Odhady

- bodové odhady
- intervalové odhady
- konstrukce intervalu spolehlivosti pro průměr
- odhady podílů (kategoriální proměnné)

Odhady

- v příkladech v předchozích přednáškách jsme znali hodnoty průměru a rozptylu populace
- obvykle tomu ale bývá přesně naopak: **známe hodnoty (statistiky) výběru a neznáme hodnoty (parametry) populace**
- ty chceme z výběru **odhadnout**

Odhady

- 2 typy odhadů: bodové a intervalové
- **bodový odhad**: použijeme průměr vzorku a odhadneme, že se rovná průměru populace

Bodový odhad

- bodový odhad je problematický v tom, že dva různé výběry nám mohou dát dva různé odhady
- bodový odhad **neobsahuje** žádnou **informaci** o jeho **přesnosti** či **spolehlivosti**
- na čem závisí přesnost odhadu?

Bodový odhad

přesnost odhadu závisí na dvou charakteristikách

- **velikost výběru** (čím větší n, tím menší výběrová chyba)
- **variabilita hodnot v populaci** (čím vyšší, tím vyšší i výběrová chyba)

Intervalový odhad

- poskytuje rozsah (interval) hodnot, který s určitou pravděpodobností obsahuje hledanou hodnotu parametru

Intervalový odhad

je založen na:

- bodovém odhadu
- velikosti výběru
- variabilitě znaku v populaci (známé nebo rovněž odhadované)

