

# Ionenfallen und Quantengatter

Richard Bartholdt

Hauptseminar WS 2010/2011

## Zusammenfassung

Im folgenden möchte ich den Inhalt meines Vortrags „Ionenfallen und Quantengatter“ zusammenfassen, den ich am 8. Februar 2011 im Rahmen des Hauptseminars „Experimentelle Quantenoptik“ bei Prof. Dr. H. Ott und Prof. Dr. A. Widera gehalten habe. Dieser setzte sich zusammen aus einem Überblick zu den Grundlagen für Quantencomputer, theoretischen Betrachtungen zur Physik einer Ionenfalle und einer Beschreibung eines Quantengatters auf Grundlage gefangener Ionen.

## Grundlagen

Quantenmechanische Theorien haben viele Teilgebiete der Physik revolutioniert und haben auch mit der Entwicklung von Quantencomputern die Informatik erreicht. Quantencomputer haben das Potential, auf Grundlage der Gesetze der Quantenmechanik, mathematische Probleme deutlich effizienter zu lösen als klassische Rechner. So zum Beispiel mit dem Shor-Algorithmus<sup>1</sup> zur Faktorisierung großer Zahlen.

## Qubits und Gatter

Die Grundlagen für jeden Computer sind erstens die Möglichkeit Informationen zu speichern: in Form von Bits, die genau zwei Werte 0 bzw. 1 annehmen können; und zweitens diese miteinander logisch zu verknüpfen: mit einem Satz an logischen Schaltungen z.B. AND- und NOT-Gatter oder das NAND-Gatter. Für einen Quantencomputer ist die Speichergrundlage das Qubit: ein quantenmechanisches Zwei-Zustandssystem, das zusätzlich zu Grund- und angeregtem Zustand,  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$ , auch noch jede mögliche Superposition:  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  dieser beiden annehmen kann, wobei die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  komplexe Zahlen mit der Normierung  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  sein können. Aus dem Superpositions-Prinzip ergibt sich folgende Konsequenz: In einem Quantenregister aus  $N$  Qubits ist die Anzahl der möglichen Basiszustände  $2^N$  mit den komplexen Koeffizienten  $a_i$ :

$$a_0 |00\dots 00\rangle + a_1 |00\dots 01\rangle + a_2 |00\dots 10\rangle + \dots$$

Es könnten also theoretisch  $2^N$  komplexe Zahlen  $a_i$  gespeichert werden.

Ein universeller Satz an logischen Operationen auf Qubits besteht mindestens aus einem Ein-Qubit- und einem Zwei-Qubit-Gatter. Ein solches Zwei-Qubit-Gatter ist immer als unitäre Matrix darstellbar, z.B. das CNOT-Gatter (für eng. „controlled NOT“) mit den Basis-Zuständen  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

wodurch das zweite (Ziel-) Qubit invertiert wird, wenn das erste (Kontroll-) Qubit im Zustand  $|1\rangle$  ist.

## DiVincenzo Kriterien

Welche Kriterien ein physikalisches System als Quantencomputer außerdem noch erfüllen muss, wurde im Jahr 2000 von David P. DiVincenzo<sup>2</sup> diskutiert:

1. Das System muss auf eine beliebige Anzahl eindeutiger Qubits skalierbar sein.
2. Es muss möglich sein alle Qubits in einem Ausgangszustand zu initialisieren, z.B.  $|00\dots 00\rangle$ .
3. Die Kohärenz-Zeit muss lang sein gegenüber der Zeit für Gatteroperationen.
4. Ein universeller Satz an Quantengattern muss umsetzbar sein.
5. Der Zustand der Qubits muss messbar sein.

Ein System, das fast alle diese Kriterien erfüllt, wurde bereits 1995 von J. I. Cirac und P. Zoller<sup>3</sup> vorgestellt. Als Qubits sollten in einer linearen Paulfalle gefangene Ionen dienen, die mit Hilfe von Lasern gesteuert werden. Als Quantenbus zur Übertragung von Informationen zwischen den Qubits sollte der quantisierte Bewegungszustand dienen. Hiermit war es vor allem möglich das oben genannte CNOT-Gatter experimentell zu realisieren.

