

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory

II

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic

{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 2

Obsah přednášky

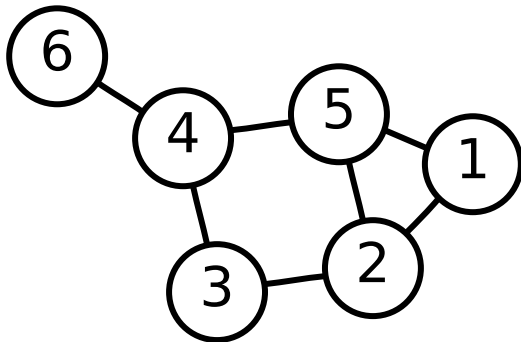
- 1 Graf
- 2 Základní pojmy
- 3 Typy grafů
- 4 Některá rozšíření pojmu grafu
- 5 Analogie se známými pojmy

Graf

- Graf G je dvojice (V, E)
 - V = množina vrcholů (též $G(V)$)
 - E = množina hran (též $G(E)$) – obsahuje vybrané dvouprvkové podmnožiny V
- Základní model pro mnoho praktických aplikací
 - mapy – maps.google, mapy.cz
 - počítačové sítě
 - modelování procesů
 - konečné automaty
 - syntaktické rozbory
 - sémantické sítě
 - ...

Příklad grafu

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}$$

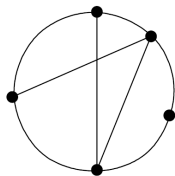
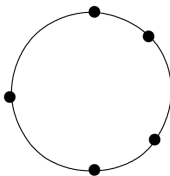
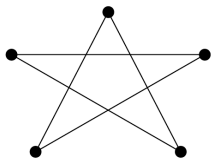


Základní pojmy

- Sousední vrcholy
 - spojené nějakou hranou
- Stupeň vrcholu
 - počet hran, které z daného vrcholu vychází
- Podgraf grafu G
 - obsahuje pouze vybrané vrcholy a hrany z grafu G
 - hrany musí být pouze mezi vybranými vrcholy (výsledek musí opět tvořit graf)
- Isomorfismus mezi grafy G a G'
 - bijekce $f : V(G) \rightarrow V(G')$ taková, že $\{u, v\}$ je hrana v G právě tehdy, když $\{f(u), f(v)\}$ je hrana v G'
 - grafy jsou **isomorfní** (shodné), pokud mezi nimi existuje isomorfismus

Isomorfismus – příklad

Které z následujících grafů jsou isomorfní?



Typy grafů (I)

■ Kružnice (délky $n > 2$)

- $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$
- stejný počet vrcholů a hran
- všechny vrcholy stupně 2
- náčrt grafu tvoří kružnici

■ Cesta (na n vrcholech)

- $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$
- kružnice s jednou chybějící hranou
- počáteční a koncový vrchol

Typy grafů (II)

- Úplný graf (na n vrcholech)
 - $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
 - $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$
 - každé dva vrcholy jsou spojeny hranou

Zajímavé podgrafy

- Cyklus (kružnice) v grafu
 - podgraf, který je isomorfní s nějakou kružnicí
- Cesta v grafu
 - podgraf, který je isomorfní s nějakou cestou
- Klika v grafu
 - podgraf, který je isomorfní s nějakým úplným grafem

Typy grafů (III)

- Acyklický, resp. „les”
 - neobsahuje kružnici (cyklus) jako podgraf
- Souvislý
 - mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta
- Strom
 - acyklický souvislý graf

Některá rozšíření pojmu grafu

■ Orientovaný graf

- hrany jsou orientovány
- \rightarrow zdrojový a cílový vrchol
- \rightarrow množina hran je množina uspořádaných dvojic

■ Ohodnocený graf

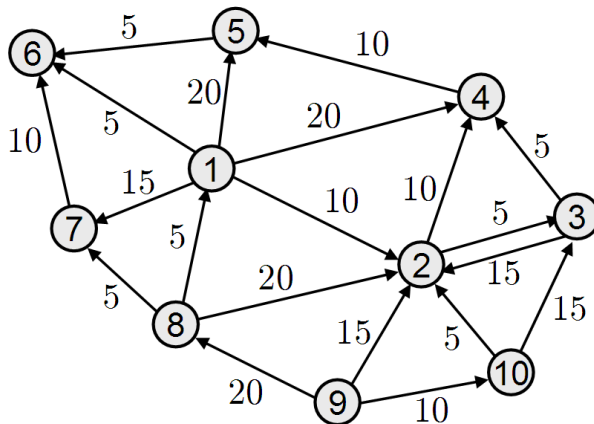
- hrany jsou ohodnoceny (např. vzdáleností mezi vrcholy)
- formálně funkce $e : G(E) \rightarrow \mathbb{R}$

■ Multigraf

- povoluje více hran mezi dvěma stejnými vrcholy
- povoluje hrany začínající a končící ve stejném vrcholu („smyčky“)

■ Výše uvedené pojmy se mohou libovolně kombinovat

Příklad – orientovaný ohodnocený graf



Analogie se známými pojmy

- Graf lze popsat jako relaci na množině vrcholů
 - množina hran je chápána jako relace
 - orientovaný graf – nereflexivní relace
 - neorientovaný graf – nereflexivní symetrická relace
- Přechodový graf konečného automatu
 - orientovaný ohodnocený multigraf
 - ohodnocení symboly abecedy (nikoli čísla)
 - (navíc máme vrcholy dvou typů)