Př. 1

Mějme definována přirozená čísla a základní operace na nich. Definujte dělitelnost.

Př. 2

Na základě definice dělitelnosti definujte sudé a liché číslo. Definujte je i bez využití dělitelnosti.

Př. 3

Dokažte, že součet dvou, tří, čtyř sudých čísel je sudé číslo. Využijte přímý důkaz i důkaz sporem.

Př. 4

Dokažte, že součet dvou lichých čísel je sudé číslo. Dokažte, že součet tří lichých čísel je liché číslo. Využijte přímý důkaz i důkaz sporem.

Př. 5

Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b platí:
pokud $2 * a * a = b * b$, pak b je sudé.

Př. 6

Vyjádřete výroky $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ pouze pomocí negace a implikace.

Př. 7

Vyjádřete výrok $(A \Rightarrow B)$ pouze pomocí negace a disjunkce.

Př. 8

Mějme výroky:

- A: x je sudé.
- B: y je sudé.
- C: x + y je sudé

Přečtěte následující výroky:

- $A \Rightarrow C$

- $(A \vee B) \Rightarrow C$
- $(A \wedge \neg A)$
- $(A \wedge \neg A) \Rightarrow C$
- $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow C$
- $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg C$

Které z nich jsou pravdivé?

Př. 9

Přepište v jazyce predikátové logiky:

- Všechna prvočísla jsou lichá.
- Všechna prvočísla menší než 5 jsou sudá.
- Všechna prvočísla větší než 5 jsou lichá.
- Existuje sudé prvočíslo.

Můžete používat predikát Prime(x) a aritmetiku nad celými čísly. Které z výroků výše jsou pravdivé?

Př. 10

Přepište v jazyce predikátové logiky a dokažte:

- žádné sudé číslo není zároveň liché
- $(2 * x * x = y * y) \Rightarrow$ y je sudé
- žádné prvočíslo větší než 2 není sudé

Můžete používat predikát Prime(x), aritmetiku nad celými čísly a operátor dělitelnosti (|).

Př. 11

Dokažte indukcí pro všechna přirozená $n \geq 1$:

- $n + 1 \leq 2 * n$
- $2 * n \leq 2^n$

- $1 + 2 + ... + n = n/2 * (1 + n)$

Př. 12

Induktivně definujte:

- přirozená čísla pomocí konstanty 1 a operace +
- celočíselné výrazy s operací +
- celočíselné výrazy s operací + a *
- nekonečnou posloupnost 7, 11, 15, 19, 23, ...
- nekonečnou posloupnost 2, 5, 11, 23, 47, ...

Př. 13

Dokažte strukturální indukcí, že každý celočíselný výraz podle definice výše má sudý počet závorek.

Př. 14

Jsou následující výroky pravdivé?

- $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$
- $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
- $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
- $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$
- $\{4\} \in \{x \in N \mid x > 3\}$
- $4 \in \{x \in N \mid x > 3\}$
- $\{4\} \subseteq \{x \in N \mid x > 3\}$
- $4 \subseteq \{x \in N \mid x > 3\}$
- $\{4\} \in \{\{x\} \mid x \in N \ \wedge \ x > 3\}$

Př. 15

Zapište $\mathcal{P}(A)$ pro množiny:

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Př. 16

Zapište:

- množinu všech sudých čísel
- množinu všech prvočísel

Můžete používat množinu N, aritmetiku nad ní a operátor dělitelnosti.

Př. 17

Definujte:

- množinový rozdíl
- symetrický množinový rozdíl

Př. 18

Dokažte:

- $a \in A \cap B \Rightarrow a \in A$
- $a \in A \cap B \Rightarrow a \in A \cup B$
- $a \in A \ \wedge \ A \subseteq B \Rightarrow a \in B$

Př. 19

Přepište v jazyce predikátové logiky Peanovy axiomy

- existuje nula
- každé číslo x má následníka $S(x)$
- nula není následníkem žádného čísla
- různá čísla mají různé následníky: $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$

Př. 20

Mějme definováno sčítání a násobení následujícími předpisy:

- $a + 0 = a$
- $a + S(b) = S(a + b)$
- $a * 0 = 0$
- $a * S(b) = (a * b) + a$

Vypočtěte podle definic:

