

**GRUPY**

**POLOGRUPY**

**SVAZY**

# GRUPA

**Grupou** nazýváme množinu  $G$  spolu s binární operací na ní (značíme např.  $*$ ), která se nazývá **grupovou operací**.

Tato operace libovolným dvěma prvky  $a, b$  přiřazuje prvek téže grupy:  **$a * b = c$** .

Podle kontextu říkáme, že  $c$  je *složení* (*součin*, *součet*) prvků  $a$  a  $b$ .

# GRUPOVÁ OPERACE MUSÍ SPLŇOVAT URČITÉ VLASTNOSTI, AXIOMY GRUPY

i) **uzavřenost:**  $(\forall a, b \in G): a * b \in G$

i) **asociativita:**  $(\forall a, b, c \in G): a * (b * c) = (a * b) * c$

i) **existence neutrálního prvku:**  
 $(\exists e \in G) (\forall a \in G): a * e = e * a = a$

i) **existence inverzního prvku:**  
 $(\forall a \in G) (\exists b \in G): a * b = b * a = e$   
(b je inverzní prvek k prvku a a značí se  $a^{-1}$ )

# DEFINICE GRUPY POMOCÍ TŘÍ OPERACÍ:

- i) **nulární operace** (tj. konstanty)  $e$  představující neutrální prvek
  
- i) **unární operace**  $^{-1}$ , která každému prvku přiřadí prvek k němu inverzní
  
- i) **binární operace**

# GRUPOID

**MNOŽINU ( M ), NA KTERÉ JE DEFINOVÁNA JEDNA BINÁRNÍ OPERACE (\*) NAZÝVÁME GRUPOID A ZNAČÍME ( M ; \*).**

**Grupoid (M; \*)** se nazývá asociativní, právě když  $(\forall x, y, z \in M)(x * y) * z = x * (y * z)$  – tj. operace na něm definovaná je asociativní. Pokud je grupoid asociativní, nazývá se **pologrupa**.

**Grupoid (M; \*)** se nazývá **grupoid s neutrálním prvkem**, právě když  $(\exists e \in M)(\forall x \in M) e * x = x * e = x$  – tj. operace na něm definovaná má neutrální prvek.

**Grupoid (M; \*)** se nazývá **grupoid s inverzními prvky**, právě když  $1 \in M \wedge (\forall x \in M)(\exists y \in M) x * y = y * x = 1$  – tj. obsahuje jednotkový prvek a ke každému prvku také inverzní prvek.

**Grupoid (M; \*)** se nazývá **komutativní**, právě když  $(\forall x, y \in M) x * y = y * x$  – tj. operace na něm definovaná je komutativní.

# GRUPOID

**MNOŽINU ( M ), NA KTERÉ JE DEFINOVÁNA JEDNA BINÁRNÍ OPERACE (\*) NAZÝVÁME GRUPOID A ZNAČÍME ( M ; \*).**

**Grupoid (M; \*) se nazývá grupoid s krácením zleva, právě když  $(\forall x, y, z \in M) (z * x = z * y \Rightarrow x = y)$ .**

**Grupoid (M; \*) se nazývá grupoid s krácením zprava, právě když  $(\forall x, y, z \in M) (x * z = y * z \Rightarrow x = y)$ .**

**Grupoid (M; \*) se nazývá grupoid s krácením, právě když  $(\forall x, y, z \in M) (z * x = z * y \Rightarrow x = y) \wedge (x * z = y * z \Rightarrow x = y)$ .**

**Grupoid (M; \*) se nazývá grupoid s dělením, právě když  $(\forall x, y \in M)(\exists u, v \in M) (x * u = y \wedge v * x = y)$ .**

# TEORIE SVAZŮ

**Částečně uspořádaná množina** formalizuje uspořádání (určení pořadí některých prvků) na množině. Skládá se z množiny a binární relace popisující uspořádání jednotlivých dvojic prvků.