## Die lineare Paulfalle

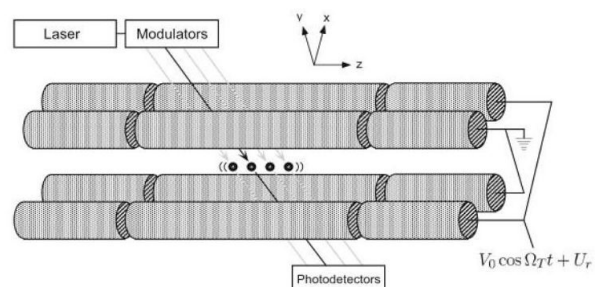


Abbildung 1: Schematische Darstellung der linearen Paulfalle: vier Ionen gefangen in der Mitte des Fallenpotentials als der vier Elektroden (aus jeweils drei Segmenten) [4, Fig.7.7]

## Fallenpotential

Die nach Wolfgang Paul (Nobelpreis 1989) benannte Paul-Falle ist eine elektrische Quadrupolfalle, die Ionen in einem harmonischen Potential einschließt. Das Fallenpotential setzt sich aus einer Überlagerung von zeitlich konstanten elektrischen Feldern und einem elektrischen Wechselfeld zusammen. An zwei der vier Elektroden wird eine Wechselspannung  $V_0$  angelegt, die in radialer Richtung (als senkrecht zur Fallen-Achse) ein harmonisches Potential  $\Phi_{rf}$  erzeugt, das die Ionen auf die Fallen-Achse drängt<sup>4</sup>

$$\Phi_{rf} = \frac{1}{2} (V_0 \cos \Omega_T t + U_r) \left( 1 + \frac{x^2 - y^2}{R^2} \right).$$

In axialer Richtung wird der Einschluss für die Ionen dadurch erzeugt, dass zwischen den äußeren Segmenten der Elektroden und den Inneren eine Potential-Differenz  $\Phi_{dc}$  anliegt. Im zeitlichen Mittel kann die Bewegung der Ionen in der Falle zusammen und deren gegenseitiger Coulomb-Abstoßung mit dem Hamilton-Operator

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{M}{2} \left( \omega_x^2 x_i^2 + \omega_y^2 y_i^2 + \omega_z^2 z_i^2 + \frac{|\vec{p}_i|^2}{M^2} \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

beschrieben werden.<sup>4</sup> Hierbei ist die Falle so konstruiert ist, dass gilt:  $\omega_x, \omega_y \gg \omega_z$ , wodurch sich die Ionen in einer „Kette“ anordnen. Eine Herleitung der klassischen und quantenmechanischen Bewegungsgleichungen geladener Teilchen in radiofrequenz-Fallen sowie der Stabilitätsbedingungen für rf-Fallen findet man in [7, Kap. II].

## Quantisierung der Bewegung

Um die Bewegung der Ionen in der Falle als quantenmechanischen harmonischen Oszillator beschreiben zu können, müssen die Ionen sehr kalt sein - es muss also gelten:  $k_B T \ll \hbar \omega_z$ . Dazu werden die Ionen mittels Laser-Kühlung in ihren Bewegungsgrundzustand gebracht.

## Seitenband-Kühlung

Um die gefangenen Ionen über das Doppler-Limit hinaus in ihrem Bewegungsgrundzustand zu bringen, wird Seitenband-Kühlung<sup>5</sup> angewendet.

