Induktivní statistika - úvod

- z-skóry
- pravděpodobnost
- normální rozdělení

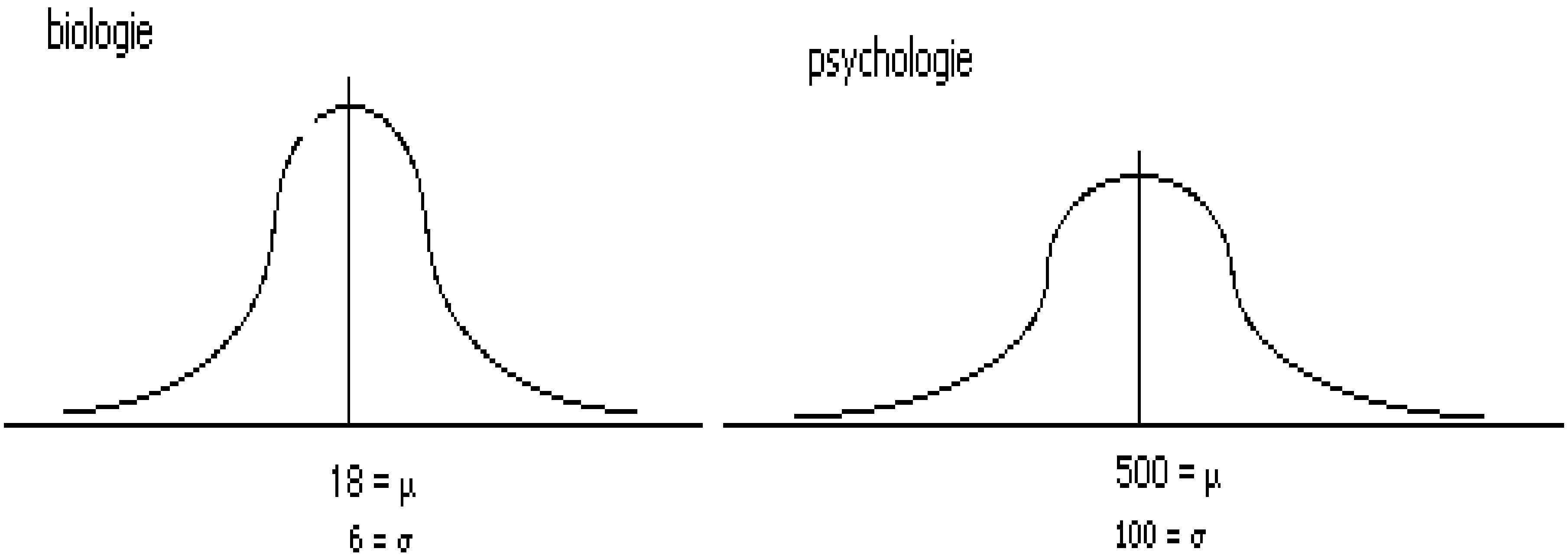
Z-skóry

- umožňují najít a popsat **pozici každé hodnoty** v rámci rozdělení hodnot
- a také **srovnávání hodnot** pocházejících z měření **na rozdílných stupnicích**
- hrubé skóry jsou převedeny na **standardizovanou stupnici** (jednotkou je směrodatná odchylka)

Z-skóry - příklad

- např. skóry ze dvou testů – biologie a psychologie
- student získal 26 bodů z biologie a 620 z psychologie. Ve kterém předmětu byl lepší?

Z-skóry - příklad



Z-skóry

- přímé porovnání není snadné – skóry z obou testů mají rozdílné průměry i směrodatné odchylky
- z skór =odchylka skóru od průměru vzhledem k velikosti směrodatné odchylky
- z = odch. od průměru/směr. odch.

Z-skóry - příklad

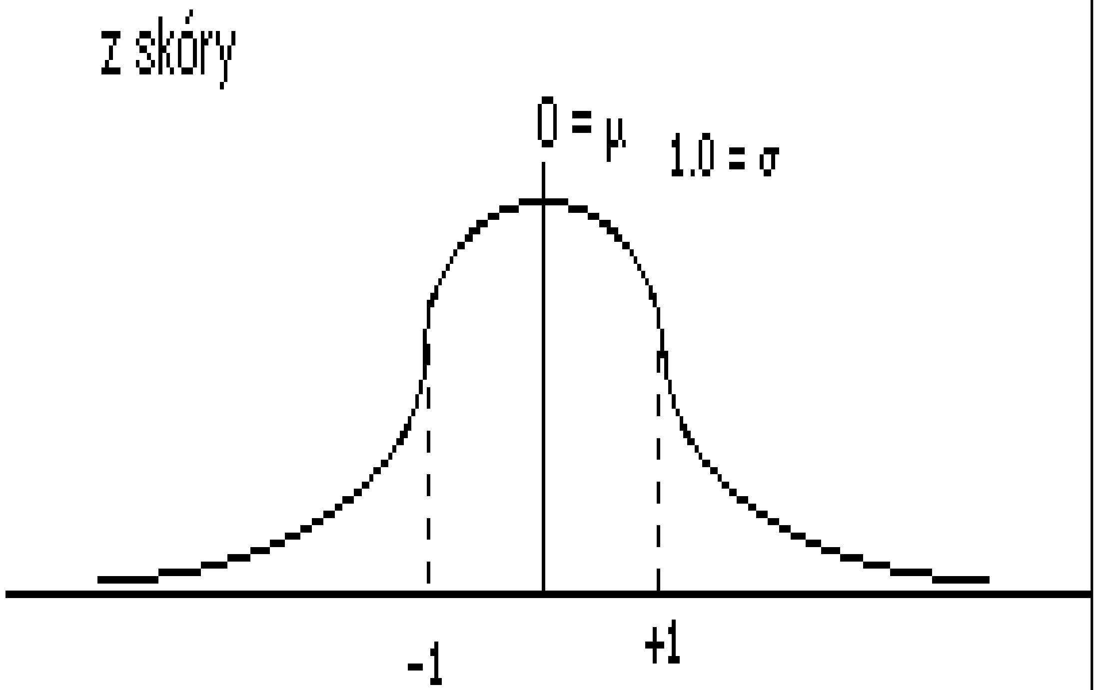
- skór z biologie: (26-18)/6 = 1,33
- skór psychologie: (620-500)/100=1,2
- v biologii byl student lepší – 1,33 směrodatné odchylky nad průměrem