- 1 + 1
- 2 + 2
- 2 * 1
- 1 * 2

(1 = S(0), 2 = S(1))

Př. 21

Definujme induktivně slova nad množinou $\{a, b, c\}$:

- a, b, c jsou slova
- pokud x je slovo, pak ax, bx, cx jsou slova

Definujme sčítání řetězců následovně: Pro slova x a y

- $a + x = ax$
- $b + x = bx$
- $c + x = cx$
- $ya + x = y + ax$
- $yb + x = y + bx$
- $yc + x = y + cx$

Vypočtěte podle definice:

- abc + aaa

- aaa + bbb
- ab + aaabac
- aaabac + ab

Př. 22

Přepište jako množiny čísla:

- 1
- 2
- 4

$0 \equiv \emptyset$, $S(x) \equiv x \cup \{x\}$

Př. 23

Přepište jako množiny:

- (a, b)
- $(1, 2, 3)$
- (ϕ, ψ, ω)

Př. 24

Zapište kartézský součin AxB, resp. $AxBxC$ pro množiny:

- $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}$
- $A = \{1, 2, 3\}, B = \emptyset$
- $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}, C = \{1, 2, 3\}$
- $A = N, B = \{1, 2, 3\}$
- $A = N, B = N$

Př. 25

Mějme následující relace nad množinou $\{a, b\}$:

- $R_1 = \{(a, a), (b, b)\}$
- $R_2 = \{(a, b), (b, a)\}$
- $R_3 = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$
- $R_4 = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$
- $R_5 = \{(a, a), (b, a), (b, b)\}$
- $R_6 = \emptyset$
- $R_7 = \{(a, a), (b, a)\}$

Které z nich jsou reflexivní, symetrické, antisymetrické, tranzitivní? Které z nich jsou funkce? Které z funkcí jsou úplné, injektivní, surjektivní, bijekce?

Př. 26

Vyjádřete se k vlastnostem následujících relací:

- relace dělitelnosti ($\{(a, b) \mid \exists k \in N(a * k = b)\}$)
- $\{(a, 2 * a) | a \in N\}$

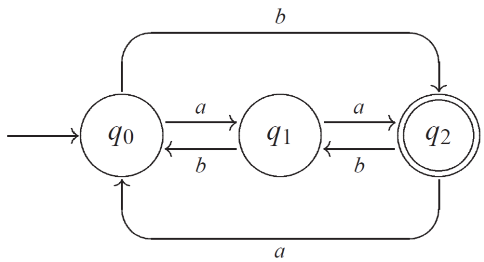
Př. 27

Jsou následující množiny spočetné? Pokud ano, pokuste se najít bijekci mezi přirozenými čísly a příslušnou množinou:

- sudá čísla
- lichá čísla
- celá čísla
- racionální čísla
- reálná čísla v intervalu $< 0, 1 >$

Př. 28

Vypište přechodovou funkci následujícího automatu:



Př. 29

Který jazyk generují následující gramatiky?:

- $S \to AB, A \to a, B \to b$
- $S \to aaS, S \to aa$
- $S \to X, S \to aS, X \to ab, X \to aXb$

Př. 30

Napište (bezkontextovou) gramatiku generující následující jazyky:

- $\{a\}$
- $\{a, aa, ab\}$
- $\emptyset$
- $\{ab, abab, ababab, ...\}$
- $\{a, ab, aba, abab, ababa, ababab, abababa, ...\}$
- $\{a^i b^j \mid i, j > 0\}$
- $\{a^i b^i \mid i > 0\}$

Je možné pro dané jazyky sestrojit také konečný automat? Pokud ano, napište jej. Pokud ne, zamyslete se, proč to nejde.

Př. 31

Kolik existuje posloupností obsahujících právě následující prvky?

- Slunce, Měsíc, Země
- a, a, b, b, c
- a, a, a, a, a, b, c, d

Př. 32

Házeme třikrát po sobě kostkou. Jaká je je pravděpodobnost, že

- padne po řadě 1, 2, 3
- padnou tři stejná čísla
- padne součet 5
- padne součet 7

Př. 33

Z místa A do místa B vedou 4 cesty, z místa B do místa C vedou 3 cesty. Kolika různými způsoby se můžeme dostat z A do C a zpět, pokud

- nemáme žádná omezení na výběr cest
- nechceme jít dvakrát stejnou cestou
- chceme jít tam i zpět stejnou cestou

Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru cest si vybereme stejné cesty jako náš kamarád, který jde stejnou trasu? (určete pro všechny výše uvedené případy)

Př. 34

Házeme třemi nerozlišitelnými mincemi.

