Vybrané kapitoly z matematiky pro lingvisty

Martin Osovský

Predikátová logika

- Formule predikátové logiky
  - Skládají se z
    - Kvantifikátorů a logických výrazů – význam je dán zvolenou logikou
    - Predikátových a funkčních symbol (jazyk)– význam je dán interpretací
    - Proměnných – význam je dán ohodnocením
  - Otevřené – různá ohodnocení proměnných, různé pravdivostní hodnoty

$$(\forall x)P(x,y)$$

  - Uzavřené (sentence) – pravdivost závisí jen na interpretaci predikátových a funkčních symbolů

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y)$$

Axiomatický systém

- Popsat nějaký objekt zájmu pomocí
  - malé množiny sentencí – teorie, skládá se z axiomů
  - a jejich důsledků – věty
  - pomocí malého množství základních pojmů
  - a odvozených pojmů – definice
- Ideál
  - úplnost – každá vlastnost vyplývá z axiomů a je popsatelná základními pojmy
  - bezespornost – axiomy dávají smysl (skutečně popisují náš nebo alespoň nějaký objekt(model), sporné axiomy nepopisují nic)
  - spornost – sémantická – teorie nemá model
    – syntaktická – z teorie lze odvodit formuli i její negaci

Axiomatické systémy

- dva přístupy
  - mám předem objekt a hledám jeho axiomatizaci (vždycky v případě jazyka, čísla, geometrie apod.)
  - mám systém axiomů a zkoumám vlastnosti jeho modelů
- první vede k modelu, který typicky nemá všechny vlastnosti (neúplnost) – viz eukleidova geometrie, peanova aritmetika, teorie množin

Příklad – jednoduché algebry

- základní pojmy – predikát rovnosti, funkční symbol představující operaci ($=, .$)
- příklad formule takového jazyka

$$(\forall x)(\forall y)x.y = y.x$$

- objektem zájmu je soubor prvků (odlišitelných pomocí $=$) a předpis, který interpretuje výrazy jako $x.y$ (tj. dvěm prvkům přiřadí jiný)

Příklad – přirozená čísla

- **prvky jsou čísla**
- **. je například násobení, tj. $x.y$ je x krát y**
  - **binární operace – ze dvou čísel dělá jedno**
- **co čísla? nejsou ani proměnné ani predikátové symboly**
  - **jsou to nulární operace – nepotřebují žádné číslo a udělají číslo**
  - **takže nulární symboly v dané interpretaci představují číslo**
  - **základní jsou dány konvencí (0,1,2,3,...; I, V, X, L, C, M)**
  - **odvozené mohou být definovány pomocí operací (číselné soustavy, pravidla pro tvoření římských číslic – 120, IX)**

Přirozená čísla

- ne každá operace je operací i v logickém (algebraickém) smyslu
  - – není operace, protože ne každým dvěma číslům přiřadí přirozené číslo
- příklady formulí platných pro přirozená čísla
  - $(\forall x) x.0 = 0$
  - $(\forall x)(\forall y) x.y = y.x$
- z proměnných, prvků a čísel tvoříme výrazy (termy), které odpovídají číslům
  - (2.3).5 = 30 (= 6.5)

Jednoduché algebry

- jazyk : jeden binární symbol = (ekvacionální logika)
- Axiomy určují, které termy jsou stejné (tj. platí mezi nimi predikát =).

1. axiomy žádné
   - obecně neplatí ani $(x.y).z = x.(y.z)$
   - přílad : celá čísla a odčítání
   - grupoid
2. axiom $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x.y).z = x.(y.z)$ - asociativita
   - hodnoty výsledků závisí jen na tom, které prvky a v jakém pořadí se ve výrazu vyskytnou – všechny termy, které se liší jen závorkami dávají stejný prvek

Jednoduché algebry

– pologrupa
– příklad : přirozená čísla a sčítání
– příklad : formální jazyky
  - abeceda Σ – malý konečný soubor písmen (např. $\Sigma = \{a, b\}$)
  - operace . – konkatenace, písmena napíšeme za sebou $a.b = ab$, prvky jsou písmena a řetězce utvořené z písmen, díky asociativitě je nám jedno, jak řetězec vznikl ($a.(b.c) = (a.b).c = abc$)
  - značíme $(\Sigma^+, .)$
  - jazyk je pak nějaký podsoubor $L \subseteq \Sigma^+$