Z-skóry

- z-skór přesně udává pozici každé hodnoty vzhledem k ostatním hodnotám
- znaménko (+ nebo -) ukazuje, zda je hodnota nad nebo pod průměrem rozdělení
- hodnota z-skóru upřesňuje, kolik směrodatných odchylek byla hodnota od průměru vzdálena

Z-skóry

- průměr rozdělení z-skórů je vždy 0
- směrodatná odchylka je 1



Z-skóry

vzorec pro výpočet z-skóru hodnoty X

- u populace: $z = (X - \mu) / \sigma$
- u vzorku: $z = (X - m) / s$

Z-skóry

- podobně můžeme i z-skór převést na hrubý skór, známe-li průměr a směrodatnou odchylku

Z-skóry

- např. u stupnice IQ
- $\mu = 100, \sigma = 15$
- pro osobu se z=-3 (3 směrodatné odchylky pod průměrem) bude IQ ?

Z-skóry

- např. u stupnice IQ $\mu = 100$, $\sigma = 15$
- pro osobu se z=-3 (3 směrodatné odchylky pod průměrem) bude IQ

$$X = Z \,.\, \sigma + \mu$$

$$X = -3 \,.\, 15 + 100$$

$$X = 55$$

Rozdělení z-skórů

- **tvar** rozdělení z-skórů je **stejný** jako tvar původního rozdělení hrubých skórů
- průměr je 0, směrodatná odchylka 1
- transformace změní jen označení hodnot na ose X

Pravděpodobnost

- postupy induktivní statistiky vycházejí z teorie pravděpodobnosti
- **pravděpodobnost**, že nastane určitý výsledek, **definujeme** jako podíl

$$P\ (A) = \frac{\text{počet pokusů, kdy nastal jev A}}{\text{celkový počet jevů}}$$

Pravděpodobnost - příklady

- jaká je pravděpodobnost, že si z balíčku 52 karet vytáhneme určitou kartu (např. pikovou dámu) ?

Pravděpodobnost - příklady

- jaká je pravděpodobnost, že si z balíčku 52 karet vytáhneme určitou kartu (např. pikovou dámu) ?

P (piková dáma) = f/N = 1/52 = 0,019= 1,9%

Pravděpodobnost - příklady

- jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne trojka nebo šestka ?

Pravděpodobnost - příklady

- jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne trojka nebo šestka ?

P (3 n. 6) = f/N = 2/6 = 0,333= 33,3%

Pravděpodobnost

- pravděpodobnost bývá uváděna nejčastěji jako **podíl** (0,33), **zlomek** (1/3) nebo **procento** (33,3%)
- pravděpodobnost určitého jevu nebo třídy jevů můžeme odhadnout z rozdělení hodnot (četností)

