

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory II

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 60200 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 3

Obsah přednášky

Další pojmy z teorie grafů

Algoritmy procházení grafu

Kruskalův algoritmus

Dijkstrův algoritmus

Souvislé komponenty

- ▶ Souvislé komponenty
 - ▶ největší souvislé podgrafy
 - ▶ → mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta
- ▶ Silně souvislé komponenty
 - ▶ v případě orientovaných grafů
 - ▶ mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta tam i zpět

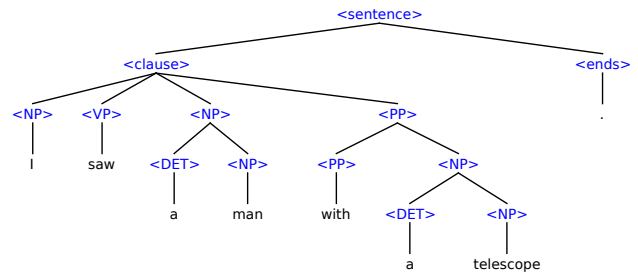
Vzdálenost v grafu

- ▶ Délka cesty
 - ▶ **nehodnocený graf**: počet hran v cestě
 - ▶ **ohodnocený graf**: součet ohodnocení jednotlivých hran v cestě
- ▶ Vzdálenost mezi dvěma vrcholy X a Y
 - ▶ je délka nejkratší cesty z X do Y

Kořen a listy stromu

- ▶ Kořen stromu
 - ▶ jeden vyznačený vrchol
 - ▶ kreslíme většinou nahore :)
- ▶ Listy stromu
 - ▶ vrcholy stupně 1, které nejsou kořenem
 - ▶ kreslíme většinou dole

Příklad – syntaktický strom



Kostra grafu

- ▶ Podgraf, který
 - ▶ obsahuje všechny vrcholy původního grafu
 - ▶ je strom
 - ▶ → musíme odstranit všechny cykly
- ▶ Minimální kostra grafu
 - ▶ pro ohodnocený graf
 - ▶ kostra s nejmenším součtem ohodnocení hran
 - ▶ analogicky maximální kostra

Procházení grafu

- ▶ Např. hledáme určitý vrchol, chceme projít všechny, ...
- ▶ Procházení do hloubky – depth-first search
 - ▶ začínáme z nějakého vrcholu, ten označíme
 - ▶ označíme libovolný sousední neoznačený vrchol a pokračujeme z něj
 - ▶ pokud to dál nejde (všechny sousední vrcholy jsou označené), vrátíme se k nejbližšímu vrcholu, ze kterého to ještě jde

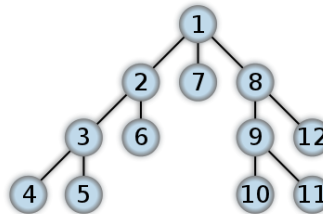
Procházení grafu

▶ Procházení do šířky – breadth-first search

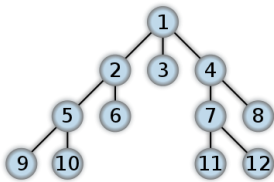
- ▶ začínáme z nějakého vrcholu, ten označíme
- ▶ vybereme všechny sousední neoznačené vrcholy a přidáme je do seznamu
- ▶ postupně ze začátku seznamu odebíráme a provádíme předchozí kroky
- ▶ končíme, když je seznam prázdný

Procházení do hloubky z vrcholu u

- ▶ $DFS(G, u)$
- ▶ =====
- ▶ označ u
- ▶ for všechny hrany (u, v) vycházející z vrcholu u :
 - ▶ if v není označen:
 - ▶ $DFS(G, v)$

Procházení do šířky z vrcholu u

- ▶ $BFS(G, u)$
- ▶ =====
- ▶ $Q = [u]$
- ▶ while Q je neprázdný:
 - ▶ odstraň první prvek z Q a přiřaď jej do t
 - ▶ označ t
 - ▶ přidej všechny neoznačené sousedy t na konec Q



Kruskalův algoritmus

- ▶ Vstup
 - ▶ neorientovaný graf G
 - ▶ ohodnocení hran w
- ▶ Výstup
 - ▶ minimální kostra grafu G
- ▶ Algoritmus je tzv. **hladový**
 - ▶ v každém kroku vybírá lokálně optimální možnost
- ▶ Idea
 - ▶ setřídít hrany podle ohodnocení
 - ▶ v každém kroku přidat do kostry tu nejmenší, která nevytvorí cyklus
 - ▶ udržujeme si seznam souvislých komponent kostry

Kruskalův algoritmus (G, w)

- ▶ $K \leftarrow []$; $comp \leftarrow \{\}$
- ▶ for u in $G(V)$:
 - ▶ $comp[u] \leftarrow set(u)$
- ▶ setříd' $G(E)$ podle w
- ▶ for (u, v) in $G(E)$:
 - ▶ if $comp[u] \neq comp[v]$:
 - ▶ $K.append((u, v))$
 - ▶ $newset = union(comp[u], comp[v])$
 - ▶ for x in $newset$: $comp[x] \leftarrow newset$
- ▶ K je minimální kostra grafu

Dijkstrův algoritmus

- ▶ Vstup
 - ▶ graf s hranami ohodnocenými funkcí w
 - ▶ ohodnocení hran musí být nezáporné
 - ▶ počáteční vrchol s
- ▶ Výstup
 - ▶ vzdálenosti z vrcholu s do všech dalších vrcholů grafu
- ▶ Idea
 - ▶ udržujeme si nejmenší známé vzdálenosti do všech vrcholů
 - ▶ na začátku nekonečno
 - ▶ procházíme postupně vrcholy a hodnoty upravujeme

Dijkstrův algoritmus (G, s)

- ▶ for u in $G(V)$:
 - ▶ $d[u] \leftarrow infinity$
- ▶ $d[s] \leftarrow 0$
- ▶ $N \leftarrow G(V)$
- ▶ $p \leftarrow \{\}$
- ▶ while $N \neq []$:
 - ▶ $u \leftarrow$ vrchol z N s nejmenší hodnotou $d[u]$
 - ▶ for všechny hrany (u, x) vycházející z vrcholu u :
 - ▶ $alt \leftarrow d[u] + w((u, x))$
 - ▶ if $alt < d(x)$: $d[x] \leftarrow alt$; $p[x] \leftarrow u$
 - ▶ odstraň u z N
- ▶ d jsou vzdálenosti vrcholů z vrcholu s
- ▶ p obsahuje předchozí vrcholy na nejkratší cestě z s