

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory II

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 60200 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 2

Obsah přednášky

Graf

Základní pojmy

Typy grafů

Některá rozšíření pojmu grafu

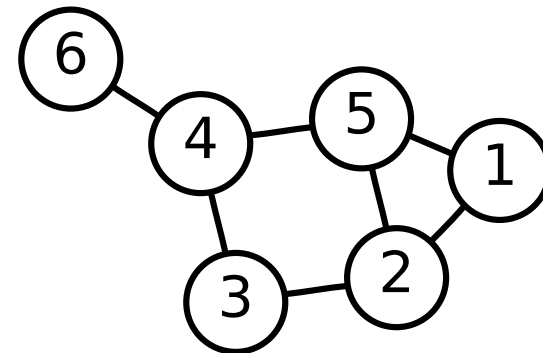
Analogie se známými pojmy

Graf

- ▶ Graf G je dvojice (V, E)
 - ▶ V = množina vrcholů (též $G(V)$)
 - ▶ E = množina hran (též $G(E)$) – obsahuje vybrané dvouprvkové podmnožiny V
- ▶ Základní model pro mnoho praktických aplikací
 - ▶ mapy – maps.google, mapy.cz
 - ▶ počítačové sítě
 - ▶ modelování procesů
 - ▶ konečné automaty
 - ▶ syntaktické rozbory
 - ▶ sémantické sítě
 - ▶ ...

Příklad grafu

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}$$

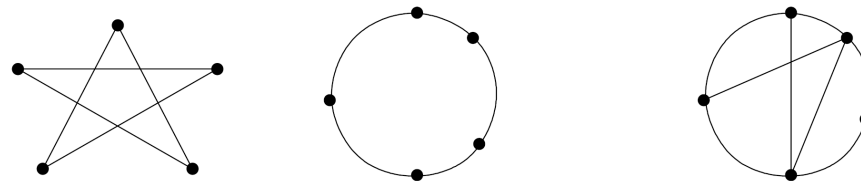


Základní pojmy

- ▶ Sousední vrcholy
 - ▶ spojené nějakou hranou
- ▶ Stupeň vrcholu
 - ▶ počet hran, které z daného vrcholu vychází
- ▶ Podgraf grafu G
 - ▶ obsahuje pouze vybrané vrcholy a hrany z grafu G
 - ▶ hrany musí být pouze mezi vybranými vrcholy (výsledek musí opět tvořit graf)
- ▶ Isomorfismus mezi grafy G a G'
 - ▶ bijekce $f : V(G) \rightarrow V(G')$ taková, že $\{u, v\}$ je hrana v G právě tehdy, když $\{f(u), f(v)\}$ je hrana v G'
 - ▶ grafy jsou **isomorfní** (shodné), pokud mezi nimi existuje isomorfismus

Isomorfismus – příklad

Které z následujících grafů jsou isomorfní?



Typy grafů (I)

- ▶ Kružnice (délky $n > 2$)
 - ▶ $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
 - ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$
 - ▶ stejný počet vrcholů a hran
 - ▶ všechny vrcholy stupně 2
 - ▶ náčrt grafu tvoří kružnici
- ▶ Cesta (na n vrcholech)
 - ▶ $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
 - ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$
 - ▶ kružnice s jednou chybějící hranou
 - ▶ počáteční a koncový vrchol

Typy grafů (II)

- ▶ Úplný graf (na n vrcholech)
 - ▶ $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
 - ▶ $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$
 - ▶ každé dva vrcholy jsou spojeny hranou

Zajímavé podgrafy

- ▶ Cyklus (kružnice) v grafu
 - ▶ podgraf, který je isomorfní s nějakou kružnicí
- ▶ Cesta v grafu
 - ▶ podgraf, který je isomorfní s nějakou cestou
- ▶ Klika v grafu
 - ▶ podgraf, který je isomorfní s nějakým úplným grafem

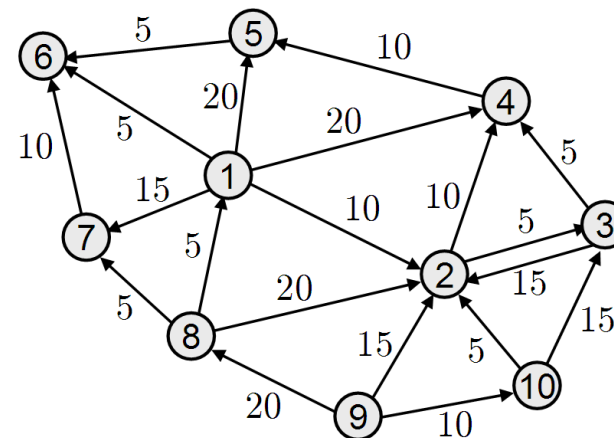
Typy grafů (III)

- ▶ Acyklický, resp. „les“
 - ▶ neobsahuje kružnici (cyklus) jako podgraf
- ▶ Souvislý
 - ▶ mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta
- ▶ Strom
 - ▶ acyklický souvislý graf

Některá rozšíření pojmu grafu

- ▶ Orientovaný graf
 - ▶ hrany jsou orientovány
 - ▶ \rightarrow zdrojový a cílový vrchol
 - ▶ \rightarrow množina hran je množina uspořádaných dvojic
- ▶ Ohodnocený graf
 - ▶ hrany jsou ohodnoceny (např. vzdáleností mezi vrcholy)
 - ▶ formálně funkce $e : G(E) \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ Multigraf
 - ▶ povoluje více hran mezi dvěma stejnými vrcholy
 - ▶ povoluje hrany začínající a končící ve stejném vrcholu („smyčky“)
- ▶ Výše uvedené pojmy se mohou libovolně kombinovat

Příklad – orientovaný ohodnocený graf



Analogie se známými pojmy

- ▶ Graf lze popsat jako relaci na množině vrcholů
 - ▶ množina hran je chápána jako relace
 - ▶ orientovaný graf – nereflexivní relace
 - ▶ neorientovaný graf – nereflexivní symetrická relace
- ▶ Přechodový graf konečného automatu
 - ▶ orientovaný ohodnocený multigraf
 - ▶ ohodnocení symboly abecedy (nikoli čísla)
 - ▶ (navíc máme vrcholy dvou typů)