Jenoduché algebry

3. **Axiom $(\exists x)(\forall y)x.y = y \,\&\, y.x = y$**
   - **neutrální prvek**
   - **monoid**
   - **přirozená čísla se sčítáním a 0**

     $$(\forall n \in \mathbb{N})0 + n = n + 0 = n$$

   - **k řetězcům přidáme prázdné slovo λ takové, že pro každý řetězec w platí $w.\lambda = \lambda.w = w$ a dostaneme strukturu Σ^* tzv. volný monoid**

Jednoduché algebry

4. Axiom $(\forall x)(\exists y)x.y = y.x = e$, kde e je prvek z axiomu 3 (tj. platí $e.x = x.e = x$ pro všechna x.
   - inverzní prvek
   - grupa
   - například celá čísla se sčítáním a opačnými prvky ($a - a = 0$).
   - celá čísla s násobením nejsou grupa, protože například pro 2 žádný takový prvek neexistuje

Další algebry

- algebry s více operacemi mívají pravidla pro jejich vztahy
  - distributivita - $(\forall x)(\forall y)(\forall z)x.(y+z)=x.y+x.z$
- okruh – monoid pro násobení, komutativní grupa pro sčítání a platí distributivní zákon
- těleso – okruh, ale vůči násobení je kromě nuly grupa

Algebry - přehled

- přirozená čísla $\mathbb{N}$
  - s operací + pologrupa
  - s operací . monoid
- celá čísla $\mathbb{Z}$
  - s operací + grupa
  - s operací . monoid
  - s oběma operacemi okruh
- racionální čísla $\mathbb{Q}$
  - s oběma operacemi tělěso
- reálná čísla $\mathbb{R}$
  - s oběma úplné těleso
- komplexní čísla $\mathbb{C}$
  - s oběma uzavřené těleso

Příklad – teorie množin

- Russelův paradox – ne každý soubor prvků definovaný predikátovou formulí lze považovat za množinu ($\{x \mid x \notin x\}$ vede k paradoxu)
- lze obejít tak, že za množiny prohlásíme jen objekty, které jsou utvořeny v souladu s axiomy
- například Zernelo-Fraenkelova teorie množin

Terie množin

- **jazyk – predikáty $=, \in$ oba binární, jinak nic**
- **vztah mezi predikáty – Axiom extenzionality**
  $$(\forall x)(\forall y)x = y \ \leftrightarrow ((\forall z)z \in x \ \leftrightarrow z \in y)$$
- **definice – predikát $\subseteq$**
  $$x \subseteq y \leftrightarrow (\forall z)z \in x \rightarrow z \in y$$
- **axiom dvojice**
  $$(\forall x)(\forall y)(\exists z)x \in z \& y \in z$$
- **neuspořádaná dvojice - $\{x, y\}$**
- **uspořádaná dvojice (dvojí aplikace axiomu $\{x, \{x, y\}\}$ značíme (x, y)**

Axiomy

- axiom existence prázdné množiny

$$(\exists x)(\forall y)\neg(y \in x)$$

  - značíme $\emptyset$
  - je to množina, do níž nepatří žádný prvek
- axiom nekonečna

$$(\exists x)(\emptyset \in x \& (\forall y) y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)$$

  - bez něj jen konečné množiny (počet prvků lze vyjádřit číslem)
  - přirozená čísla : $\emptyset, \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}(1), \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}(2)$ atd. – kombinace ax. dvojice a tohoto

Další axiomy

- **axiom sjednocení**
  $(\forall f)(\exists a)(\forall x)(\forall y)((x \in y \& y \in f) \to x \in a)$
  - **značíme $a = \bigcup f$**
  - **například $\bigcup\{\{1,4\},\{2,3\}\} = \{1,2,3,4\}$**
  - **též značíme $\{1,2\} \cup \{3,4\}$**
- **axiom potenční množiny**
  $$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \subseteq x \to z \in y)$$
  - **značíme y $= \wp(x), y = 2^x$**
  - **například $\wp(\{0,1\}) = \{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$ ze 2 prvků je $2^2 = 4$**

Složitější axiomy

- axiom vydělení (zjednodušená forma)
  $$(\forall z)(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow x \in z \& \varphi)$$
- axiom nahrazení – zobrazení definované formulí
- axiom regularity – například zákaz cyklů relace ∈
- axiom výběru
  - je možné utvořit množinu tak, že z každého prvku každé množiny množin vyberu po jednom prvku