- Kolik různých kombinací může padnout (pokud nejsme schopni rozlišit jednotlivé mince)?
- Jaká je pravděpodobnost, že padnou právě tři panny?
- Jaká je pravděpodobnost, že padne právě jedna panna a dva orli?

Př. 35

Házeme třemi nerozlišitelnými kostkami.

- Kolik různých kombinací může padnout (pokud nejsme schopni rozlišit jednotlivé kostky)?
- Jaká je pravděpodobnost, že padnou tři stejná čísla?
- Jaká je pravděpodobnost, že padne součet 5?

Př. 36

Kolik je tříprvkových podmnožin

- množiny $\{1, 2, 3\}$
- množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- množiny $\{1, 2, ..., n\}$ $(n \in N, n > 2)$

Kolik je m-prvkových podmnožin výše uvedených množin (pro libovolné přirozené m menší než velikost příslušné množiny)?

Př. 37

Mějme statistický soubor 2, 3, 3, 3, 5, 4, 5, 9. Určete modus, medián, průměr, rozptyl a směrodatnou odchylku. Nakreslete histogramy pro četnost, relativní četnost a kumulativní četnosti. (V tomto i v dalších příkladech můžete používat kalkulačky i jiné inteligentní stroje :) na písemce budou příklady zadány tak, aby vycházely pěkně.)

Př. 38

Pro následující soubory nakreslete graf závislosti na souboru z minulého cvičení, pokuste se odhadnout korelaci a poté korelaci vypočtěte dosazením do vzorce:

- 2, 3, 3, 3, 5, 4, 5, 9
- 2, 2, 2, 3, 8, 8, 5, 8
- 10, 9, 9, 9, 6, 7, 6, 2
- 1, 9, 1, 9, 1, 9, 1, 9

Př. 39

Sestavte statistický soubor, který bude mít alespoň 5 prvků, z nichž maximálně dva budou stejné, tak, aby měl:

- modus 4
- medián 5
- průměr 6
- rozptyl 9
- všechny výše uvedené
- průměr 1000 a medián 3
- modus 4, medián 5 a rozptyl 0

Ke každému z navržených souborů se pokuste navrhnout druhý tak, aby jejich korelace byly postupně -1; 0; 0,5; 1. Nakreslete grafy závislosti souborů.

Př. 1

Nakreslete grafy a určete stupně jednotlivých vrcholů:

- $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}\}$
- $V = \{w, x, y, z\}, E = \{\{w, x\}, \{x, y\}, \{y, z\}\}$
- $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{\{1, 2\}\}$
- $V = \{1, 2\}, E = \emptyset$
- $V = \emptyset, E = \emptyset$

Které z nich jsou souvislé, které z nich jsou stromy? Vyjádřete tyto grafy jako relace.

Př. 2

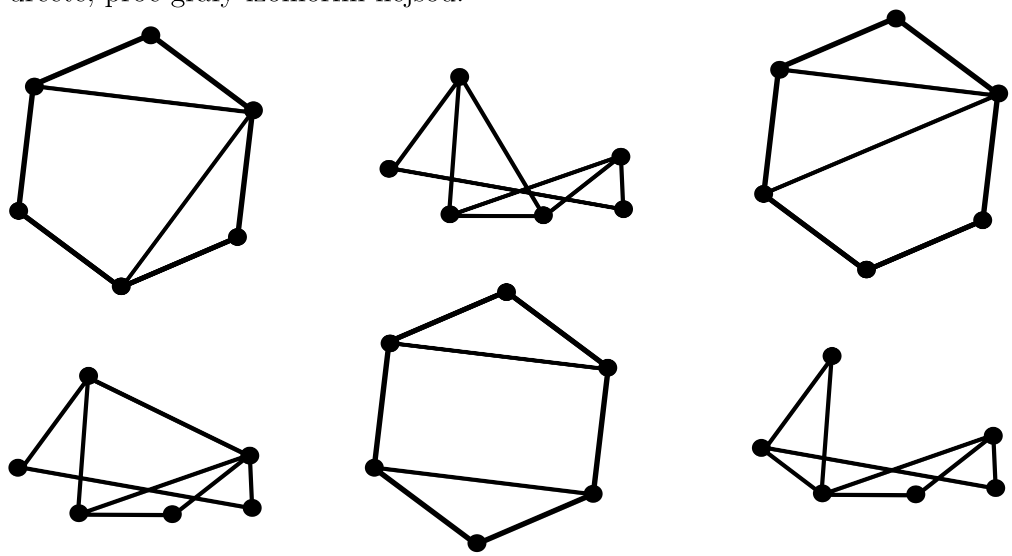
Nakreslete a zapište množinovým zápisem následující grafy:

