

# MNOŽINY

**VZTAHY, OPERACE, BINÁRNÍ OPERACE,  
KARTÉZSKÝ SOUČIN, BINÁRNÍ RELACE,  
VLASTNOSTI RELACÍ**

# VZTAHY MEZI MNOŽINAMI

## podmnožina (inkluze)

$$A \subseteq B$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

## rovnost

$$A = B$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

## vlastní podmnožina

$$A \subset B$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \exists x (x \in B \wedge x \notin A))$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x ((A(x) \Rightarrow B(x)) \wedge \exists x (B(x) \wedge \neg A(x)))$$

# MNOŽINOVÉ OPERACE

## sjednocení množin

$$A \cup B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \vee x \in B)$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

## průnik množin

$$A \cap B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \wedge x \in B)$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(disjunktní množiny:  $A \cap B = \emptyset$ )

## rozdíl množin

$$A - B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \wedge x \notin B)$$

## doplňěk množiny

$$A' = B - A \Leftrightarrow \forall x (x \in B \wedge x \notin A)$$

# VLASTNOSTI BINÁRNÍCH OPERACÍ

komutativní (nezáleží na pořadí)

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

asociativní

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Idempotentní

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

distributivní

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

# KARTÉZSKÝ SOUČIN

## uspořádaná dvojice

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

UD je dvouprvková množina obsahující jako své prvky dvě množiny, z nichž jedna je jednoprvková a je podmnožinou druhé, dvouprvkové. Prvek jednoprvkové množiny považujeme za první prvek UD, prvek dvouprvkové množiny, který není prvkem jednoprvkové množiny, považujeme za druhý prvek UD.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

## kartézský součin množin A, B

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}$$

KS množin A, B je množina všech uspořádaných dvojic takových, že jejich první prvek KS je prvkem množiny A a druhý prvek prvkem množiny B.

# BINÁRNÍ RELACE

**Definice:** Binární relace z množiny  $A$  do množiny  $B$  se nazývá každá podmnožina kartézského součinu  $A \times B$ .

Je-li  $A = B$ , pak mluvíme o binární relaci v množině  $A$ .

Doplňková relace  $R'$  k relaci  $R$  v množině  $A$  je množina všech uspořádaných dvojic z  $A \times A$ , které nepatří do relace  $R$ , tj.  $R' = (A \times A) - R$ .

Relace  $R$  z množiny  $A$  do množiny  $B$  se nazývá **zobrazením** z  $A$  do  $B$ , právě když ke každému prvku  $a \in A$  existuje nejvýše jeden prvek  $b \in B$  takový, že platí  $(a, b) \in R$ .

(Tedy každý prvek z množiny  $A$  se může vyskytnout jako první složka uspořádané dvojice v relaci  $R$  nejvýše jednou.)

Jestliže  $(a, b) \in R$ , pak prvek  $a$  nazýváme vzorem prvku  $b$  a prvek  $b$  obrazem prvku  $a$  v zobrazení  $R$  (nebo že zobrazení  $R$  přiřazuje prvku  $a$  prvek  $b$ ).

# VLASTNOSTI RELACÍ

Nechť  $U$  je binární relace v  $A$ . Relace  $U$  se nazývá:

1. **reflexivní** právě, když pro všechny prvky platí, že prvek je v relaci se sebou samým

$$\forall x \in A: (x, x) \in U$$

2. **antireflexivní** právě, když platí

$$\forall x \in A: (x, x) \notin U$$

3. **symetrická** právě, když platí

$$\forall x, y \in A: (x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \in U$$

4. **antisymetrická** právě, když platí

$$\forall x, y \in A: (x, y) \in U \wedge x \neq y \Rightarrow (y, x) \notin U$$

5. **transitivní** právě, když platí

$$\forall x, y, z \in A: (x, y) \in U \wedge (y, z) \in U \Rightarrow (x, z) \in U$$

5. **Ekvivalence** je binární relace, která je reflexivní, symetrická, a tranzitivní současně.