Zadání množin

- výčtem $\{a, b, c\}$
  - konečné množiny
  - lze díky axiomu dvojice a axiomu sjednocení
- společnou vlastností $\{x \in y | \varphi(x)\}$
  - jakékoliv množiny
  - založeno na axiomu vydělení
  - podstatná je přítomnost množiny y

Operace a relace na množinách

- sjednocení a průnik
  - odvozeny z logických operací a axiomů
  - sjednocení $x \cup y = \{z | z \in x \vee z \in y\}$ (ax. sjedn.)
  - průnik $x \cap y = \{z | z \in x \& z \in y\}$ (ax. vydělení)
- doplněk a rozdíl
  - $u \backslash \mathrm{x} = \{y \in u | y \notin x\}$
- kartézský součin
  - $x \times y = \{(u, v) | u \in x, v \in y\}$

Věty o operacích na množinách

- **jsou obdobné větám o logických spojkách**
  - $a \cup b = b \cup a$
  - **je-li u nějaké universum a $a' = u \setminus a, a, b \subseteq u$ pak**

    $$(a \cup b)' = a' \cap b'$$
  - $a \cup a = a$
  - $a \cup u = u, a \cap u = a$
  - $a \cup \emptyset = a, a \cap \emptyset = \emptyset$
  - $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$
  - **dualita – dostanu zákon, pokud nahradím sjednocení průnikem a univerzum prázdnou množinou**

Množinové operace na algebrách

- Podalgebry – algebra $(A, .)$, podmnožina $B \subseteq A$ je podalgebrou $(B, .)$, jestliže
  - je sama algebrou tohoto typu
  - je uzavřená na příslušnou operaci
- příklady
  - $(\mathbb{N}, +)$ je podpologrupa $(\mathbb{Z}, +)$, ale ne podgrupa
  - $(\mathbb{N}, .)$ je podmonoid $(\mathbb{Z}, .)$
  - L jako jazyk není obecně podalgebrou (Σ^*)

Množinové operace na algebrách

- Součin algeber $(A, .), (B, .)$ je algebra $(A \times B, .)$, kde operace . je definována předpisem $(a, b).(c, d) = (a.c, b.d)$
- průnik je obecně algebra
- sjednocení je nutno dogenerovat
- generování a volné algebry
  - z množiny uděláme algebru
  - vytvoříme všechny termy, některé mohou mít stejnou hodnotu, z axiomů se dá odvodit formule $t_1 = t_2$

Relace

- Relací míníme libovolnou podmnožinu kartézského součinu, zejména binární relací na množině A množinu
$$R \subseteq A \times A$$
- relace je vztah mezi prvky – prvky x, y mají vztah, jestliže $(x, y) \in R$
- obecně je relace jakákoliv množina typu
$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

Relace

- relace jsou významy predikátů, tj. z běžného života zmáme relace jako
  - být bratr – symetrická relace
  - být rodič – není symetrická
  - Petr jede do města – relace mezi lidmi a místy, kam lze jet :

$$\text{jít-do} \subseteq \text{Lidé} \times \text{Místa},\ (\text{Petr, město}) \in \text{jít-do}$$

Příklady relací

- relace uspořádání
  - $x \leq y$ jestliže existuje nezáporné z tak, že $x + z = y$ (musí být předem definováno, co je nezáporné!)
  - $x|y$ jestliže existuje z takové, že $x.z = y$
  - býti podmnožinou
- modulární ekvivalence
  - pro číslo n je $x \equiv y \pmod{n}$, jestliže $n|(x - y)$
  - např. pro 2 jsou v této relaci všechna sudá resp. všechna lichá čísla ($5 - 3$ je dělitelné 2, $6 - 2$ také, ale $6 - 3$ není)

Relace ekvivalence

- odvozená od rovnosti
- vlatnosti
  - reflexivita $(\forall x)x{\sim}x$
  - symetrie $(\forall x)(\forall y)x{\sim}y \rightarrow y{\sim}x$
  - tranzitivita $(\forall x)(\forall y)(\forall z)x{\sim}y \& y{\sim}z \rightarrow x{\sim}z$
- příklady
  - klasifikace podle sdílené vlastnosti (zobecněná rovnost) – vokály jsou si ekvivalentní, když nás zajímá jen jednoduchý slovní vzorec
  - modulární ekvivalence

