Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory II

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 7

Obsah přednášky

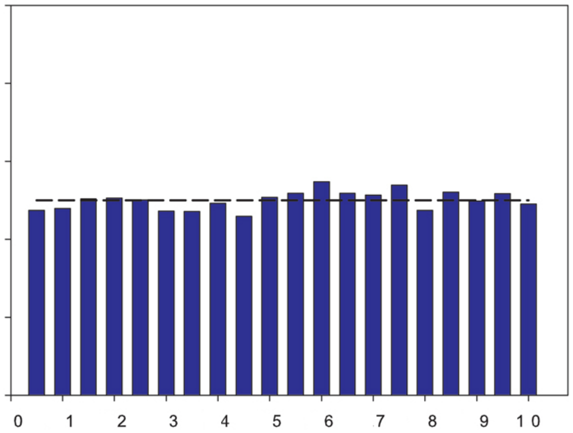
Pravděpodobnostní rozložení

- Funkce, která každé hodnotě přiřadí pravděpodobnost jejího výskytu
  - vyjadřujeme obvykle grafem
  - může být odvozena ze statistického souboru
- Často rozložení aproximujeme "ideální" funkcí
  - vyjádřitelnou vzorcem
  - určíme typ pravděpodobnostního rozložení
- Nejčastější typy rozložení
  - využití pro velkou škálu jevů
  - uniformní rozložení, normální rozložení, Zipfovo rozložení

Uniformní rozložení

- Všechny možnosti mají stejnou pravděpodobnost
  - např. házení (vyváženou) kostkou
  - možnosti 1, 2, 3, 4, 5, 6 mají pravděpodobnost 1/6
  - ostatní mají 0
  - grafem jsou body tvořící úsečku

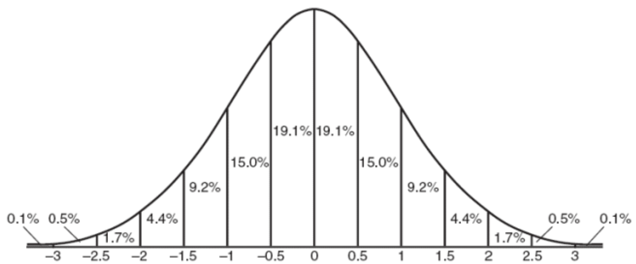
Uniformní rozložení: příklad



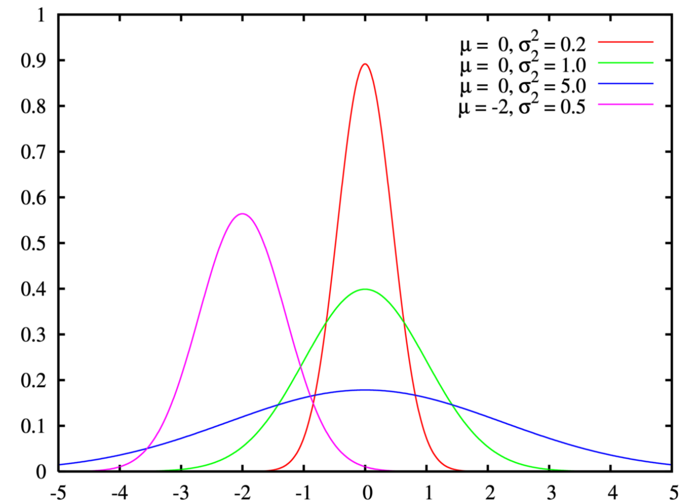
Normální rozložení

- Normální rozložení
  - různé vlastnosti populací
  - např. výška, váha (slonů, lidí)
  - nejpravděpodobnější hodnoty jsou ty, které jsou blízké průměru
  - hodnoty vzdálenější od průměru jsou málo pravděpodobné
  - grafem jsou body tvořící „zvon" s osou v průměrné hodnotě