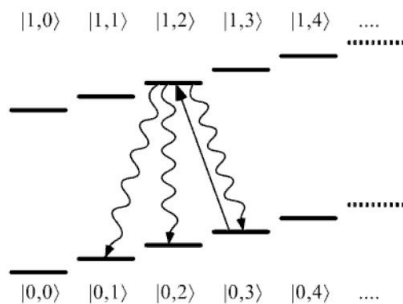


Abbildung 2: schematisches Niveau-System für Seitenband-Kühlung [4, Fig.7.8]

Ein Laser der Frequenz  $\omega$ , der gegenüber dem internen Übergang des Ions mit der Übergangsfrequenz  $\omega_0$  um  $\Delta = \omega - \omega_0 = \omega_z$  ( $\Rightarrow$  rotes Seitenband) verstimmt ist, wird auf die Ionen eingestrahlt. Dadurch finden Übergänge der Form  $|g, n\rangle \Rightarrow |e, n-1\rangle$  statt. Wobei die erste Quantenzahl den inneren Zustand und die zweite die Vibrationsquantenzahl des Ions beschreibt. Es wird also gleichzeitig das Ion in einen angeregten Zustand  $|e\rangle$  gebracht und geht dabei in einen niedrigeren Schwingungszustand  $|n-1\rangle$  über. Die Ionen zerfallen dann statistisch in die Zustände  $|g, n-1\rangle, |g, n-1 \pm 1\rangle \dots$  mit Tendenz zu niedrigeren Schwingungsquantenzahlen  $n$ . Der Grundzustand  $|0, 0\rangle$  kann von einem rot verstimmten Laser nicht mehr angeregt werden.<sup>4</sup>

## Lamb-Dicke-Regime

Um zu vermeiden, dass sich der Bewegungszustand während Gatteroperationen oder bei spontaner Emission (also immer wenn Photonen an den Ionen gestreut werden) ändert, muss das Lamb-Dicke-Kriterium erfüllt sein:  $\eta \ll 1$ . Der Lamb-Dicke-Parameter  $\eta$  wird definiert über den Zusammenhang

$$\eta = \sqrt{\frac{E_R}{\hbar \omega_z}} = k \cdot z_0,$$

wobei  $k$  der Wellenvektor eines gestreuten Photons ist und  $z_0 = \sqrt{\hbar/2m\omega_z}$  die Ausdehnung der Grundmodenschwingung der Ionen in der Falle.  $E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  ist die „Recoil“-Energie, die ein Maß für den Rückstoß ist, den ein Ion erfährt, wenn es spontan ein Photon abstrahlt. Wenn dieser zu groß ist, können durch spontane Emission von Photonen Schwingungsmoden angeregt werden. Für  $\eta \ll 1$  bleibt der Bewegungszustand von diesem Effekt nahezu unbeeinflusst.

## Der Hamilton-Operator

### Das Modell

Zur quantenmechanischen Beschreibung der Ionen in der Falle wird folgendes Modell zugrunde gelegt: Ein Ion mit zwei internen Zuständen  $|g\rangle$  und  $|e\rangle$  und der Übergangsfrequenz  $\omega_0$  ist in einem harmonischen Oszillatorpotential mit Energie-Niveaus (bezeichnet mit  $|n\rangle$  und  $n \in \{0, 1\}$ ) im Abstand  $\hbar \omega_z$  gefangen und soll mit Laserlicht der Frequenz  $\omega$  wechselwirken. Eine ausführliche Herleitung hierzu ist zu finden in [4, 6]; die theoretische Beschreibung der Wechselwirkung von Ionen in einer Falle mit Licht in [7, Kap. III].

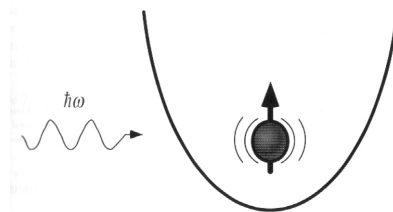


Abbildung 3: Modell für die Ionen in einer Falle zur Herleitung des Hamilton-Operators [4, Fig. 7.9]

Die Wechselwirkung der gefangenen Ionen mit Licht wird durch folgenden Halmilton-Operator beschrieben

$$H = \hbar\Omega\sigma_+e^{-i(\Delta t-\phi)} \exp \{i\eta [ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}]\},$$

wobei  $\Omega$  die Rabi-Frequenz für den Übergang zwischen den internen Zuständen des Ions,  $\sigma_+$  der dazugehörige Erzeuger-Operator,  $\eta$  der Lamb-Dicke-Parameter und  $a, a^\dagger$  der Erzeuger- bzw. Vernichter-Operator für die Schwingungszustände der Ionen in der Falle.