Kongruence

- relace ekvivalence kompatibilní se strukturou nějaké algebry
- je-li . operace

$$a{\sim}b \rightarrow (\forall c)c.a{\sim}c.b \,\&\, a.c{\sim}b.c$$

- příklady
  - modulární ekvivalence (viz dále)
  - syntaktická ekvivalence pro $u, v \in \Sigma^*$ a jazyk $L \subseteq \Sigma^*$

  $u{\sim}v$, jestliže $(\forall x)(\forall y)xuy \in L \leftrightarrow xvy \in L$

Třídy relace ekvivalence

- množina A a na ní rel. ekvivalence $\sim$, označme pro prvek $x \in A$
$$[x]_\sim = \{y \in A | x \sim y\}$$
- třída prvku x v relaci $\sim$, platí
  - každý prvek A patří právě do jedné třídy dané relace ekvivalence
  - tj. všechny třídy jsou disjunktní a jejich sjednocení je A
  - říkáme, že $\sim$ definuje rozklad A do tříd
- třídy reprezentujeme nějakým prvkem nebo je označíme jinak
  - slovní vzorec – vokály A, okluzivy T, veláry K, frikativy S apod.
  - místo pes, píšeme pro jisté účely TAS
  - viz třeba zákony – TALT > TLAT (konkrétně galva > glava)
- třídy představují pojmy, zejména vlastnosti (počet, rovnoběžnost, barva), které jsou dány tím, že je objekty sdílejí nebo nesdílejí
- z množiny s prvky s jednou identitou dostanu faktorovou množinu prvků s jinou identitou, která odhlíží od nezajímavých detailů (předsudky, stůl - stolovitost), Platónovy ideje!

Zbytkové třídy

- třídy modulární ekvivalence se nazývají zbytkové třídy
- označujeme je nejnižším kladným prvkem (tj. zbytkem po dělení n), výjmečně i jinak
- pro 2 tak máme $[0]_2, [1]_2$ nebo také sudá a lichá čísla
- protože je to kongruence (přičtením stejného čísla a násobením stejným číslem nezměníme to, že zbytek po dělení je stejný) je příslušný rozklad algebrou, např.

Zbytkové třídy

+	Sudá(0)	Lichá(1)
Sudá(0)	0	1
Lichá(1)	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

- jedná se o operace mezi množinami – třídami
- stačí vybrat jednoho reprezentanta

  $$[x]_\sim . [y]_\sim = [x.y]_\sim$$

- vyjde reprezentant výsledné třídy
- při různé volbě reprezentantů vyjde vždy stejná třída

Relace uspořádání

- odvozeny od uspořádání na číslech
- vlastnosti $((\forall x)(\forall y)(\forall z))$
  - reflexivita $x \leq x$
  - antisymetrie $x = y \leftrightarrow x \leq y \& y \leq x$
  - tranzitivita $x \leq y \& y \leq z \rightarrow x \leq z$
- příklady
  - cokoliv uspořádáme dle velikosti, intenzity ap.
  - dělitelnost a velikost čísel
  - relace býti podmnožinou

Speciální prvky

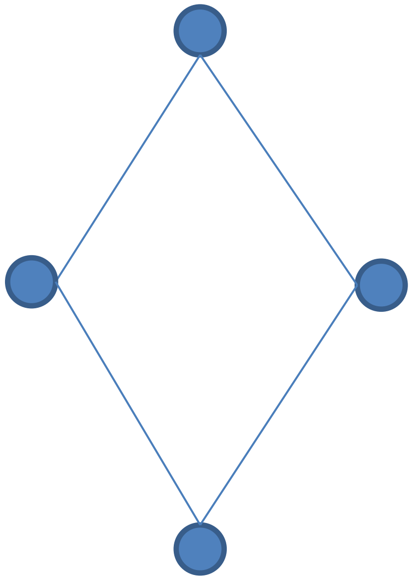
- **největší a nejmenší**
  - prvek je nejmenší, jestliže všechny ostatní jsou větší nebo rovny
  - označujeme $\max(A) = z \in A, (\forall x \in A) z \leq x$
- **supremum a infimum**
  - prvek $z \in A$ je horní závorou podmnožiny $B \subseteq A$ jestliže $(\forall x \in B) x \leq z$
  - supremem množiny B rozumíme nejmenší prvek množiny jejích horních závor (odmocnina ze dvou, generování)
- **minimální a maximální**
  - minimální prvek je takový, že pro žádný jiný neplatí, že by byl menší

