

# Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory II

Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita  
Botanická 68a, 60200 Brno, Czech Republic  
xkovar3@fi.muni.cz

část 10

## Obsah přednášky

Graf

Základní pojmy

Typy grafů

Některá rozšíření pojmu grafu

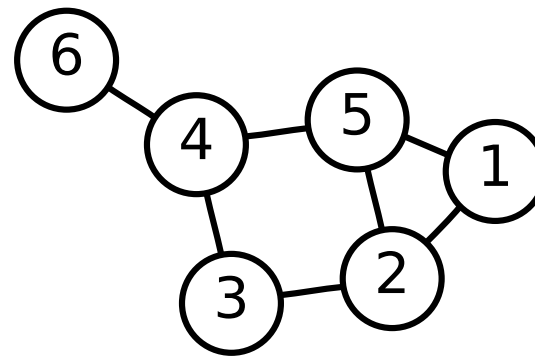
Analogie se známými pojmy

## Graf

- ▶ Graf  $G$  je dvojice  $(V, E)$ 
  - ▶  $V$  = množina vrcholů (též  $G(V)$ )
  - ▶  $E$  = množina hran (též  $G(E)$ ) – obsahuje vybrané dvouprvkové podmnožiny  $V$
- ▶ Základní model pro mnoho praktických aplikací
  - ▶ mapy – maps.google, mapy.cz
  - ▶ počítačové sítě
  - ▶ modelování procesů
  - ▶ konečné automaty
  - ▶ syntaktické rozbory
  - ▶ sémantické sítě
  - ▶ ...

## Příklad grafu

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}$$

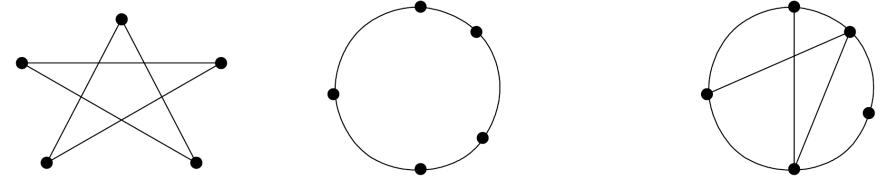


## Základní pojmy

- ▶ Sousední vrcholy
  - ▶ spojené nějakou hranou
- ▶ Stupeň vrcholu
  - ▶ počet hran, které z daného vrcholu vychází
- ▶ Podgraf grafu  $G$ 
  - ▶ obsahuje pouze vybrané vrcholy a hrany z grafu  $G$
  - ▶ hrany musí být pouze mezi vybranými vrcholy (výsledek musí opět tvořit graf)
- ▶ Isomorfismus mezi grafy  $G$  a  $G'$ 
  - ▶ bijekce  $f : V(G) \rightarrow V(G')$  taková, že  $\{u, v\}$  je hrana v  $G$  právě tehdy, když  $\{f(u), f(v)\}$  je hrana v  $G'$
  - ▶ grafy jsou **isomorfní** (shodné), pokud mezi nimi existuje isomorfismus

## Isomorfismus – příklad

Které z následujících grafů jsou isomorfní?



## Typy grafů (I)

- ▶ Kružnice (délky  $n > 2$ )
  - ▶  $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
  - ▶  $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$
  - ▶ stejný počet vrcholů a hran
  - ▶ všechny vrcholy stupně 2
  - ▶ náčrt grafu tvoří kružnici
- ▶ Cesta (na  $n$  vrcholech)
  - ▶  $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
  - ▶  $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$
  - ▶ kružnice s jednou chybějící hranou
  - ▶ počáteční a koncový vrchol

## Typy grafů (II)

- ▶ Úplný graf (na  $n$  vrcholech)
  - ▶  $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
  - ▶  $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$
  - ▶ každé dva vrcholy jsou spojeny hranou

## Zajímavé podgrafy

- ▶ Cyklus (kružnice) v grafu
  - ▶ podgraf, který je isomorfní s nějakou kružnicí
- ▶ Cesta v grafu
  - ▶ podgraf, který je isomorfní s nějakou cestou
- ▶ Klika v grafu
  - ▶ podgraf, který je isomorfní s nějakým úplným grafem

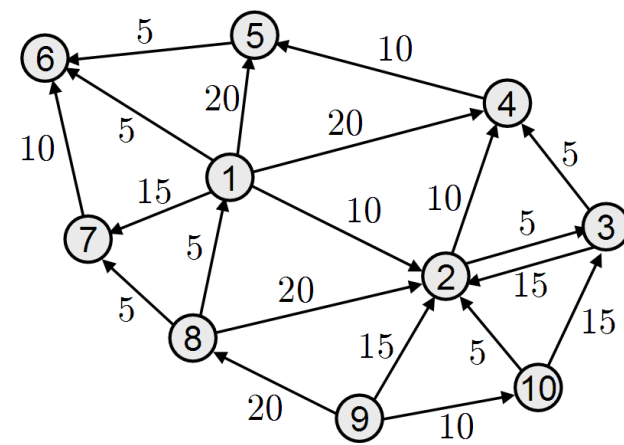
## Typy grafů (III)

- ▶ Acyklický, resp. „les“
  - ▶ neobsahuje kružnici (cyklus) jako podgraf
- ▶ Souvislý
  - ▶ mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta
- ▶ Strom
  - ▶ acyklický souvislý graf

## Některá rozšíření pojmu grafu

- ▶ Orientovaný graf
  - ▶ hrany jsou orientovány
  - ▶  $\rightarrow$  zdrojový a cílový vrchol
  - ▶  $\rightarrow$  množina hran je množina uspořádaných dvojic
- ▶ Ohodnocený graf
  - ▶ hrany jsou ohodnoceny (např. vzdáleností mezi vrcholy)
  - ▶ formálně funkce  $e : G(E) \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ Multigraf
  - ▶ povoluje více hran mezi dvěma stejnými vrcholy
  - ▶ povoluje hrany začínající a končící ve stejném vrcholu („smyčky“)
- ▶ Výše uvedené pojmy se mohou libovolně kombinovat

## Příklad – orientovaný ohodnocený graf



## Analogie se známými pojmy

- ▶ Graf lze popsat jako relaci na množině vrcholů
  - ▶ množina hran je chápána jako relace
  - ▶ orientovaný graf – nereflexivní relace
  - ▶ neorientovaný graf – nereflexivní symetrická relace
- ▶ Přechodový graf konečného automatu
  - ▶ orientovaný ohodnocený multigraf
  - ▶ ohodnocení symboly abecedy (nikoli čísly)
  - ▶ (navíc máme vrcholy dvou typů)