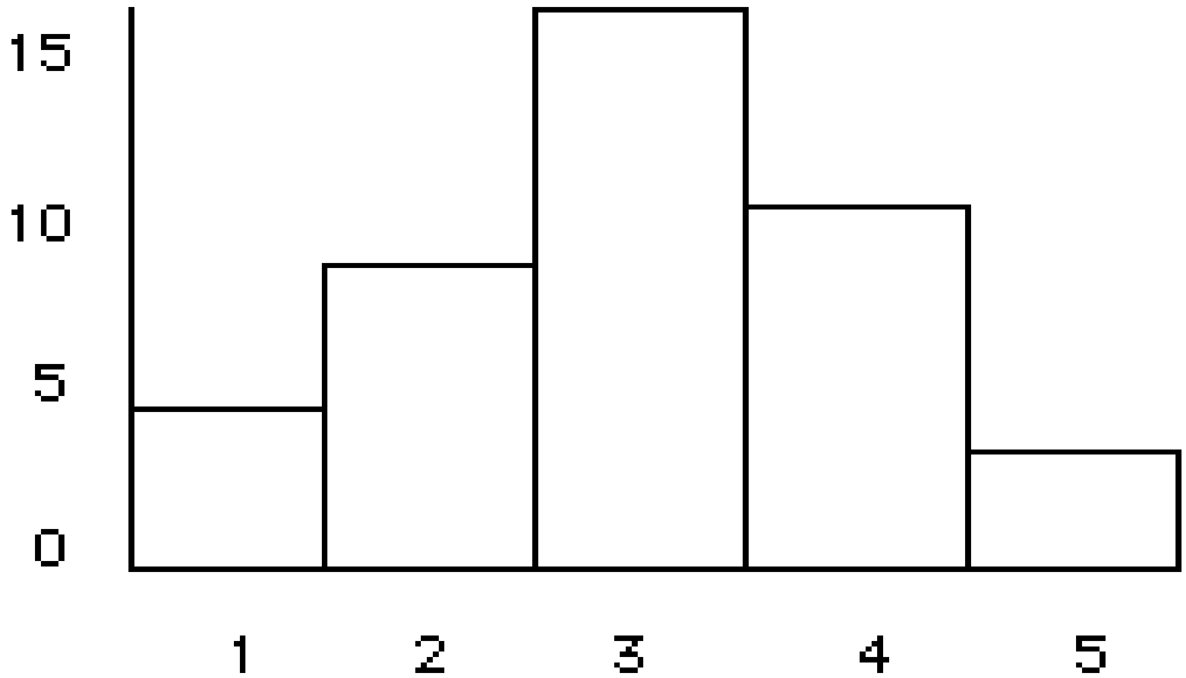
Pravděpodobnost - příklady

- představme si, že máme krabici se 40 očíslovanými žetony s čísly 1 – 5
- v tabulce jsou uvedeny absolutní i relativní četnosti jednotlivých čísel žetonů

Pravděpodobnost

X	f	p
5	2	0,05
4	10	0,25
3	16	0,40
2	8	0,20
1	4	0,10

Pravděpodobnost



Pravděpodobnost - příklady

- vaším úkolem je vytáhnout 1 žeton
- **jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem 3?**

Pravděpodobnost

X	f	p
5	2	0,05
4	10	0,25
3	16	0,40
2	8	0,20
1	4	0,10

Pravděpodobnost

- vaším úkolem je vytáhnout 1 žeton
- jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem 3?
- **p (3) = f/N = 16/40 =0,40**

  nebo 2/5 či 40%

Pravděpodobnost

- **Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem vyšším než 2?**

Pravděpodobnost

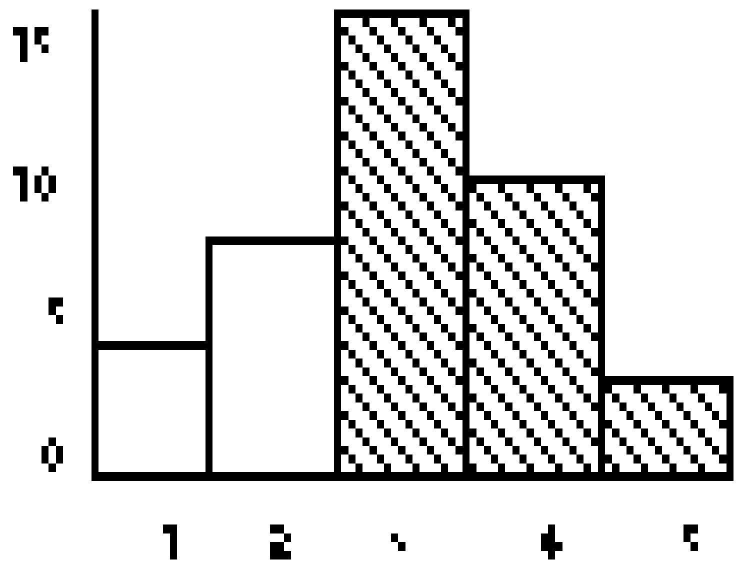
X	f	p
5	2	0,05
4	10	0,25
3	16	0,40
2	8	0,20
1	4	0,10

Pravděpodobnost

- Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem vyšším než 2?

  $p(X > 2) = ?$

  0,05 + 0,25 + 0,40 = **0,70**



Pravděpodobnost

- **Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem nižším než 5?**

Pravděpodobnost

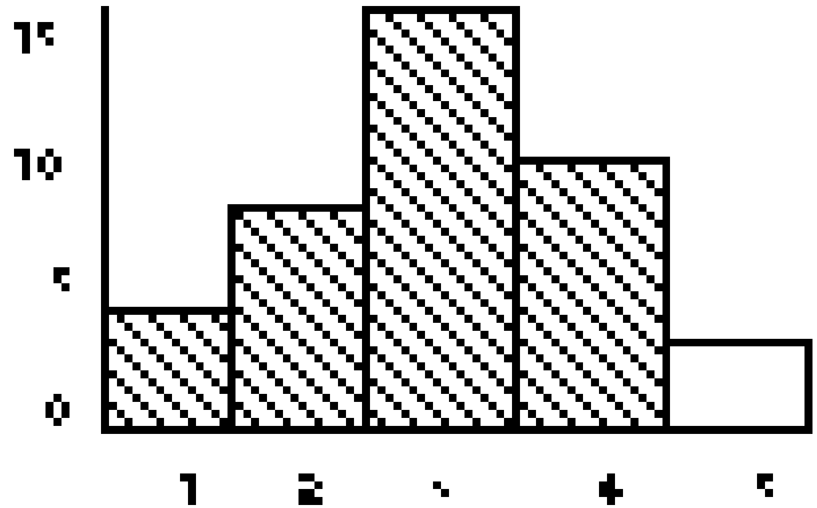
X	f	p
5	2	0,05
4	10	0,25
3	16	0,40
2	8	0,20
1	4	0,10

Pravděpodobnost

- Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem nižším než 5?