Normální rozložení: příklad



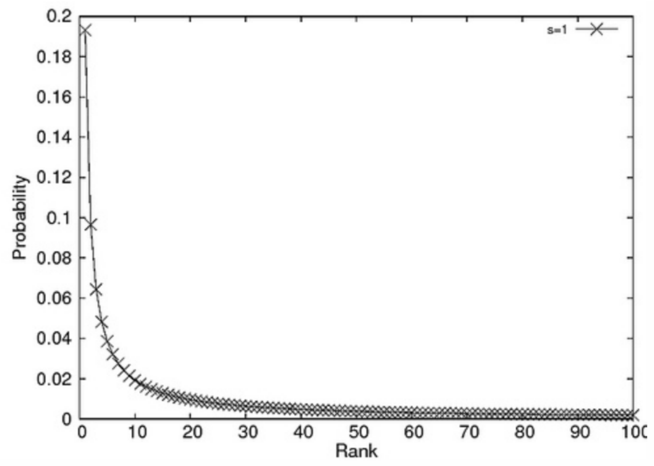
Normální rozložení: příklad



Zipfovo rozložení

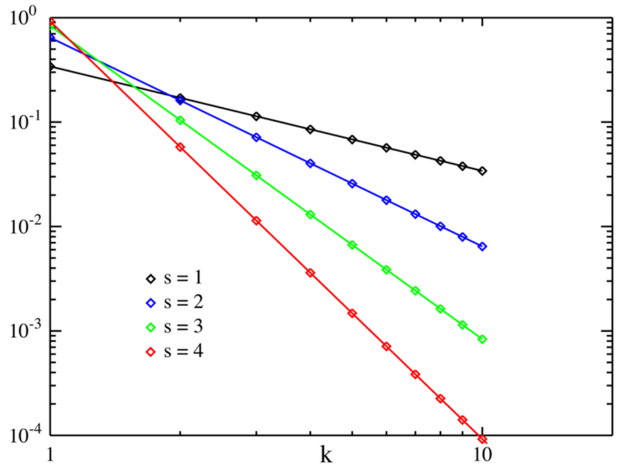
- Zipfovo rozložení
  - několik málo hodnot má velkou pravděpodobnost
  - pravděpodobnost dalších v pořadí prudce klesá
  - např. první hodnota má pravděpodobnost n, druhá $n/2$, třetí $n/3$ atd.
  - velmi často výstižně popisuje frekvenční distribuce (měst podle velikosti, slov v přirozeném jazyce podle počtu výskytů, ...)

Zipfovo rozložení: příklad



Zipfovo rozložení: logaritmické osy

V případě logaritmických os tvoří graf Zipfova rozložení přímku



Zipfův zákon

- Zipfovo rozložení dobře popisuje rozložení jazykových jevů
  - nejfrekventovanější jevy pokrývají většinu jazyka
  - frekvence (pravděpodobnost výskytu) je nepřímo úměrná pořadí podle frekvence
- Např. výskyty slov v angličtině
  - „the" tvoří 7 % slovních výskytů
  - „of" tvoří 3,5 % slovních výskytů
  - polovinu anglického korpusu pokrývá 135 nejčastějších slov
- Zipfův zákon v přirozeném jazyce platí, kam se podíváte

Frekvence morf. značek (podst. jm. a slovesa, korp. Brown)

tag	Freq
NN	161881
NP	62669
NNS	56629
VVN	27545
VV	27481
VVD	27391
VVG	16922
VBD	13275
VBZ	11321
VVZ	8254
VVP	7912
VB	6377
VBP	5211
VHD	5190
VHZ	2497
VBN	2470
VHP	2445
VH	1780
NPS	1524
VBG	674
VHG	279
VHN	194

Zipfův zákon – zajímavosti

- Platí pro většinu přirozených jazyků
  - dokonce i pro sekvence náhodně volených znaků (vč. mezery)
  - pro širokou škálu jevů (distribuce významů slov, syntaktických vazeb, ...)
  - je třeba s ním vždy počítat
- „Ekonomické pravidlo" 80 : 20
  - 80 % problému vyřešíme s 20 % úsilím
  - alternativní formulace Zipfova zákona
- Platí i pro mnoho „nejazykových" jevů
  - počet obyvatel měst, platy, velikost společností, ...