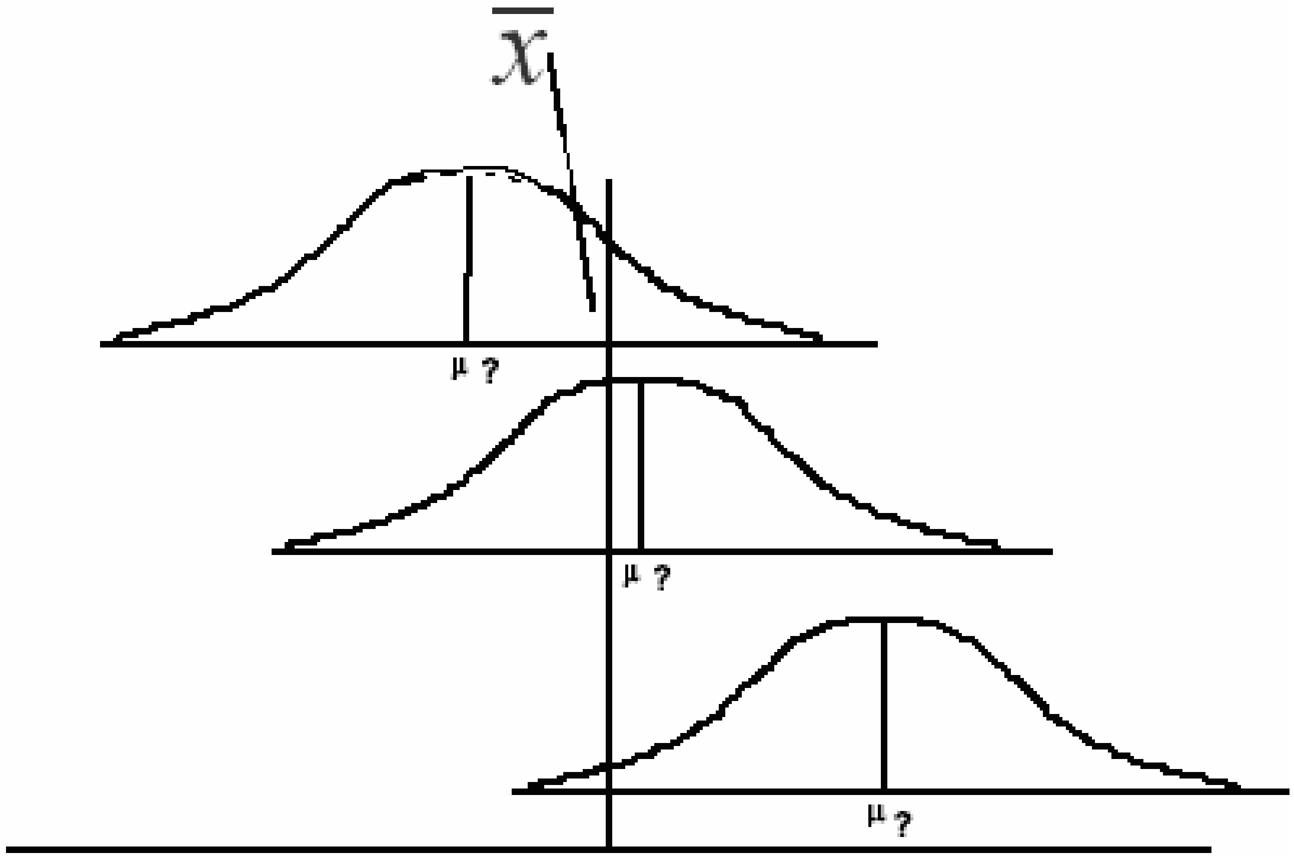
Intervalový odhad

- ptáme se: **jaká je hodnota μ ?**

Intervalový odhad

- ptáme se: **jaká je hodnota μ ?**
- výběrový průměr určité hodnoty může pocházet z populací o různých průměrech
- proto **nemůžeme jednoznačně určit hodnotu μ**