  $p(X < 5) = ?$

  0,10 + 0,20 + 0,40 + 0,25 = **0,95**



Pravděpodobnost

- **Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem nižším než 4 a vyšším než 1?**

Pravděpodobnost

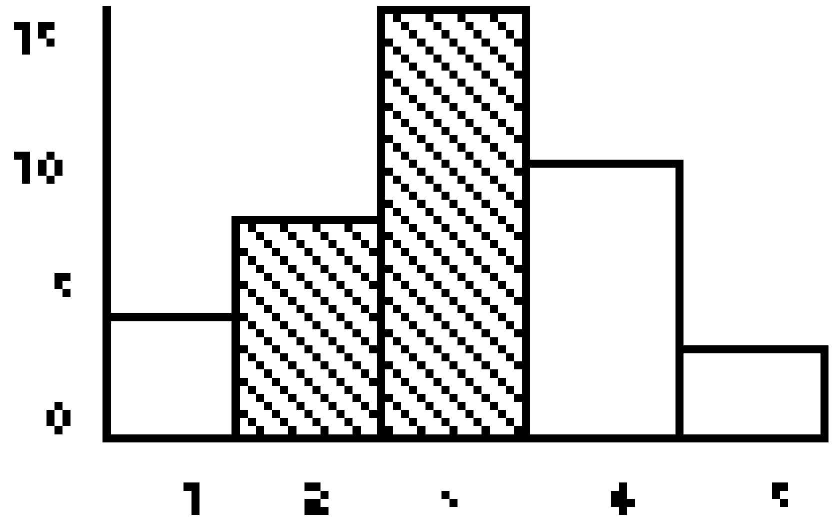
X	f	p
5	2	0,05
4	10	0,25
3	16	0,40
2	8	0,20
1	4	0,10

Pravděpodobnost

- Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem nižším než 4 a vyšším než 1?

  $p(4 > X > 1) = ?$

  $0{,}20 + 0{,}40 =$ **0,60**



Pravděpodobnost

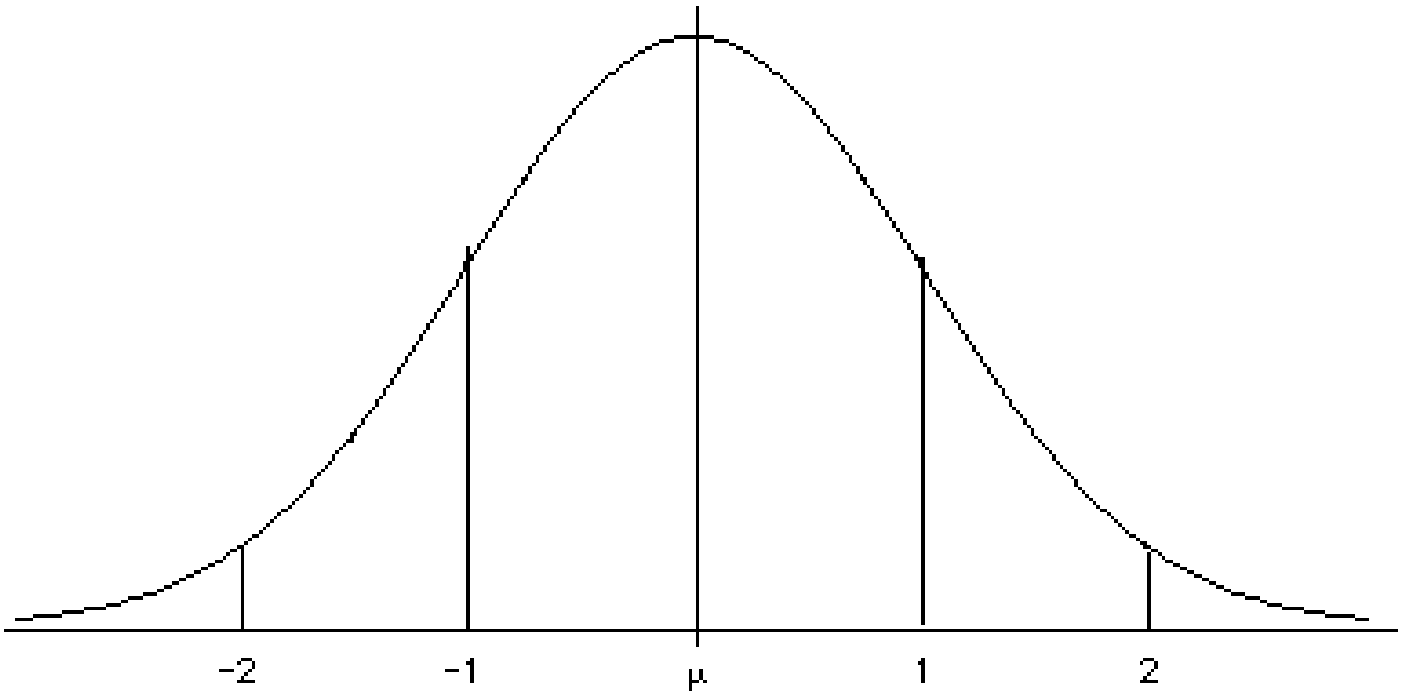
- pravděpodobnost odpovídá hustotě **oblasti pod křivkou** pro daný interval

Normální rozdělení

- normální rozdělení je symetrické, unimodální, zvonovitého tvaru
- označuje se i jako Gaussova křivka

