

GRUPY

POLOGRUPY

SVAZY

GRUPA

Grupou nazýváme množinu G spolu s binární operací na ní (značíme např. $*$), která se nazývá **grupovou operací**.

Tato operace libovolným dvěma prvky a, b přiřazuje prvek téže grupy: **$a * b = c$** .

Podle kontextu říkáme, že c je *složení* (*součin*, *součet*) prvků a a b .

GRUPOVÁ OPERACE MUSÍ SPLŇOVAT URČITÉ VLASTNOSTI, AXIOMY GRUPY

i) **uzavřenost:** $(\forall a, b \in G): a * b \in G$

i) **asociativita:** $(\forall a, b, c \in G): a * (b * c) = (a * b) * c$

i) **existence neutrálního prvku:**
 $(\exists e \in G) (\forall a \in G): a * e = e * a = a$

i) **existence inverzního prvku:**
 $(\forall a \in G) (\exists b \in G): a * b = b * a = e$
(b je inverzní prvek k prvku a a značí se a^{-1})

DEFINICE GRUPY POMOCÍ TŘÍ OPERACÍ:

- i) **nulární operace** (tj. konstanty) e představující neutrální prvek

- i) **unární operace** $^{-1}$, která každému prvku přiřadí prvek k němu inverzní

- i) **binární operace**

GRUPOID

MNOŽINU (M), NA KTERÉ JE DEFINOVÁNA JEDNA BINÁRNÍ OPERACE (*) NAZÝVÁME GRUPOID A ZNAČÍME (M ; *).

Grupoid (M; *) se nazývá asociativní, právě když $(\forall x, y, z \in M)(x * y) * z = x * (y * z)$ – tj. operace na něm definovaná je asociativní. Pokud je grupoid asociativní, nazývá se **pologrupa**.

Grupoid (M; *) se nazývá **grupoid s neutrálním prvkem**, právě když $(\exists e \in M)(\forall x \in M) e * x = x * e = x$ – tj. operace na něm definovaná má neutrální prvek.

Grupoid (M; *) se nazývá **grupoid s inverzními prvky**, právě když $1 \in M \wedge (\forall x \in M)(\exists y \in M) x * y = y * x = 1$ – tj. obsahuje jednotkový prvek a ke každému prvku také inverzní prvek.

Grupoid (M; *) se nazývá **komutativní**, právě když $(\forall x, y \in M) x * y = y * x$ – tj. operace na něm definovaná je komutativní.

GRUPOID

**MNOŽINU (M), NA KTERÉ JE DEFINOVÁNA
JEDNA BINÁRNÍ OPERACE (*) NAZÝVÁME
GRUPOID A ZNAČÍME (M ; *).**

Grupoid (M; *) se nazývá grupoid s krácením zleva, právě když $(\forall x, y, z \in M) (z * x = z * y \Rightarrow x = y)$.

Grupoid (M; *) se nazývá grupoid s krácením zprava, právě když $(\forall x, y, z \in M) (x * z = y * z \Rightarrow x = y)$.

Grupoid (M; *) se nazývá grupoid s krácením, právě když $(\forall x, y, z \in M) (z * x = z * y \Rightarrow x = y) \wedge (x * z = y * z \Rightarrow x = y)$.

Grupoid (M; *) se nazývá grupoid s dělením, právě když $(\forall x, y \in M)(\exists u, v \in M) (x * u = y \wedge v * x = y)$.

TEORIE SVAZŮ

Částečně uspořádaná množina formalizuje uspořádání (určení pořadí některých prvků) na množině. Skládá se z množiny a binární relace popisující uspořádání jednotlivých dvojic prvků.

Částečné uspořádání je binární relace \leq na množině G , která je:

→ **reflexivní:** $(\forall x, y, z \in G) a \leq a$

→ **tranzitivní:** $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

→ **antisymetrická:** $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

MAXIMUM A MINIMUM

Máme množinu X . Existuje číslo M z množiny X , tak že pro všechna $x \in X$ platí $x \leq M$. Číslo M nazýváme maximum množiny X označujeme ho $\max X$.

Máme množinu X . Existuje číslo m z množiny X , tak že pro všechna $x \in X$ platí $m \leq x$. Číslo M nazýváme minimum množiny X označujeme ho $\min X$.

Každá konečná množina má maximum a minimum.

OHRANIČENÍ MNOŽINY

Množina X se nazývá zhora ohraničená, pokud existuje takové číslo B takové, že pro každé $x \in X$ platí $x \leq B$.

Množina X se nazývá zdola ohraničená, pokud existuje takové číslo b takové, že pro každé $x \in X$ platí $b \leq x$.

Číslo B nazýváme horním ohraničením množiny X a číslo b dolním ohraničením množiny X .

Množina ohraničená zdola i zhora sa nazývá ohraničená.

SUPREMUM A INFIMUM

Nejmenší horní ohraničení množiny X se nazývá supremum množiny X a značí se $\sup X$.

Největší dolní ohraničení množiny X se nazývá infimum množiny X a značí se $\inf X$.

SVAZY

Definice: Uspořádaná množina, v níž ke každým dvěma prvkům existuje supremum i infimum, se nazývá **SVAZ**.

SVAZ je uspořádaná množina (A, \subseteq) , kde pro každé $a, b \in A$ existuje $\sup(\{a, b\})$ a $\inf(\{a, b\})$.

Necht' (A, \leq) je uspořádaná množina, kde $\forall (a, b \in A) \exists ((\sup(a, b) = (a \vee b) \wedge (\inf(a, b) = (a \wedge b)))$, pak (A, \vee, \wedge) je **SVAZ** a (A, \vee) a (A, \wedge) jsou **POLOSVAZY**.

OPERACE VE SVAZU

Je-li dána uspořádaná množina (A, \subseteq) , která je **svazem**, tj. existují suprema a infima každé dvojice prvků $a, b \in A$. Pak $\sup(\{a, b\})$ a $\inf(\{a, b\})$ jsou dána jednoznačně a můžeme je tedy považovat za **binární operace**. Svaz budeme značit $(A, \vee, \wedge, \subseteq)$.

Označme $a \vee b = \sup(\{a, b\})$; $a \wedge b = \inf(\{a, b\})$. Operace \vee se nazývá spojení, operace \wedge se nazývá průsek.

OPERACE VE SVAZU

Je-li dán svaz (A, \subseteq) , pak pro operace \vee a \wedge platí:

Pro každý prvek $a \in A$ platí:

$$a \vee a = a \quad \text{a zároveň} \quad a \wedge a = a$$

Pro každé dva prvky $a, b \in A$ platí:

$$a \vee b = b \vee a \quad \text{a zároveň} \quad a \wedge b = b \wedge a$$

Pro každé tři prvky $a, b, c \in A$ platí:

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \quad \text{a zároveň} \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

Pro každé dva prvky $a, b \in A$ platí:

$$a \vee (b \wedge a) = a \quad \text{a zároveň} \quad a \wedge (b \vee a) = a$$