Intervalový odhad



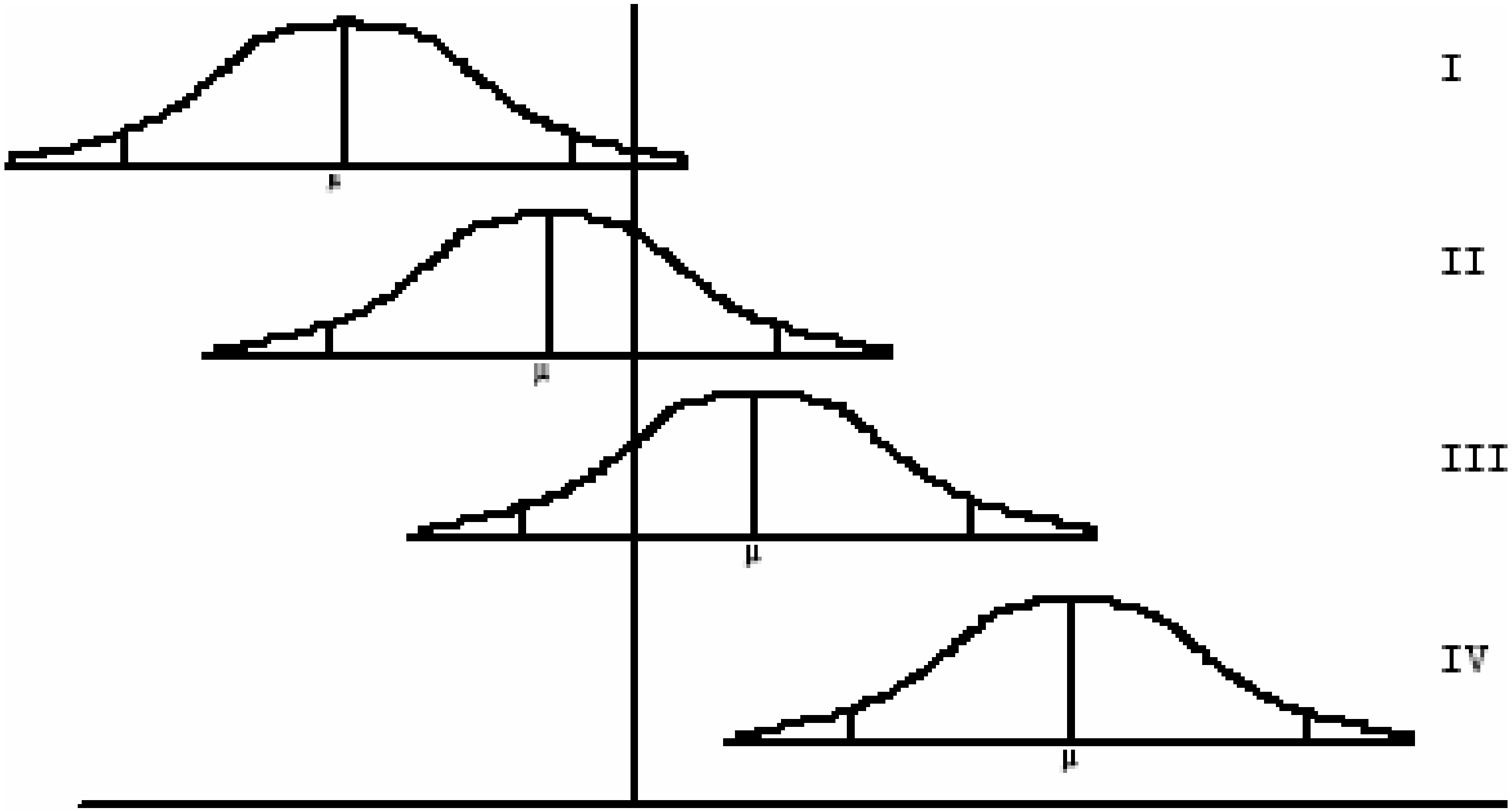
Intervalový odhad

- takže se místo toho snažíme určit, jaký je **možný rozsah hodnot μ**
- jaké populace (tj. s jakou hodnotou průměru) by mohly být pravděpodobným zdrojem našeho vzorku?

Intervalové odhady

- ze které populace nejpravděpodobněji pochází výběr, jehož průměr je v následujícím grafu naznačen svislou čarou?

RVP pro populace I-IV



Intervalové odhady

- výběr pochází
  - nejpravděpodobněji z populace II nebo III
  - méně pravděpodobně z populace I
  - a velmi málo pravděpodobně z populace IV

Intervalové odhady

- intervalový odhad spočívá v konstrukci tzv. **intervalu spolehlivosti** (confidence interval) – rozsahu hodnot, ve kterém s určitou pravděpodobností leží průměr populace

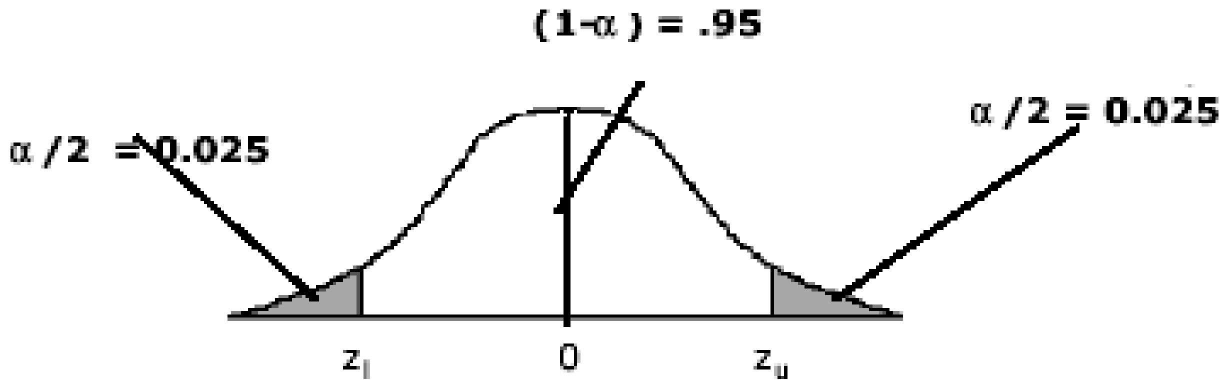
Interval spolehlivosti

- nejprve je třeba si **stanovit tuto pravděpodobnost** – tj. úroveň přesnosti(spolehlivosti);
- obvyklá je např. **95%** - snažíme se najít interval hodnot, ve kterém s 95% pravděpodobností leží průměr populace
- pak jde o tzv. **95% interval spolehlivosti**

Interval spolehlivosti

- poté **najít hodnotu *z* pro tuto pravděpodobnost** – tj. rozsah, ve kterém bude ležet středních 95% hodnot (výběrových průměrů)
- 2,5% na každé straně rozdělení