Hasseovy diagramy

- prvky uspořádaných množin kreslíme jako body v rovině
- pokrývání : $x \lessdot y$, jestliže pro každé $z, x \leq z, z \leq y$ platí $x = z$ nebo $y = z$ (nic se mezi ně nevecpe)
- pokrývající se prvky spojíme čarou tak, že větší je víc nahoře, celkově udržujeme to, že větší prvky jsou víc nahoře než menší

Hasseovy diagramy

- **Příklad** $(\wp(\{0,1\}), \subseteq)$:



Opozice

- Opozice je obecně jakýkoliv vztah mezi dvěma objekty
- Cokoliv můžeme popsat tak, že
  - popíšeme všechny vnitřní vlastnosti
  - popíšeme všechny opozice, do kterých vstupuje se vším ostatním
- Model opozic – základní množina A opozice je $\wp(A) \times \wp(A)$, jednotlivé opozice píšeme (A, B)
- pro opozici (A, B) nazýváme množiny
  - $A \cap B$ základ opozice
  - $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ charakteristika opozice

Typy opozic

- nulová opozice je mezi množinou a jí samou
- disjunktivní opozice je mezi dvěma disjunktními množinami
- privativní opozice je mezi množinou a její podmnožinou (říkáme, že je privativní ve prospěch nadmnožiny)
- ekvipolentí opozice je mezi množinami tehdy, když má neprázdný základ, neprázdnou charakteristiku a není privativní

Opozice

- Hjelmslev – selekce (privativní v->c), solidarita (nulová c<->c), kombinace (disjunktivní u|v)
- říká tomu funkce, jde o to, zda jedna věc předpokládá druhou
- vztah mezi proměnnou a hodnotou, dvěma proměnnými a dvěma konstantami

Vlastnosti a vztahy mezi opozicemi

- dvě opozice jsou homogenní, jestliže mají stejný základ
- opozice nazýváme proporcionální, jestliže mají stejnou charakteristiku
- opozice se nazývá multidimenzionální, jestliže v systému existuje jiná opozice se stejným základem, jinak je jednodimenzionální (též singulární a nesingulární)
- opozice se nazývá izolovaná, není-li proporcionální s žádnou jinou opozicí v systému
- Kořínek – izolovaná : proporcionální, singulární = jednodimenzionální, homogenní
  - homogennost – dají se představit jako krajní body řetězu jednodimenzionálních

Korelace

- zajímavější jsou proporcionální opozice, neboť zachovávají nulovost, privativnost a ekvipolentnost v širším smyslu
- izolovaných je víc než neizolovaných (pořadí je izo a nes, neizo a nes, s a izo, s a nes
- příklady P:Š, P:T, R:L, P:B
- korelace je třída vzájemně proporcionálních opozic, které jsou invariantní vzhledem k vlastnosti opozic (privativních, ekvipolentních nebo disjunktních)
  - např. měkkost v ruštině nebo znělost – vede na abstraktní pojmy podobně jako rovnoběžnost

Distribuce

- jazyk $L \subseteq \Sigma^*$, dvojici slov (u, v) z Σ^* nazýváme kontext.
- označme pro slovo $u \in \Sigma^*$ $C(u)$ množinu kontextů takových, že
$$(x, y) \in C(u) \leftrightarrow xuy \in L$$
- tuto množinu nazýváme distribucí slova u vzhledem k jazyku L

Distribuce

- opozice mezi distribudemi slov
- nulová : syntaktická ekvivalence – slova patří do téže distribuční třídy, volná variace
- kontrastivní (ekvipolentní, privativní) – existují společné i různé kontexty
- komplementární (disjunktivní) – neexistuje společný kontext
- v syntaxi – distribuční analýza (synonyma, hyponymie, částečná synonyma)
- ve fonologii – komutační analýza (pes, ves – p a v jsou jistě v kontrastivní distribuci, prvky v komplementární distribuci nemohou odlišit význam)

Zobrazení

- relaci na množinách A a B, která splňuje $((x,y),(x,z) \in f) \rightarrow y = z$ nazýváme parciální zobrazení
- pokud navíc splňuje $(\forall x)(\exists y)(x,y) \in f$, říkáme jí totální zobrazení, nebo prostě zobrazení
- ke každému prvku náleží jediný, který je jeho obrazem
- píšeme $y = f(x)$ nebo $f: x \mapsto y$ místo $(x,y) \in f$
- je-li $f \subseteq A \times B$, píšeme $f: A \rightarrow B$