Für die Verstimmung  $\Delta$  des Laserlichts mit der Frequenz  $\omega$  gegenüber der Übergangsfrequenz  $\omega_0$  zwischen den Zuständen  $|g\rangle$  und  $|e\rangle$  des Ions sind die folgenden drei Fälle entscheidend:

- $\Delta = 0$ : der „Träger-Übergang“

$$H^{car} = \hbar\Omega (\sigma_+e^{i\phi} + \sigma_-e^{-i\phi}) \quad |g, n\rangle \Leftrightarrow |e, n\rangle$$

- $\Delta = +\omega_z$ : das „rote Seitenband“ ( $\Rightarrow$  Seitenband-Kühlung)

$$H^+ = i\hbar\Omega\eta (\sigma_+a^\dagger e^{i\phi} + \sigma_-ae^{-i\phi}) \quad |g, 0\rangle \Leftrightarrow |e, 1\rangle$$

- und  $\Delta = -\omega_z$ : das „blaue Seitenband“

$$H^- = i\hbar\Omega\eta (\sigma_-a^\dagger e^{i\phi} + \sigma_+ae^{-i\phi}) \quad |g, 1\rangle \Leftrightarrow |e, 0\rangle$$

Damit ergibt sich folgendes vereinfachte Niveauschema für ein gefangenes Ion:

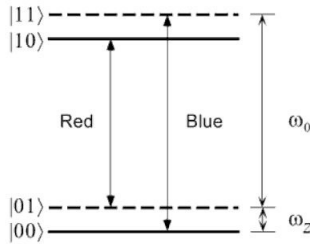


Abbildung 4: Niveauschema für ein Ion in der Falle [4, Fig.7.10]

Diese Übergänge reichen aus um daraus die nötigen Gatteroperationen für einen Quantencomputer auf Grundlage gefangener Ionen zu konstruieren.

## Quantengatter und Verschränkung von gefangenen Ionen

### 1. Skalierbarkeit:

In der linearen Paulfalle können prinzipiell beliebig viele Ionen als Qubits gefangen werden. Sind aber zu viele Ionen in der Falle, weicht die tatsächliche Anordnung der Ionen von der idealen Ionen-Kette ab. Außerdem hängt die Grundmodenausdehnung  $z_0$  der Schwingung, die ein charakteristischer Wert für den Abstand der Ionen zueinander ist, von der Gesamtmasse der Ionenkette ab und damit von der Anzahl  $N$  der Ionen in der Falle und deren Masse  $m$ :

$$z_0 = \sqrt{\hbar/2M\omega_z} = \sqrt{\hbar/2Nm\omega_z}$$

Je mehr Ionen in der Falle sind, desto näher rücken diese zusammen. Jedes zusätzliche Ion erweitert zusätzlich das Spektrum an möglichen Schwingungen der Ionenkette in der Falle (Phononen), was dazu führen kann, dass die Ionen sich in einer „Zick-Zack“-Linie anordnen. Dadurch wird die eindeutige Adressierbarkeit der einzelnen Ionen mit Lasern-Strahlen erschwert. Die Skalierbarkeit stellt also noch das größte Hindernis bei der Entwicklung des Quantencomputers dar.

### 2. Initialisierbarkeit:

Die Ionen in der Falle werden durch Doppler- und Seitenband-Kühlung in ihren Bewegungsgrundzustand gebracht. Die ioneninternen Qubit-zustände können durch optisches Pumpen initialisiert werden. Am Beispiel  $^{40}\text{Ca}^+$  werden dafür die Übergänge  $S_{1/2} \Rightarrow D_{5/2}$  und  $D_{5/2} \Rightarrow P_{3/2}$  benutzt um die Ionen in den Grundzustand  $S_{1/2, m_j = -1/2}$  zu pumpen.<sup>6</sup> (eine ausführliche Beschreibung des Niveauschemas in 9).