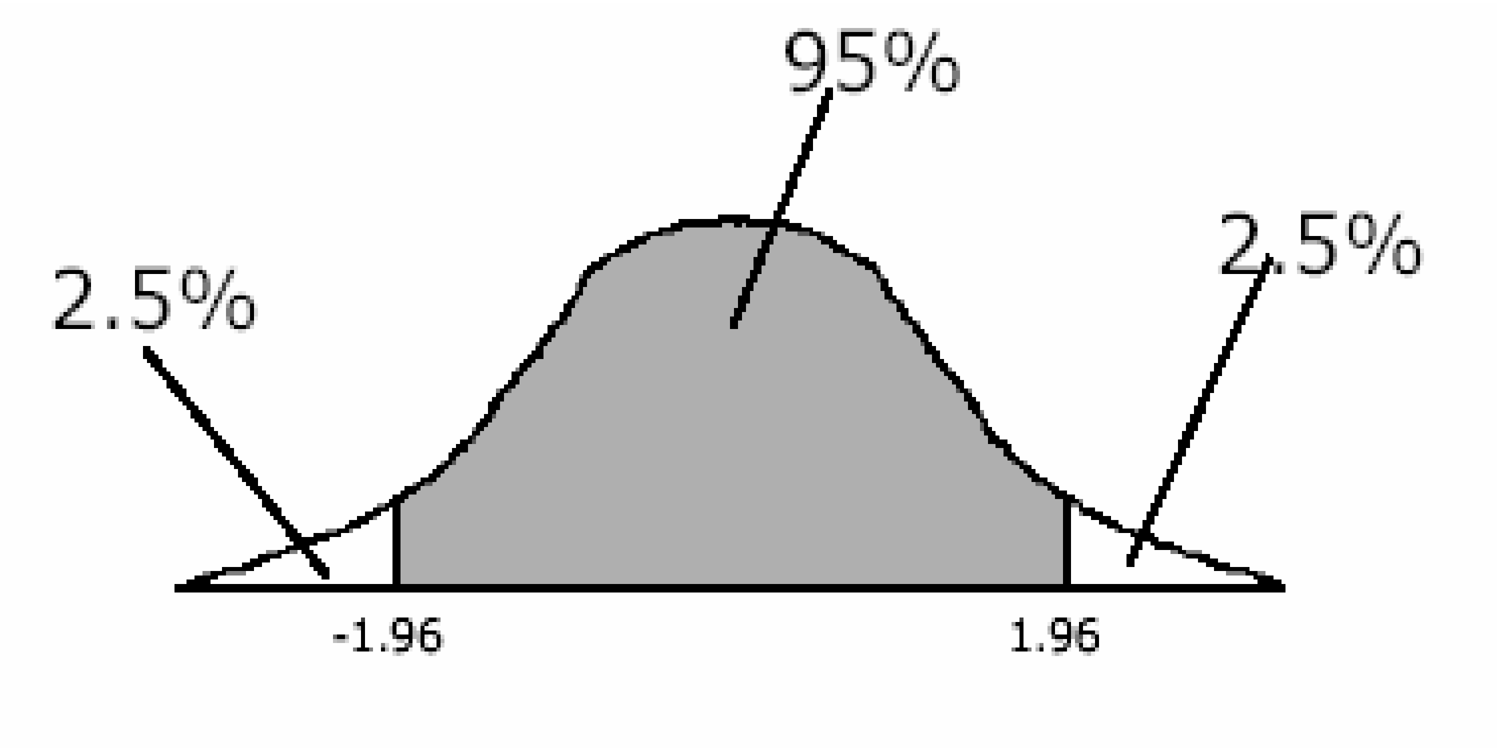
Interval spolehlivosti



Interval spolehlivosti

- tomu odpovídají hodnoty
  z=-1,96
  z=1,96

Interval spolehlivosti



Interval spolehlivosti - výpočet

$$\Pr(-1.96 \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le 1.96) = 0.95$$