**Částečné uspořádání je binární relace  $\leq$  na množině  $G$ , která je:**

→ **reflexivní:**  $(\forall x, y, z \in G) a \leq a$

→ **tranzitivní:**  $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

→ **antisymetrická:**  $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

# MAXIMUM A MINIMUM

Máme množinu  $X$ . Existuje číslo  $M$  z množiny  $X$ , tak že pro všechna  $x \in X$  platí  $x \leq M$ . Číslo  $M$  nazýváme maximum množiny  $X$  označujeme ho  $\max X$ .

Máme množinu  $X$ . Existuje číslo  $m$  z množiny  $X$ , tak že pro všechna  $x \in X$  platí  $m \leq x$ . Číslo  $m$  nazýváme minimum množiny  $X$  označujeme ho  $\min X$ .

**Každá konečná množina má maximum a minimum.**



# OHRANIČENÍ MNOŽINY

Množina  $X$  se nazývá zhora ohraničená, pokud existuje takové číslo  $B$  takové, že pro každé  $x \in X$  platí  $x \leq B$ .

Množina  $X$  se nazývá zdola ohraničená, pokud existuje takové číslo  $b$  takové, že pro každé  $x \in X$  platí  $b \leq x$ .

Číslo  $B$  nazýváme horním ohraničením množiny  $X$  a číslo  $b$  dolním ohraničením množiny  $X$ .

Množina ohraničená zdola i zhora sa nazývá ohraničená.

# **SUPREMUM A INFIMUM**

**Nejmenší horní ohraničení množiny  $X$  se nazývá supremum množiny  $X$  a značí se  $\sup X$ .**

**Největší dolní ohraničení množiny  $X$  se nazývá infimum množiny  $X$  a značí se  $\inf X$ .**

# SVAZY

**Definice:** Uspořádaná množina, v níž ke každým dvěma prvkům existuje supremum i infimum, se nazývá **SVAZ**.

**SVAZ** je uspořádaná množina  $(A, \subseteq)$ , kde pro každé  $a, b \in A$  existuje  $\sup(\{a, b\})$  a  $\inf(\{a, b\})$ .

Necht'  $(A, \leq)$  je uspořádaná množina, kde  $\forall (a, b \in A) \exists ((\sup(a, b) = (a \vee b) \wedge (\inf(a, b) = (a \wedge b)))$ , pak  $(A, \vee, \wedge)$  je **SVAZ** a  $(A, \vee)$  a  $(A, \wedge)$  jsou **POLOSVAZY**.

# OPERACE VE SVAZU

Je-li dána uspořádaná množina  $(A, \subseteq)$ , která je **svazem**, tj. existují suprema a infima každé dvojice prvků  $a, b \in A$ . Pak  $\sup(\{a, b\})$  a  $\inf(\{a, b\})$  jsou dána jednoznačně a můžeme je tedy považovat za **binární operace**. Svaz budeme značit  $(A, \vee, \wedge, \subseteq)$ .

Označme  $a \vee b = \sup(\{a, b\})$ ;  $a \wedge b = \inf(\{a, b\})$ . Operace  $\vee$  se nazývá spojení, operace  $\wedge$  se nazývá průsek.

# OPERACE VE SVAZU

**Je-li dán svaz  $(A, \subseteq)$ , pak pro operace  $\vee$  a  $\wedge$  platí:**

Pro každý prvek  $a \in A$  platí:

$$a \vee a = a \quad \text{a zároveň} \quad a \wedge a = a$$

Pro každé dva prvky  $a, b \in A$  platí:

$$a \vee b = b \vee a \quad \text{a zároveň} \quad a \wedge b = b \wedge a$$

Pro každé tři prvky  $a, b, c \in A$  platí:

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \quad \text{a zároveň} \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

Pro každé dva prvky  $a, b \in A$  platí:

$$a \vee (b \wedge a) = a \quad \text{a zároveň} \quad a \wedge (b \vee a) = a$$