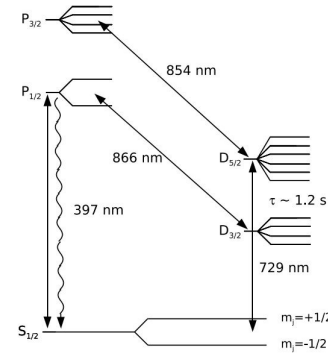


Abbildung 5: Niveauschema  $^{40}\text{Ca}^+$  [6, Fig. 4]

### 3. Kohärenz-Zeit:

Die Kohärenz-Zeit in Ionenfallen-Quantencomputern wird limitiert durch:

- die Lebensdauer der Qubit-Zustände. Bei  $^{40}\text{Ca}^+$  ist diese mit  $\tau \approx 1,2\text{s}$  also lang gegenüber der Zeit für Gatter-Operationen, die typischerweise einige  $ms$  dauern.
- die Stabilität der Bewegungs-Zustände, also Anregung der Bewegung durch äußere Störungen während Gatter-Operationen, wie z.B: Schwankungen der Fallenfrequenz oder Magnetfeld-Fluktuationen<sup>6</sup> und
- die Stabilität der kohärenten Superposition.

### 4. Universeller Satz an Quantengattern:

#### (a) Ein-Qubit-Operationen:

Ein-Qubit-Operationen finden auf dem „Träger-Übergang“:  $|g\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow |e\rangle = |1\rangle$  statt und können mathematisch als Rotationen auf einer Bloch-Kugel dargestellt werden:

$$R^C(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & ie^{i\phi} \sin \theta/2 \\ ie^{-i\phi} \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix}$$

Je nach Länge  $\tau$  des eingestrahnten Laserpulses ergeben sich verschiedene Rotationswinkel  $\theta = \Omega\tau$  und damit jede mögliche Operation auf einem Qubit.

(b) Zwei-Qubit-Gatter:

Die Cirac-Zoller CNOT-Gatter Operation zwischen zwei Qubits (auf zwei verschiedenen Ionen) setzt sich zusammen aus:

- i. Übertragung des Zustands von Ion 1 auf den Bus (Schwingung):  
z.B. mit einem  $\pi$ -Puls auf dem roten Seitenband, wodurch der Zustand  $|e_1, 0\rangle$  in den Zustand  $|g_1, 1\rangle$  übergeht und der Zustand  $|g_1, 0\rangle$  unbeeinflusst bleibt. ( wobei hier:  $|Qubit, Bus\rangle$  )
- ii. Logische Operation zwischen dem Ion 2 und dem Bus:  
Mit einer weiteren Puls-Sequenz auf das zweite Ion, kann dessen Zustand geändert werden, z.B. falls der Bus im Zustand  $|1\rangle$  ist, das so genannte "single-ion-controlled-NOT"-Gatter.<sup>8</sup>
- iii. Rückgängig machen von Schritt i. :  
Mit der selben Operation wie in i. wird der Zustand von Ion 1 und der Schwingungszustand wieder zurück in den Ausgangszustand gebracht.

Geht man nun von einem allgemeinen Überlagerungszustand für Ion 1 aus (Ion 2 und Bus im Grundzustand):

$$(\alpha |g_1\rangle + \beta |e_1\rangle) \otimes |g_2\rangle \otimes |0_B\rangle$$

und wendet auf diesen das CNOT-Gatter an, so erhält man damit den folgenden verschränkten Zustand für die beiden Ionen:

$$(\alpha |g_1\rangle |g_2\rangle + \beta |e_1\rangle |e_2\rangle) \otimes |0_B\rangle$$

und der Bus-Zustand ist mit keinem der beiden Ionen-Zustände verschränkt.