Zobrazení

- je-li $y = f(x)$ nazýváme prvek x vzor a prvek y obraz
- množinu f$(A) = \{x \in B | (\exists y) f(y) = x\}$ nazýváme obor hodnot
- pro každou podmnožinu $X \subseteq B$, označme $f^{-1}\,(X) = \{x | f(x) \in X\}$
- skládání zobrazení $f \circ g(x) = f(g(x))$

Speciální zobrazení

- zobrazení f se nazývá prosté (injektivní), jestliže platí $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$
  - inkluze $f: A \rightarrow B, x \mapsto x, A \subseteq B$
- zobrazení f se nazývá surjektivní, jestliže $(\forall y)(\exists x) f(x) = y$, tj. každý prvek B je obrazem nějakého prvku
  - projekce : $f: x \mapsto [x]_{\sim}$
- zobrazení, které je injektivní i surjektivní se nazývá bijekce
  - identita
- bijekce má inverzní zobrazení $f^{-1}(x) = y$, když $f(y) = x$
- existuje-li mezi množinami bijekce, říkáme, že jsou izomorfní a píšeme $A \cong B$
- to mimo jiné znamená, že mají stejně prvků (stejnou mohutnost)

Algebry zobrazení

- zobrazení na A, $f: A \to A$, tvoří monoid, operace je skládání, neutrální prvek je identita
- tento monoid není komutativní
- každý monoid je možno považovat za monoid zobrazení, jako zobrazení je možno vzít násobení zleva $f_a: A \to A, x \mapsto a.x$
- bijekce tvoří grupu

Vztah zobrazení a relací

- každé zobrazení je z podstaty relace, ne každá relace je zobrazení
- relace na $R \subseteq A \times B$ se dá pojímat jako zobrazení
  $$R: A \to \wp(B), x \mapsto \{y \in B | (x, y) \in R\}$$
- relace má statický charakter – opozice, synchronní vztah
- zobrazení dynamický – jazykové zákony (morf, hláska či skupina hlásek se změní na...)

Homomorfismy

- zobrazení mezi strukturami se nazývají homomorfismy, pokud zachovávají strukturu:
  - algebry - $f(x.y) = f(x).f(y)$
  - uspořádané množiny $x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y)$
- příklad : $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, které přiřadí číslu zbytek po dělení dvěma
- bijektivní homomorfismus se nazývá izomorfismus, dvě izomorfní algebry jsou stejné až na pojmenování prvků

Zobrazení a relace ekvivalence

- každé zobrazení definuje relaci ekvivalence „zobrazí se na stejný prvek“, tzv. jádro
- píšeme
$$\ker(f) = \{(x, y) | f(x) = f(y)\}$$
- rozklad podle jádra je izomorfní obrazu zobrazení, zobrazení se rozpadne na projekci na jádro, izomorfismus s obrazem zobrazení a inkluzi do cílové množiny
- to platí i pro algebry (izomorfismus mezi $\mathbb{Z}$ / $2\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}_2$)

Systém Kulaginové

- jazyk (W, S, P), kde $S \subseteq W^*$ je množina vět, P je rozklad množiny W na paradigmatické třídy a W je množina všech slovních tvarů
- Pro jakýkoliv rozklad R množiny W označme $R(x)$ třídu, která obsahuje x
- R-struktury, ekvivalence struktur, Typ a odvozeny rozklad, C-ekvivalence, typologie

Kulaginová

- Zajímavé rozklady
  - I identický roklad
  - P rozklad na paradigmata
  - D distribuční rozklad
- R-struktura fráze $x_1 x_2 \dots x_n$ je množina $R(x_1)R(x_2)\dots R(x_n)$, řekneme, že je gramatická, jestliže obsahuje alespoň jednu gramatickou frázi

Kulaginová

- distribuční ekvivalence tříd rozkladu R a S
  - $R \sim S \leftrightarrow (\forall u, v) R(u) R R(v)$ je gramatická, právě když je $S(u) S S(v)$ gramatická
  - to jest, když pro jakýkoliv kontext buď existuje v obou třídách slovo, které v daném kontextu dává gramatickou frázi, nebo ani v jedné takové slovo není
  - například paradigmatické třídy stejného slovního druhu a vzoru by měly být ekvivalentní
  - problémy jsou například s homonymií