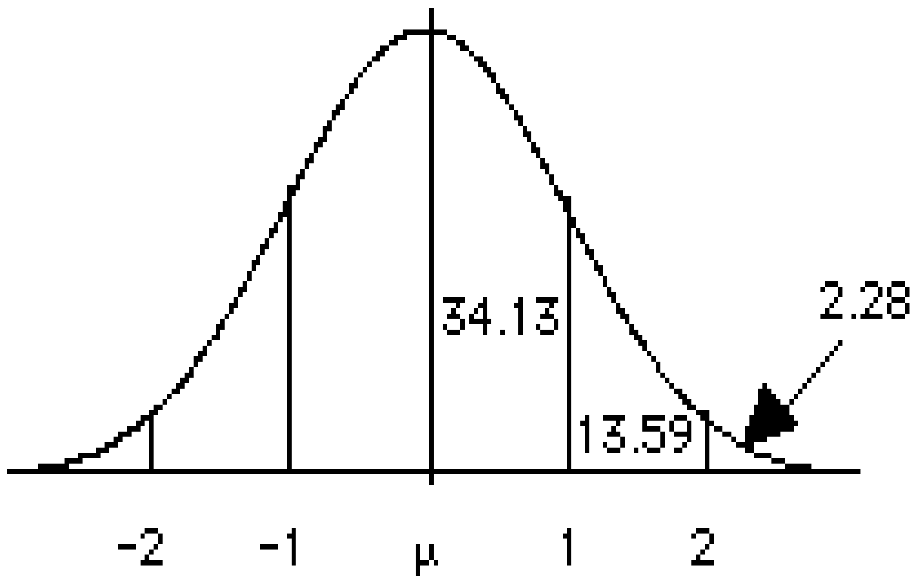
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

Normální rozdělení



Normální rozdělení

- 34.13% skórů spadá mezi průměr a 1 směr. odchylku
- 13.59% hodnot spadá mezi 1. a 2. směr. odchylku
- 2.28% hodnot spadá mezi 2. a 3. směr. odchylku

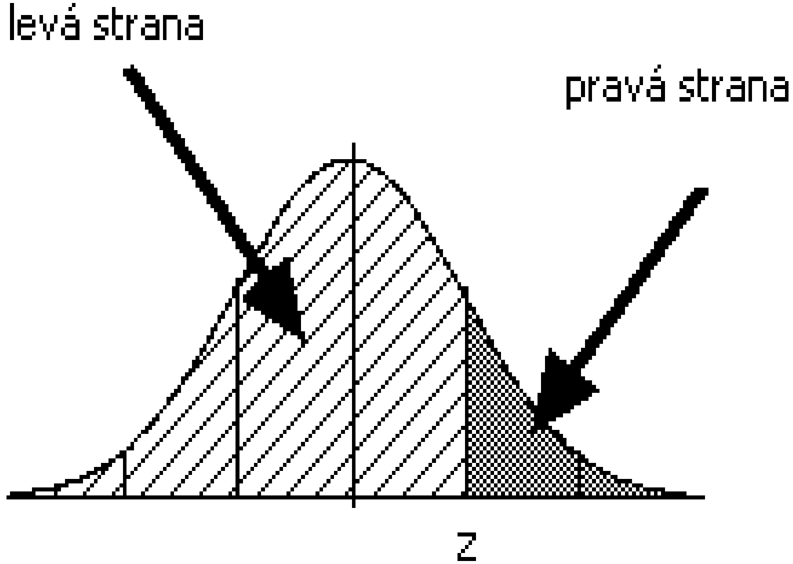


Normální rozdělení

- tabulka normálního rozdělení (z rozdělení)
- důležitý nástroj, obvykle jako apendix v učebnicích statistiky (spolu s dalšími tabulkami)
- umožňuje zjistit hustotu oblasti pod křivkou (tj. pravděpodobnost) pro jednotlivé z-skóry

Normální rozdělení

z	levá strana	pravá strana
0.00	0.5000	0.5000
0.01	0.5040	0.4960
...	...	...
0.30	0.6179	0.3821
0.31	0.6217	0.3783
...	...	...
1.00	0.8413	0.1587
...	...	...



Normální rozdělení - příklady

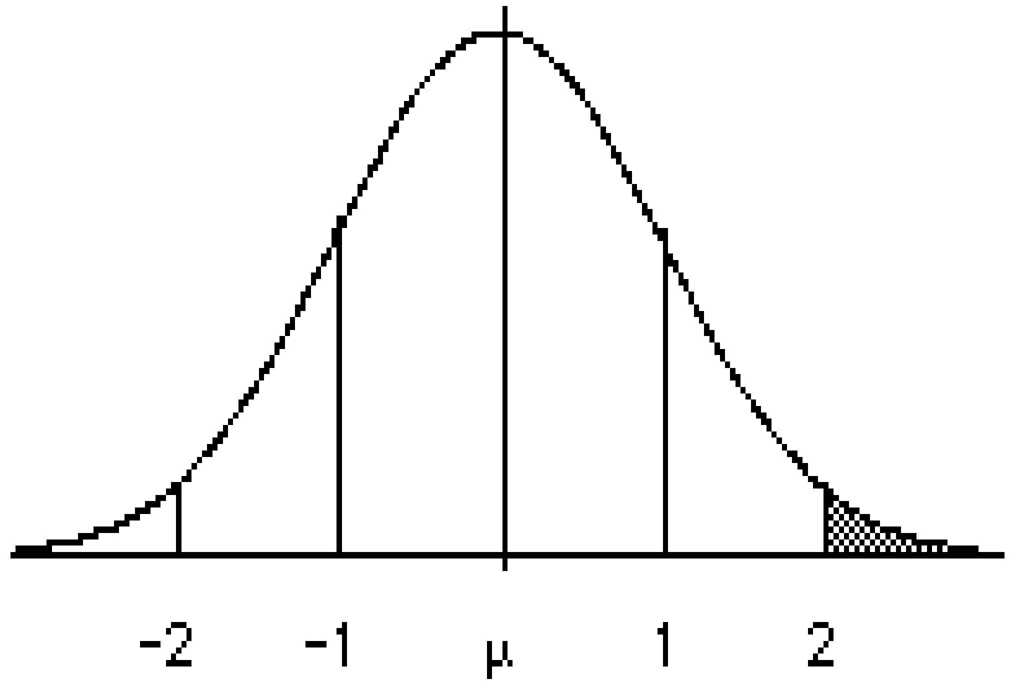
- postup při zjišťování pravděpodobnosti z tabulky:
  - načrtnout si normální rozdělení, s hodnotou průměru a směr. odch.
  - zakreslit hledanou hodnotu (v přibližné vzdálenosti od průměru), vystínovat hledanou oblast
  - převést hodnotu X na z-skór
  - najít v tabulce pravděpodobnost