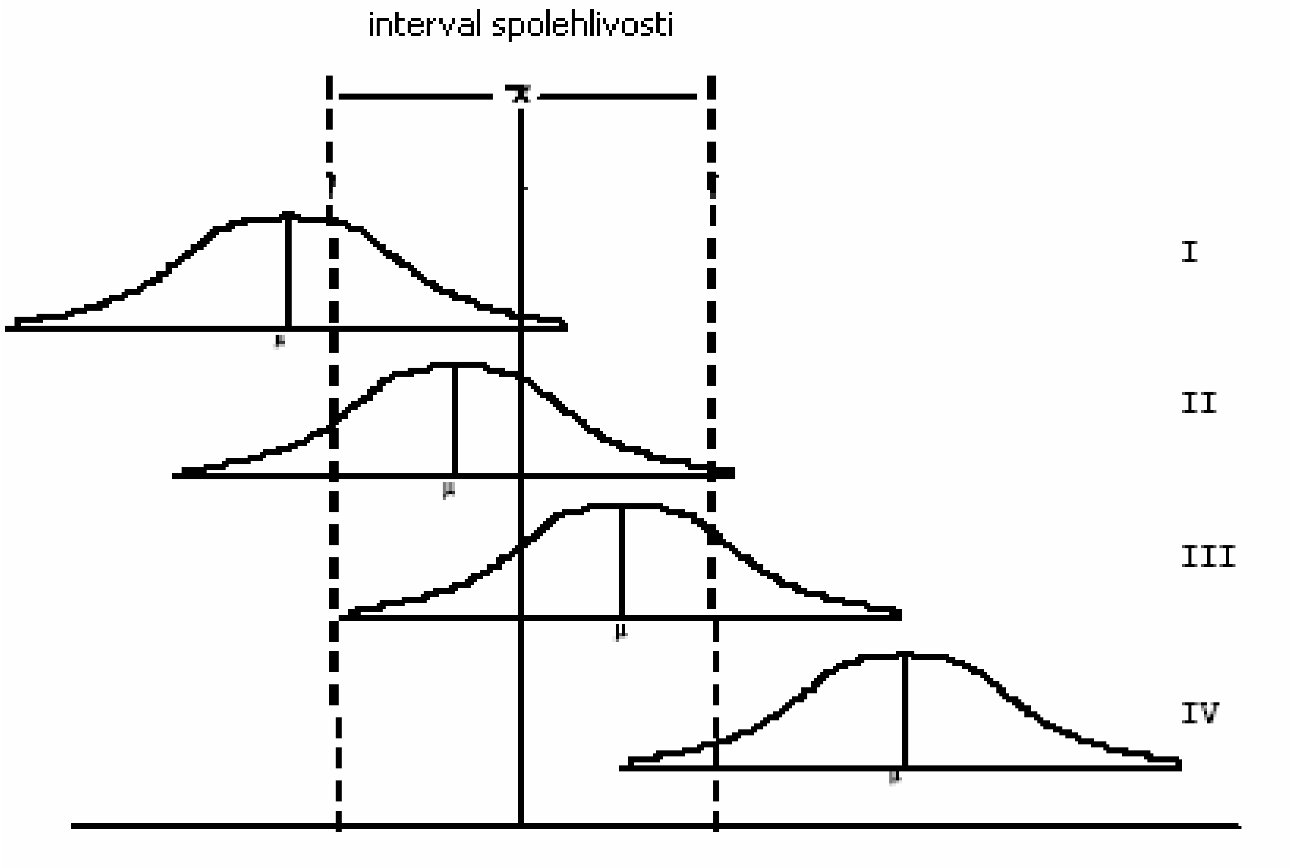
$$-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x} \le \mu \le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}$$

$$\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Interval spolehlivosti - výpočet

$$\overline{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Interval spolehlivosti



Interval spolehlivosti

- interpretace intervalu spolehlivosti: máme 95% pravděpodobnost, že se v tomto intervalu nachází průměr populace
- pokud bychom z populace vybrali 100 náhodných výběrů o velikosti n a pro každý z nich sestrojili tento interval, 95 intervalů by obsahovalo průměr populace a 5 nikoliv

Interval spolehlivosti

- oblíbený omyl:
  - v 95% intervalu spolehlivosti leží 95% hodnot populace (NEPLATÍ!)