- úplný graf na 4 vrcholech
- úplný graf na 3 vrcholech
- úplný graf na 2 vrcholech
- úplný graf na 1 vrcholu
- úplný graf na 6 vrcholech
- kružnici na 6 (resp. 5, 4, 3, 2, 1) vrcholech
- cestu na 6 (resp. 5, 4, 3, 2, 1) vrcholech
- graf, který má stupně vrcholů postupně 2, 3, 3, 2
- graf, který má stupně vrcholů postupně 3, 3, 4, 4, 4
- graf, který má stupně vrcholů postupně 2, 4, 4, 2

Najděte v těchto grafech největší kliky, největší cykly a nejdelší cesty.

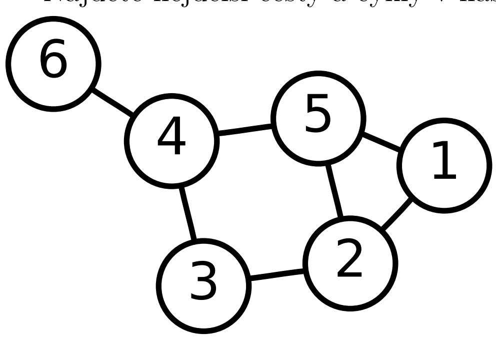
Př. 3

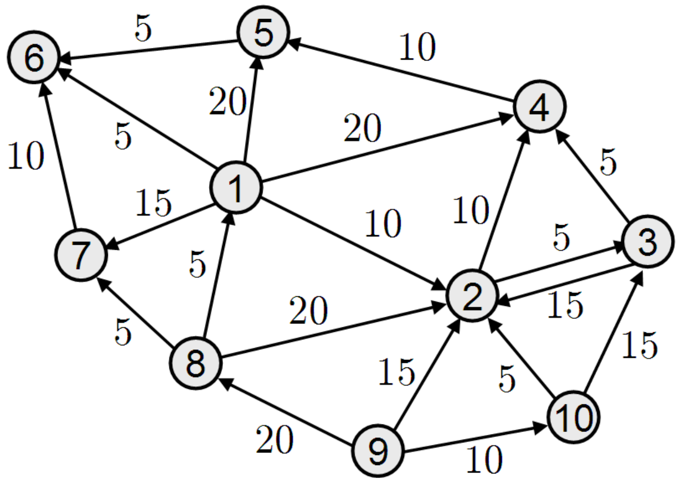
Které z následujících grafů jsou izomorfní? Najděte isomorfismy, případně určete, proč grafy izomorfní nejsou.



Př. 4

Najděte nejdelší cesty a cykly v následujících grafech:





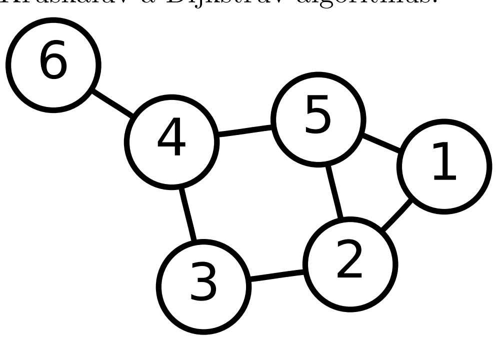
Př. 5

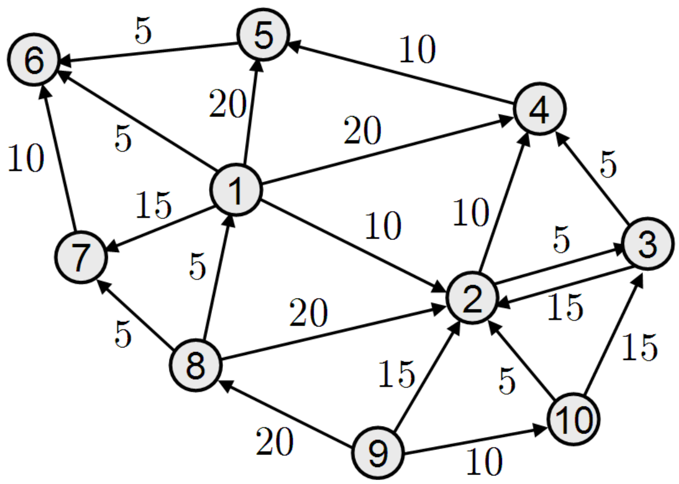
Nakreslete následující orientované grafy:

- $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (2, 4)\}$
- $V = \{w, x, y, z\}, E = \{(w, x), (x, y), (z, y), (w, z)\}$
- $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{(1, 2)\}$
- $V = \{1, 2\}, E = \emptyset$ Najděte v těchto grafech největší cykly a nejdelší cesty.

Př. 6

V následujících grafech najděte minimální kostry a nejkratší cesty mezi vybranými dvojicemi vrcholů. Nejprve „selským rozumem”, poté použijte Kruskalův a Dijkstrův algoritmus.





Př. 7

V orientovaném grafu z předchozího cvičení najděte silně souvislé komponenty.

Př. 8

Naprogramujte Kruskalův a Dijkstrův algoritmus v Pythonu.

Př. 9

Zapište v jazyce logiky vlastnosti, které musí splňovat pravděpodobnostní rozložení.

Př. 10

Vyjádřete funkčním zápisem a grafem rozložení pravěpodobnosti při hodu kostkou.

Př. 11

Mějme následující statistický soubor (výška lidí ve skupině):

160, 160, 160, 170, 170, 180, 180, 180, 190, 210

Nakreslete graf pravděpodobnostního rozložení výšky lidí na základě tohoto souboru. Jaká je pravděpodobnost, že člověk bude vyšší než 185?

Nakreslete graf distribuční funkce pro statistický soubor výše.

Př. 12

Házeme dvakrát po sobě kostkou. Poprvé padlo 5. Jaká je pravděpodobnost, že padne součet větší než 8? Použijte vzorec podmíněné pravděpodobnosti.

Př. 13

Mějme následující údaje o skupině lidí:

ID	Výška (cm)	Váha (kg)
1	180	80
2	170	90
3	190	60
4	190	80
5	180	80
6	190	90

Mějme člověka, o kterém víme, že měří 190 cm. Jaká je pravděpodobnost, že jeho váha bude alespoň 80 kg? (Předpokládejme, že naše data jsou reprezentativní. (Kterému zákonu tento náš předpoklad odporuje?))

Př. 14

Dokažte Bayesův vzorec.

Př. 15

Všichni chlapci nosí kalhoty, polovina dívek nosí také kalhoty (druhá polovina nosí sukně :)). Vidíme z dálky člověka, který má kalhoty. Jaká je pravděpodobnost, že je to chlapec?

Př. 16

Mějme následující text a předpokládejme, že pro dané účely je to reprezentativní vzorek:

Stát má stát na straně pro stát vhodné. Stát na straně občanů je pro stát obvykle nevýhodné. Nicméně stát by se mohl stát poctivějším.

Jaká je pravděpodobnost, že slovo „stát" (bez rozlišení velikosti písmen) je sloveso (podst. jméno), pokud:

- neuvažujeme žádnou informaci o kontextu
- slovo „stát" stojí na začátku věty
- předchozí slovo je předložka
- následující slovo obsahuje právě dvě písmena

Př. 17

Máme podezření, že hrací kostka není vyvážená, ale že na ní častěji padají šestky. Máme v úmyslu kostku sérií 20 pokusů vyzkoušet. Kolikrát musí padnout šestka, aby se naše podezření statisticky potvrdilo s možností chyby méně než 1 %?