

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory II

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic
xkovar3@fi.muni.cz

část 11

Obsah přednášky

- 1 Další pojmy z teorie grafů
- 2 Algoritmy procházení grafu
- 3 Kruskalův algoritmus
- 4 Dijkstrův algoritmus

Souvislé komponenty

- Souvislé komponenty
 - největší souvislé podgrafy
 - → mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta
- Silně souvislé komponenty
 - v případě orientovaných grafů
 - mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta tam i zpět

Vzdálenost v grafu

- Délka cesty
 - **nehodnocený graf**: počet hran v cestě
 - **ohodnocený graf**: součet ohodnocení jednotlivých hran v cestě
- Vzdálenost mezi dvěma vrcholy X a Y
 - je délka nejkratší cesty z X do Y

Kořen a listy stromu

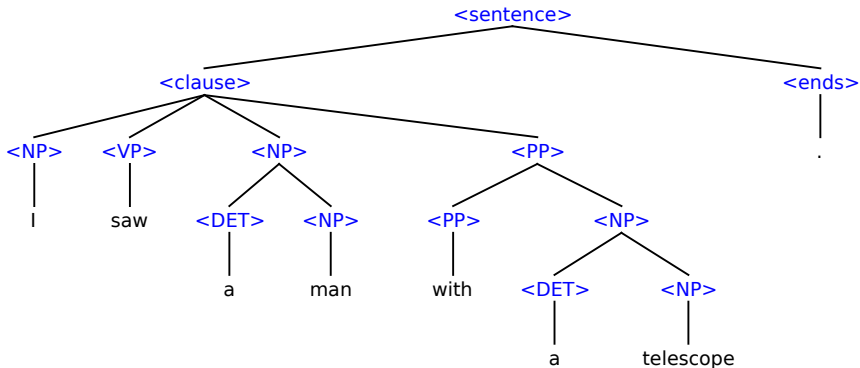
■ Kořen stromu

- jeden vyznačený vrchol
- kreslíme většinou nahoře :)

■ Listy stromu

- vrcholy stupně 1, které nejsou kořenem
- kreslíme většinou dole

Příklad – syntaktický strom



Kostra grafu

- Podgraf, který
 - obsahuje všechny vrcholy původního grafu
 - je strom
 - → musíme odstranit všechny cykly
- Minimální kostra grafu
 - pro ohodnocený graf
 - kostra s nejmenším součtem ohodnocení hran
 - analogicky maximální kostra

Procházení grafu

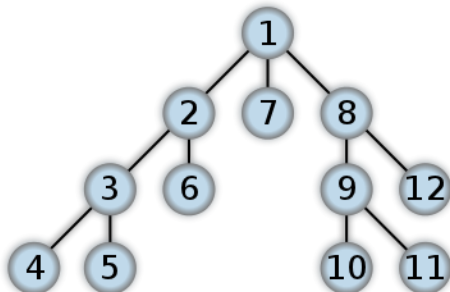
- Např. hledáme určitý vrchol, chceme projít všechny, ...
- Procházení do hloubky – depth-first search
 - začínáme z nějakého vrcholu, ten označíme
 - označíme libovolný sousední neoznačený vrchol a pokračujeme z něj
 - pokud to dál nejde (všechny sousední vrcholy jsou označené), vrátíme se k nejbližšímu vrcholu, ze kterého to ještě jde

Procházení grafu

- Procházení do šířky – breadth-first search
 - začínáme z nějakého vrcholu, ten označíme
 - vybereme všechny sousední neoznačené vrcholy a přidáme je do seznamu
 - postupně ze začátku seznamu odebíráme a provádíme předchozí kroky
 - končíme, když je seznam prázdný

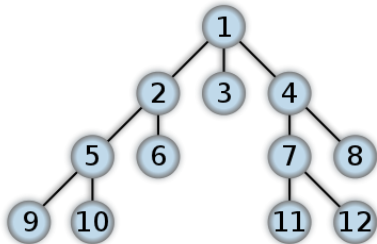
Procházení do hloubky z vrcholu u

- $DFS(G, u)$
- =====
- označ u
- for všechny hrany (u, v) vycházející z vrcholu u :
 - if v není ozna en:
 - $DFS(G, v)$



Procházení do šířky z vrcholu u

- $BFS(G, u)$
- =====
- $Q = [u]$
- while Q je neprázdný:
 - odstra první prvek z Q a p i a jej do t
 - ozna t
 - p idej všechny neozna ené sousedy t na konec Q



Kruskalův algoritmus

- Vstup
 - neorientovaný graf G
 - ohodnocení hran w
- Výstup
 - minimální kostra grafu G
- Algoritmus je tzv. **hladový**
 - v každém kroku vybírá lokálně optimální možnost
- Idea
 - setřídít hrany podle ohodnocení
 - v každém kroku přidat do kostry tu nejmenší, která nevytvoří cyklus
 - udržujeme si seznam souvislých komponent kostry

Kruskalův algoritmus (G, w)

- $K \leftarrow []$; $comp \leftarrow \{ \}$
- for u in $G(V)$:
 - $comp[u] \leftarrow set(u)$
- seříd' $G(E)$ podle w
- for (u, v) in $G(E)$:
 - if $comp[u] \neq comp[v]$:
 - $K.append((u, v))$
 - $newset = union(comp[u], comp[v])$
 - for x in $newset$: $comp[x] \leftarrow newset$
- K je minimální kostra grafu

Dijkstrův algoritmus

■ Vstup

- graf s hranami ohodnocenými funkcí w
- ohodnocení hran musí být nezáporné
- počáteční vrchol s

■ Výstup

- vzdálenosti z vrcholu s do všech dalších vrcholů grafu

■ Idea

- udržujeme si nejmenší známé vzdálenosti do všech vrcholů
- na začátku nekonečno
- procházíme postupně vrcholy a hodnoty upravujeme

Dijkstrův algoritmus (G, s)

- for u in $G(V)$:
 - $d[u] \leftarrow \textit{infinity}$
- $d[s] \leftarrow 0$
- $N \leftarrow G(V)$
- $p \leftarrow \{\}$
- while $N \neq []$:
 - $u \leftarrow$ vrchol z N s nejmenší hodnotou $d[u]$
 - for všechny hrany (u, x) vycházející z vrcholu u :
 - $alt \leftarrow d[u] + w((u, x))$
 - if $alt < d[x]$: $d[x] \leftarrow alt$; $p[x] \leftarrow u$
 - odstra u z N
- d jsou vzdálenosti vrcholů z vrcholu s
- p obsahuje předchozí vrcholy na nejkratší cestě z s