Zákon velkých čísel

- Potřeba velkých dat
  - čím více pokusů provádíme, tím větší je pravděpodobnost, že průměr výsledků pokusů bude odpovídat očekávané hodnotě (vypočtenému průměru)
- Alternativně
  - čím více dat máme, tím méně náhodných odchylek budou obsahovat
- Například
  - pokud budeme sledovat jednu molekulu vody v moři, bude se její pohyb jevit náhodný
  - pokud budeme sledovat významný podíl molekul, jsme schopni pozorovat vlnění, příliv a odliv, mořské proudy...

Zákon velkých čísel

- Platí ve všech oblastech statistiky
  - pokud budeme mít jazykový korpus o např. 100 slovech, jsme příliš ovlivněni náhodností výběru a statistické charakteristiky nemají smysl
  - $\rightarrow$ korpusy o velikosti miliard slov

Statistické testování hypotéz

- Cíl: statistická průkaznost
  - ověřit, zda příslušná statistická data potvrzují nějakou hypotézu
- Příklad: hádání karet
  - člověk se pokouší uhádnout barvu karty, která je mu ukázána z rubu
  - kolikrát musí uhodnout (např. z 25 pokusů), abychom mohli říct, že „je jasnovidec"?
  - uhádne 5x – nejspíš náhoda
  - uhádne 24x – nejspíš je jasnovidec
  - uhádne 11x – ?
  - jak určit hranici?

Statistické testování hypotéz

- I 25 úspěšných pokusů může být náhoda
  - vyloučit to neumíme
  - umíme ale vyjádřit pravděpodobnost takové události

Statistické testování hypotéz: pojmy

- Nulová hypotéza H_0
  - výchozí názor, který chceme vyvrátit
  - „dotyčný není jasnovidec"
- Alternativní hypotéza H_1
  - ta, pro kterou hledáme oporu v datech
  - „dotyčný je jasnovidec"
- Chyba typu I
  - potvrdíme alternativní hypotézu, ta přitom neplatí
  - prohlásíme dotyčného za jasnovidce, ten přitom jen tipoval
  - chceme minimalizovat pravděpodobnost této chyby

Statistické testování hypotéz: pravděpodobnost chyby

- Pravděpodobnost chyby
  - 1 tip má pravděpodobnost úspěchu 1/4
  - 25/25 úspěšných pokusů: $(1/4)^{25}$, tj. cca 10^{-15}
  - (předpokládáme, že pokusy jsou nezávislé)
  - $\rightarrow$ pokud v případě 25 úspěšných pokusů prohlásíme dotyčného za jasnovidce, spleteme se s pravděpodobností cca 10^{-15}
- Statistická průkaznost
  - pokud pravděpodobnost chyby je menší než 1-5 %
  - došlo k vyvrácení nulové hypotézy
  - = alternativní hypotéza byla statisticky prokázána
  - 1 % odpovídá 12/25 úspěšným pokusům v hádání karet

Statistické testování hypotéz: nástrahy

- Opakování pokusů
  - pokud zopakujeme pokus vícekrát, pravděpodobnost chyby se zvětšuje
  - musíme uvažovat všechny provedené pokusy
- Pokud se nepodaří vyvrátit nulovou hypotézu
  - neznamená to, že nulová hypotéza platí
  - „nepodařilo se prokázat souvislost" $\neq$ „podařilo se prokázat, že souvislost neexistuje"
  - podobně neprokázání viny u soudu neprokazuje nevinu obžalovaného