Normální rozdělení - příklady

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 130 nebo vyšší? (μ = 100, σ =15)

Normální rozdělení - příklady

- z = 2



Normální rozdělení - příklady

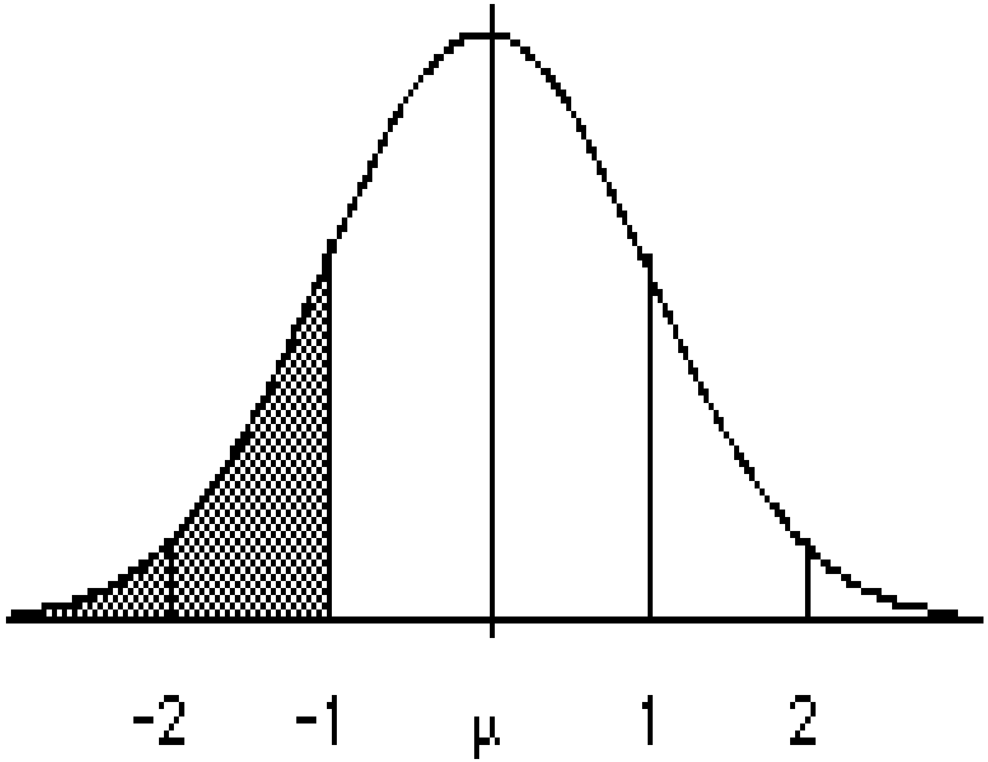
- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 130 nebo vyšší?
- $z = 2$
- $p = 0.0228$ tj. **2,3%**

Normální rozdělení - příklady

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 85 nebo nižší?

Normální rozdělení - příklady

- z = -1



Normální rozdělení - příklady

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 85 nebo nižší?
- $z = -1$
- $p = 0.1587$ tj. **15,9%**

Normální rozdělení - příklady

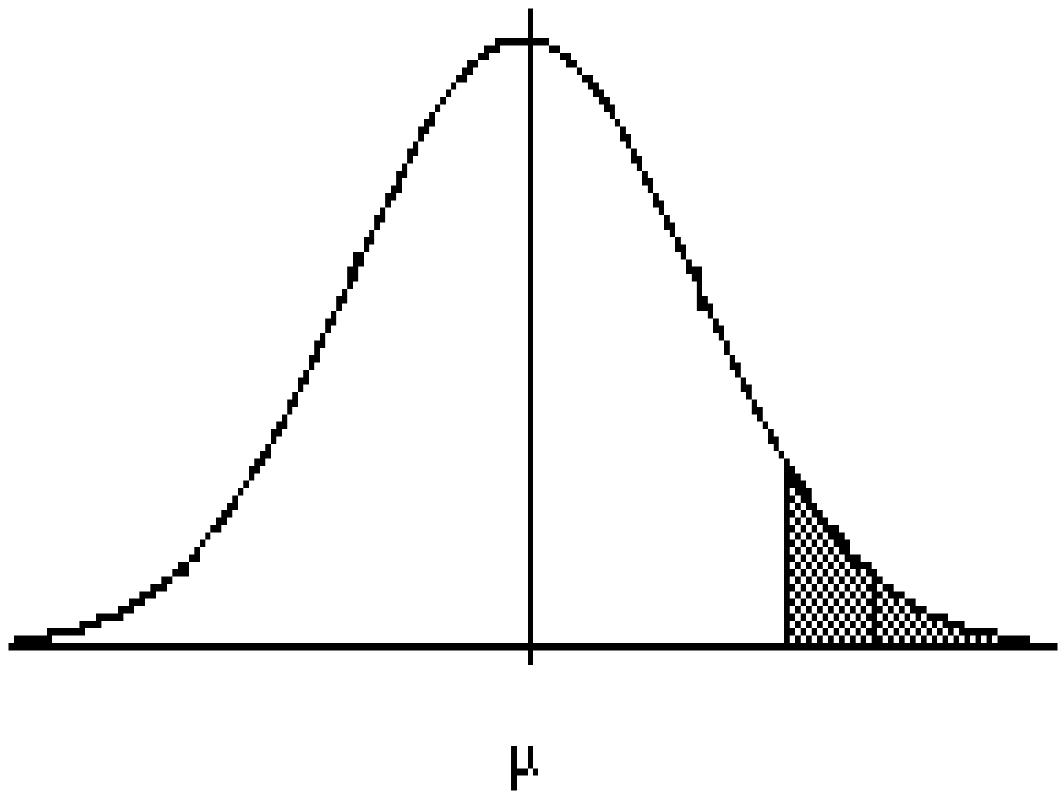
- postup při zjišťování z-skóru z tabulky:
  - načrtnout si normální rozdělení
  - vystínovat oblast odpovídající zadané pravděpodobnosti
  - v tabulce vyhledat příslušný z-skór
  - vypočítat z něj hrubý skór

