite.* Bucureşti 1963.

[384] Paul M.: A general processor for certain formal languages. Theory of languages-syntactical structure and meta languages. *Symbolic Languages in Data Processing* (*Proc. Sympos. Internat. Comput. Centre*, Rome 1962). Gordon and Breach, New York 1962, 65–74.

[385] Rabin M. O.: Probabilistic Automata. *Information and Control*, **6**/3, 1963, 230–245.

[386] — Hao Wang: Words in the History of a Turing Machine with a Fixed Input. *Journ. Assoc. Comput. Machinery*, **10**/4, 1963, 526–527.

[387] Riguet J.: Algorithmes de Markov et théorie des machines. *Comptes-rendus, Académie des sciences, Paris*, **242**, 1956, 435–437.

[388] — Programmation et théorie des catégories. Theory of languages-syntactical structure and meta languages. *Symbolic Languages in Data Processing* (*Proc. Sympos. Internat. Comput. Centre*, Rome 1962), 1–110. Gordon and Breach, New York 1962, 83–98.

[389] Ritchie R. W.: Finite automata and the set of squares. *Journal Assoc. Comput. Machinery* **10**/4, 1963, 528–531.

[390] Weeg G. P.: The structure of an automaton and its operation-preserving transformation group. *Journ. Assoc. Comput. Machinery*, **9**, 1962, 345–349.

Rejstřík

Tento abecedně uspořádaný rejstřík (několikaslovné termíny jsou řazeny podle podstatných jmen, písmena řecké abecedy a matematické symboly jsou řazeny až za písmena abecedy latinské) obsahuje všechny lingvistické, matematické a logické termíny, které jsou v knize definovány nebo blíže vyloženy nebo na něž je odkázáno od jiných definovaných nebo blíže vyložených termínů. Číselný údaj, který doprovází každý termín, odkazuje na místo v knize, kde je termín definován nebo vyložen; první číslo označuje římskými číslicemi příslušný oddíl knihy, druhé arabskými číslicemi kapitolu daného oddílu, případně — u oddílu VIII — jeho část uvedenou tímto číslem. Je-li určitý termín v knize definován nebo vyložen několikrát, je odkázáno na všechna příslušná místa.

Obsah

ČÁST I. ANALYTICKÉ MODELY

Oddíl I. Opozice a distribuce

Oddíl II. Fonematický rozbor

Oddíl III. Morfematický rozbor

Oddíl IV. Morfologická homonymie a gramatické kategorie

Oddíl V. Modely založené na rozkladech a na relaci dominace

ČÁST II. GENERATIVNÍ MODELY

Oddíl VI. Gramatiky, konečné automaty a Kleeneho události

Oddíl VII. Gramatiky s konečným počtem stavů a přirozené jazyky

Oddíl VIII. Vysvětlivky, další problémy a doplňky ke studiu gramatik s konečným počtem stavů