5. *Messbarkeit:*

Sind alle zu einem Quantenalgorithmus gehörigen Gatter-Operationen abgeschlossen, muss der Endzustand der Qubits ausgelesen werden und in ein klassisches „Ergebnis“ übersetzt werden. Allgemein wird dazu ein Übergang:  $|g\rangle \Leftrightarrow |r\rangle$  benutzt, der fluoresziert, wenn das Ion im Grundzustand  $|g\rangle$  ist, bzw. nicht fluoresziert, wenn es sich im angeregten Zustand  $|e\rangle$  befindet. Am Beispiel  $^{40}\text{Ca}^+$  werden dazu Laser auf den Übergängen von  $S_{1/2} \Rightarrow P_{1/2}$  und  $D_{3/2} \Rightarrow P_{1/2}$  eingestrahlt, sodass ein Ion nicht fluoresziert, wenn es im Zustand  $D_{5/2}$  ist. Wenn es in einem der Zustände:  $S_{1/2}$ ,  $P_{1/2}$  oder  $D_{3/2}$  ist, findet Fluoreszenz statt.<sup>6,9</sup>

Das Ergebnis der Messungen zur experimentellen Realisierung des Cirac-Zoller CNOT-Gatters ist im folgenden Bild (Abb. 6) dargestellt. Idealerweise sollte sich das Abbild der Matrix aus Gleichung 1 ergeben. Experimentell wurden Genauigkeiten von 70 – 80% erreicht.<sup>8</sup>

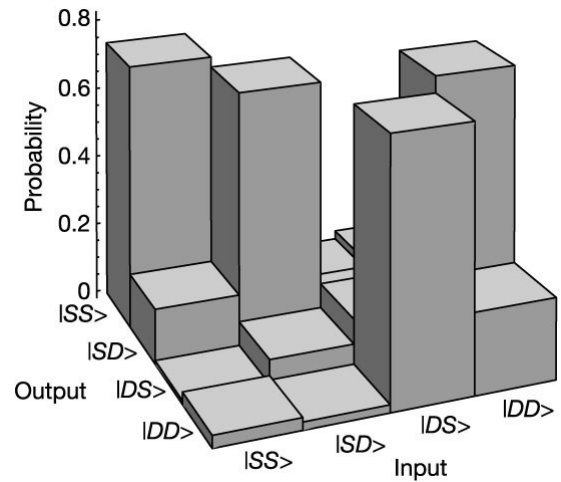


Abbildung 6: Ergebnis der experimentellen Untersuchung der Cirac-Zoller CNOT Operation zwischen zwei Ionen, wobei  $|SS\rangle = |00\rangle$ ,  $|SD\rangle = |01\rangle$  etc. die Zustände der beiden Ionen vor bzw. nach der CNOT-Operation sind. [8, Fig. 3]

## Literatur

- [1] Peter W. Shor - Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer - SIAM J.Sci.Statist.Comput. 26 (1997) 1484
- [2] D. P. DiVincenzo - The Physical Implementation on Quantum Computation - Fortschr. Phys. 48, 771-783 (2000)
- [3] J.I.Cirac and P.Zoller - Quantum Computations with Cold Trapped Ions - Phys. Rev. Lett. 74, 4091-4094 (1995)
- [4] M. A. Nielsen and I. L. Chuang - Quantum Computation and Quantum Information, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000)
- [5] G. Morigi, J. Eschner, J.I. Cirac and P. Zoller - Laser cooling of two trapped ions: Sideband cooling beyond the Lamb-Dicke limit - Phys. Rev. Lett. A 59, 3797 (1999)
- [6] H. Häffner, C.F. Roos and R. Blatt - Quantum computation with trapped ions - Physics Reports 469, 155 (2008)
- [7] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, D. Wineland - Quantum dynamics of single trapped ions - Rev. Mod. Phys. 75, 281 (2003)
- [8] R. Blatt - Realization Of the Cirac-Zoller controlled-NOT quantum gate - Nature Vol. 422, p.408 (2003)
- [9] J. Benhelm, G. Kirchmair, C. F. Roos, and R. Blatt - Experimental quantum-information processing with  $^{43}\text{Ca}^+$  ions - Phys. Rev. Lett. A 77, 062306 (2008)