Normální rozdělení - příklady

- Jakou minimální hodnotu IQ musí člověk mít, aby patřil mezi 5% osob s nejvyššími hodnotami IQ?

Normální rozdělení - příklady

- p = 0.05



Normální rozdělení - příklady

- Jakou minimální hodnotu IQ musí člověk mít, aby patřil mezi 5% osob s nejvyššími hodnotami IQ?
- p = 0.05
- z tabulky: **z = 1.65**
- X = (1.65).(15) + 100 = **124.75**

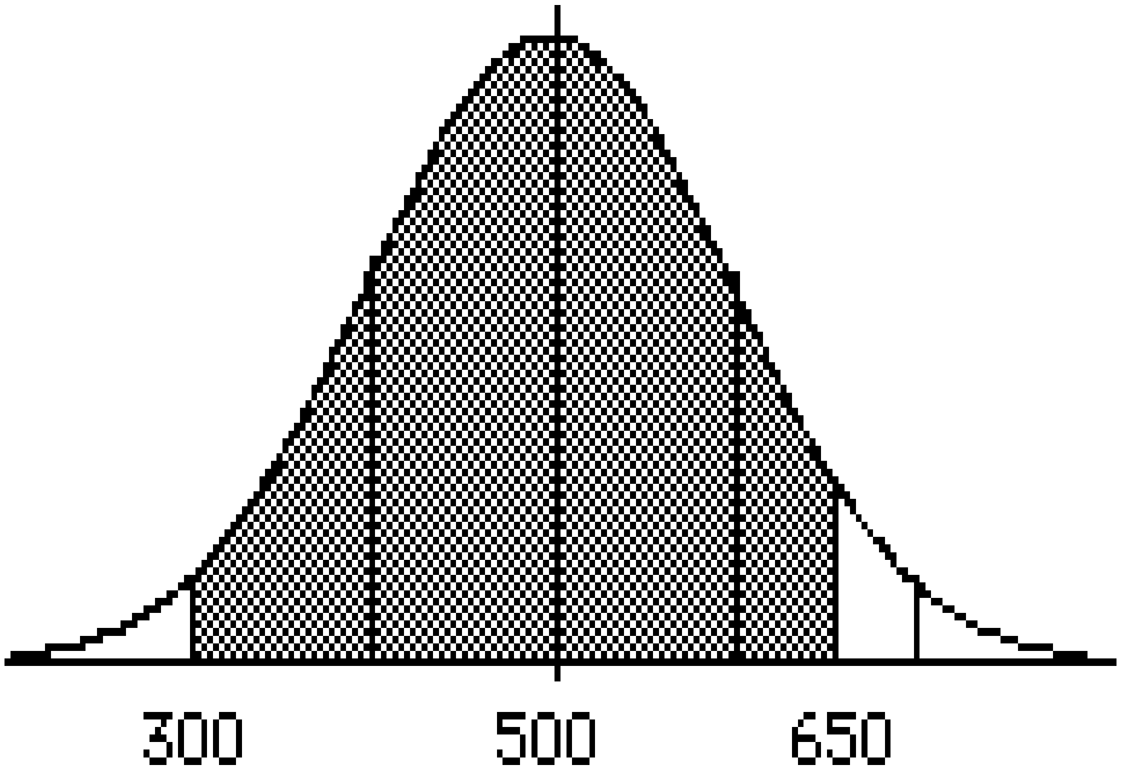
Normální rozdělení - příklady

- někdy chceme zjistit pravděpodobnost, že skór bude spadat do určitého intervalu
- postup:
  - načtrtnout graf a vystínovat zadanou oblast
  - oba (ohraničující) skóry převést na z-skóry
  - vyhledat pravděpodobnosti < nebo > skóru
  - sečíst či odečíst pravděpodobnosti