Systémy vlastností

- Množina znaků S
- Množina vlastností F
- zobrazení $\varphi: S \to \mathcal{P}(F)$
- každému znaku je přiřazena množina vlastností
- všechno je důležité – znak, jeho vlastnosti i přiřazení

Systémy vlastností

- Obvykle uvažujeme rozklad $\mathcal{F}$ na množině F a požadujeme, aby $|\varphi(s) \cap \mathcal{F}_i| = 1$ pro všechna $s \in S, \mathcal{F}_i \in \mathcal{F}$
- hodnoty x, y nazýváme
  - homogenní, pokud $x, y \in \mathcal{F}_i$ pro nějaké i, jinak jsou heterogenní
  - slučitelné, pokud existuje s, tak že $x, y \in \varphi(s)$
  - slučitelné hodnoty jsou heterogenní, homogenní hodnoty jsou neslučitelné
  - kontrastní, jestliže existují znaky r a s, takové, že $\varphi(r) \setminus \varphi(s) = x$ a $\varphi(s) \setminus \varphi(r) = y$, píšeme $y = x(f\ /\ g)$

Systémy vlastností

- takže ve fonologickém systému českých konsonantů obvykle uvažujeme rozklad ma vlatnosti místa artikulace, způsobu artikulace, znělost, konsonantnost, předozadnost a otevřenost
- vlastnosti mohou být neslučitelné
  – protože jsou homogenní
  – protože by sice mohla existovat hláska, která je má, ale zkrátka neexistuje

Systémy vlastností

- **Systém je úplný, jestliže jsou v něm všechny neslučitelné vlastnosti kontrastní**
- **Systém je polоúplný, jestliže jsou v něm všechny homogenní vlastnosti kontrastní**
- **Dvě hlásky se nazývají absolutně ekvivalentní, pokud $\varphi(x) = \varphi(y)$**
- **Třídy jádra zobrazení φ se nazývají abstraktní hlásky**

Jazyk

- Uvažme jazyk $L \subseteq S^*$, posloupnosti z L nazýváme vyznačené (slova nebo fráze), posloupnosti z množiny $\mathcal{U}(L) = \{u \in S^* | (\exists v, w \in S^*) vuw \in L\}$ tj. všechny řetězce, které se vyskytují jako podřetězce vyznačených posloupností nazýváme dovolené
- Například v češtině je vyznačenou posloupností „pes“, takže mezi dovolené posloupnosti patří například „es“ nebo „pe“ či „p“.
- Základní předpoklad : pokud je posloupnost u dovolená, je dovolená i každá posloupnost, v níž vyměníme jakoukoliv hlásku za hlásku s ní absolutně ekvivalentní

Vlastnosti a řetězce

- **Vázané hodnoty**
  - hodnota pro hlásku x je vázaná, jestliže
    - není kontrastní s žádnou jinou hodnotou nebo
    - pokud je kontrastní s jinou hodnotou ($y = x(f/g)$), pak platí $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ (tj. hlásky jsou v komplementární distribuci)
  - hodnota je pro hlásku alternativní, pokud pro ni není vázaná
  - Takže hodnota velární je pro hlásku „velární n“ vázaná, protože je povinná před velárou, tj. hláska n ji mít nemusí a náhradou za jinou variantu hlásky n dostaneme vždy nedovolenou posloupnost
  - Naopak pro hlásku d není hodnota znělá vázaná, neboť máme například tam a dam – obě posloupnosti jsou dovolené

Pertinentní hodnoty

- **Hodnota je pro hlásku alernativní, pokud pro ni není vázaná.**
- **Označme R relaci ekvivalence, která je definovaná pro vyznačené posloupnosti tak, že uRv jestliže u a v mají stejný význam.**
- **Alternativní hodnota f se nazývá pertinentní pro hlásku x, jestliže**
  - **existuje $y = x(f/g)$**
  - **existuje dovolená posloupnost u taková, že $v = u(x/y)$**
  - **neplatí uRv**

Fonémy

- fonémem, ke kterému náleží hláska x rozumíme dvojici $(\mathcal{F}(x), \mathcal{C}(x))$, kde
  - $\mathcal{F}(x)$ je množina všech pertinentních hodnot pro x – fyzická složka fonému
  - relační složka fonému $\mathcal{C}(x)$ hlásky, které se shodují s x v pertinentních vlastnostech (tj. $\mathcal{C}(x) = \{y \in S | \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(x)\}$
- Archifonémem rozumíme průnik fyzických složek dvou fonémů