- kromě 95% intervalu spolehlivosti se používá také např. 99% a 90% pravděpodobnost

Příklad

- náhodný výběr 36 dětí romského původu, průměrné IQ vzorku = 96
- na základě tohoto zjištění odhadněte průměrné IQ populace romských dětí (sestavte 95% (příp. 99% interval spolehlivosti)

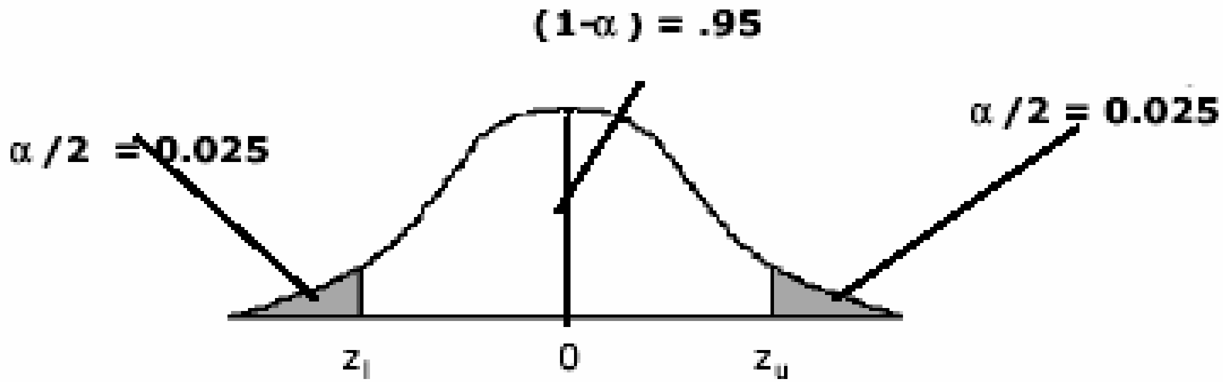
Příklad

- Postup:
  - bodový odhad: $\mu=96$
  - výpočet výběrové chyby (směrodatné odchylky RVP):
    $\sigma/\sqrt{n} = 15/\sqrt{36} = 15/6 = 2,5$
  - stanovení úrovně spolehlivosti: 95% (nebo 99%)
  - najít hodnotu *z* pro 95% (resp. 99%) pravděpodobnost

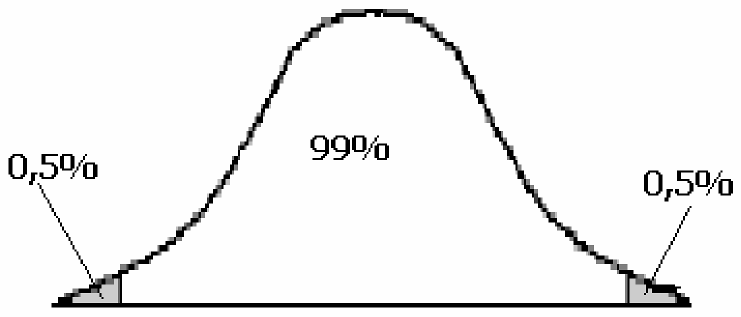
Příklad

- Postup:
  - bodový odhad: μ=96
  - výpočet výběrové chyby (směrodatné odchylky RVP):
    $\sigma/\sqrt{n} = 15/\sqrt{36} = 15/6 = 2{,}5$
  - stanovení úrovně spolehlivosti: 95% (nebo 99%)
  - najít hodnotu *z* pro 95% (resp. 99%) pravděpodobnost

Příklad



Příklad



Příklad

- v tabulce normálního rozdělení najdeme hodnoty *z*
- hodnoty *z* pro 95% : 1,96 a -1,96

  (hodnoty *z* pro 99% : 2,57 a -2,57)

Příklad

- k výběrovému průměru přičteme (pro horní hranici intervalu) a odečteme (pro spodní hranici) výběrovou chybu, vynásobenou hodnotou *z*

Příklad

- pro 95% :

$$\mu = 96 + 1,96*2,5 = 100,90$$

$$\mu = 96 - 1,96*2,5 = 91,10$$

95% interval spolehlivosti je 91,1 – 100,9

- pro 99% :

$$\mu = 96 + 2,57*2,5 = 102,43$$

$$\mu = 96 - 2,57*2,5 = 89,58$$

99% interval spolehlivosti je 89,6 – 102,4

Interval spolehlivosti

- **hodnoty *z*** pro nejčastěji užívané pravděpodobnosti:
  - 90% (zbývá 5% + 5%) z= +/- 1,645
  - 95% (zbývá 2,5% + 2,5%) z= +/- 1,96
  - 99% (zbývá 0,5% + 0,5%) z= +/- 2,57