Normální rozdělení - příklady

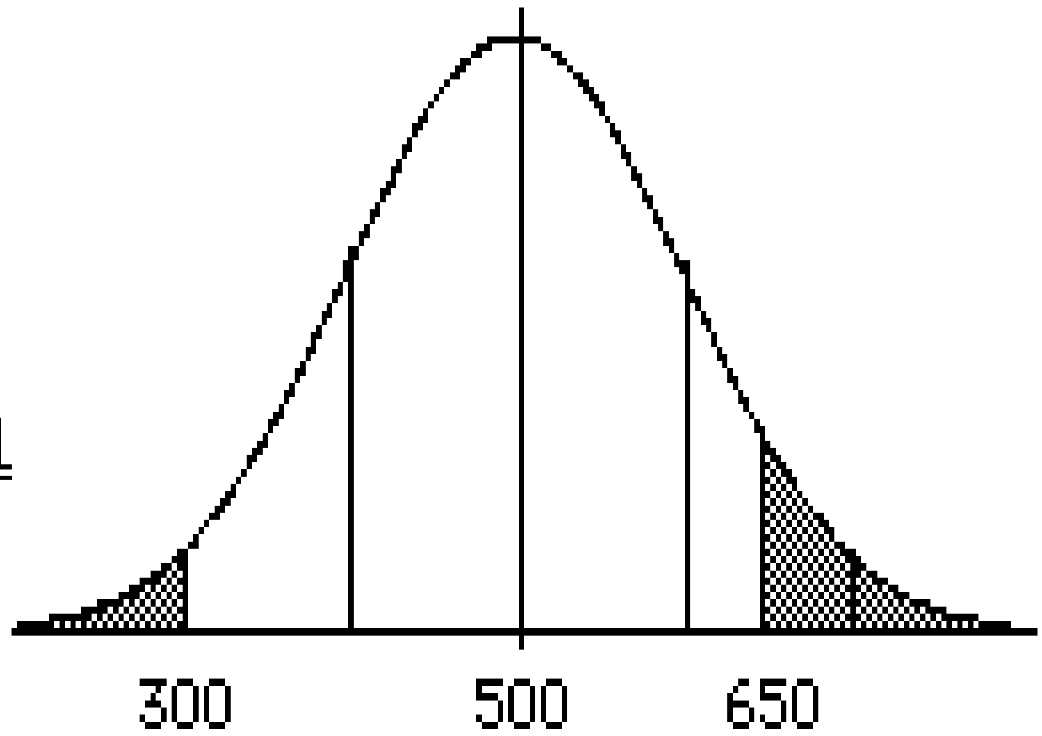
- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student bude v testu z psychologie skórovat mezi 300 a 650 body? (μ = 500, σ =100)

Normální rozdělení - příklady



Normální rozdělení - příklady

- jednodušší je spočítat pravděpodobnost skórování <u>mimo zadaný interval</u> a poté ji <u>odečíst od 1</u>



Normální rozdělení - příklady

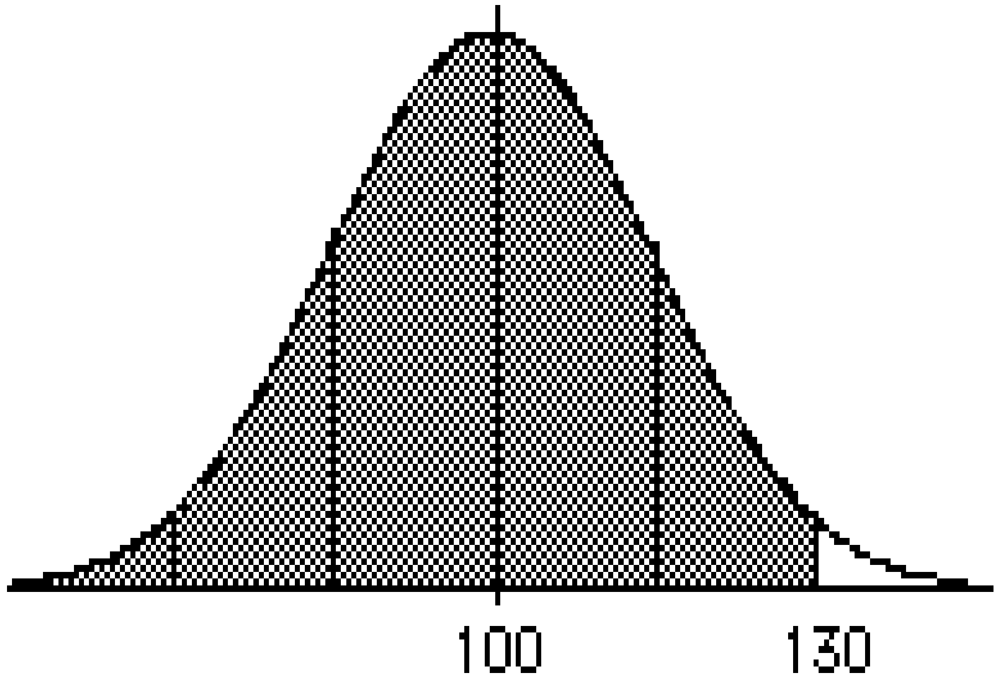
- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student bude v testu z psychologie skórovat mezi 300 a 650 body? (μ = 500, σ =100)
- $p(x \geq \frac{(650 - 500)}{100}) = p(z \geq 1.5) = 0.0668$
- $p(x < \frac{(300 - 500)}{100}) = p(z \leq -2.0) = 0.0228$
- 0.0668 + 0.0228 =.0896
- p(300 < x < 650) = 1- 0.0896 =**0.9104**

Normální rozdělení - příklady

- pomocí tabulky normálního rozdělení je možno nalézt také hodnotu percentilu
- příklad: kolik procent osob má nižší hodnoty IQ než člověk s IQ 130?

Normální rozdělení - příklady

- z = 2



Normální rozdělení - příklady

- Kolik procent osob má nižší hodnoty IQ než člověk s IQ 130?
- z tabulky: pro z = 2

p = 0.9772

97.72% osob má nižší skór