Interval spolehlivosti

- v předchozích příkladech jsme předpokládali, že **známe hodnotu variability znaku v populaci**
- ve skutečnosti je tomu tak však **zřídka**
- je proto nutno **odhadnout** zároveň s průměrem i hodnotu směrodatné odchylky

Interval spolehlivosti

pro známé hodnoty směrodatné odchylky v populaci:

$$\overline{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Studentovo rozdělení

- pokud **za σ nahradíme *s*** (směr. odchylku výběrového průměru), pak musíme při konstrukci intervalu spolehlivosti místo *z* rozdělení použít tzv. **Studentovo t rozdělení**

Interval spolehlivosti

pro **neznámé** hodnoty směrodatné odchylky v populaci:

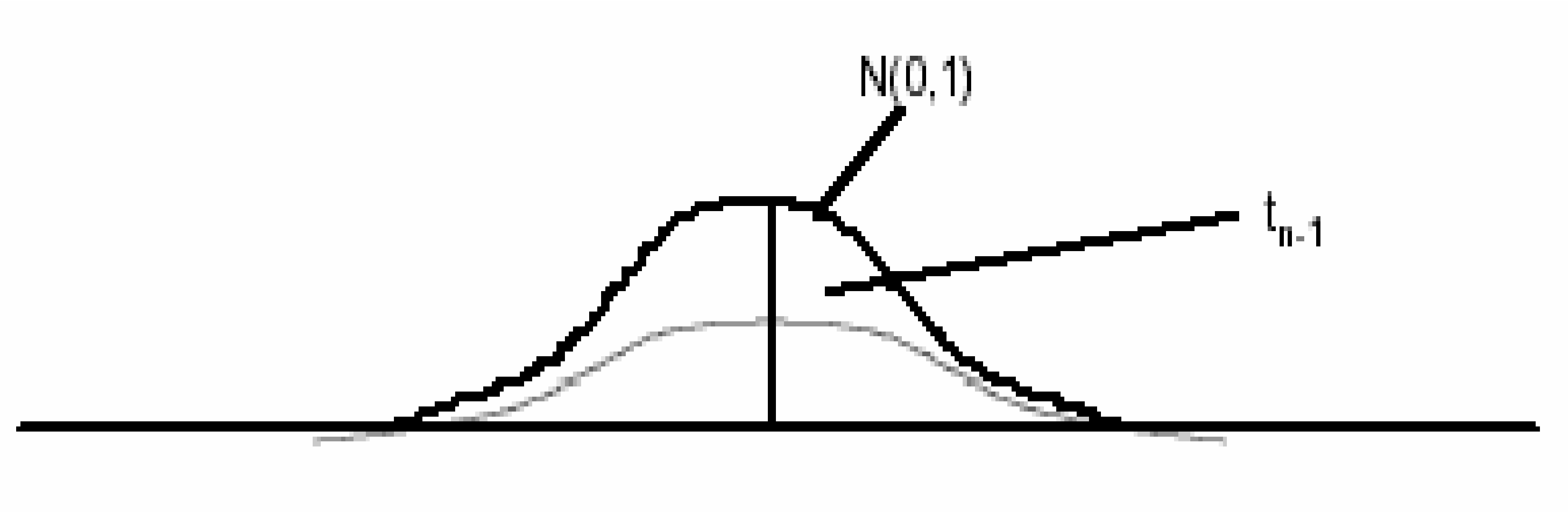
$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Studentovo rozdělení

- má také zvonovitý tvar, ale je více ploché než normální rozdělení
- je symetrické kolem průměru (0)
- pro každou velikost výběru (počet stupňů volnosti, df) existuje odlišné t rozdělení
  df = n-1

Studentovo rozdělení

srovnání s normálním rozdělením



Studentovo rozdělení

- srovnání s normálním rozdělením:
  - t rozdělení má vyšší variabilitu
  - více plochy na okrajích, méně ve středu
  - vzhledem k vyšší variabilitě budou intervaly spolehlivosti širší než u normálního rozdělení
  - jsou uváděny df obvykle jen do 100, protože pro n=100 se t rozdělení blíží normálnímu rozdělení

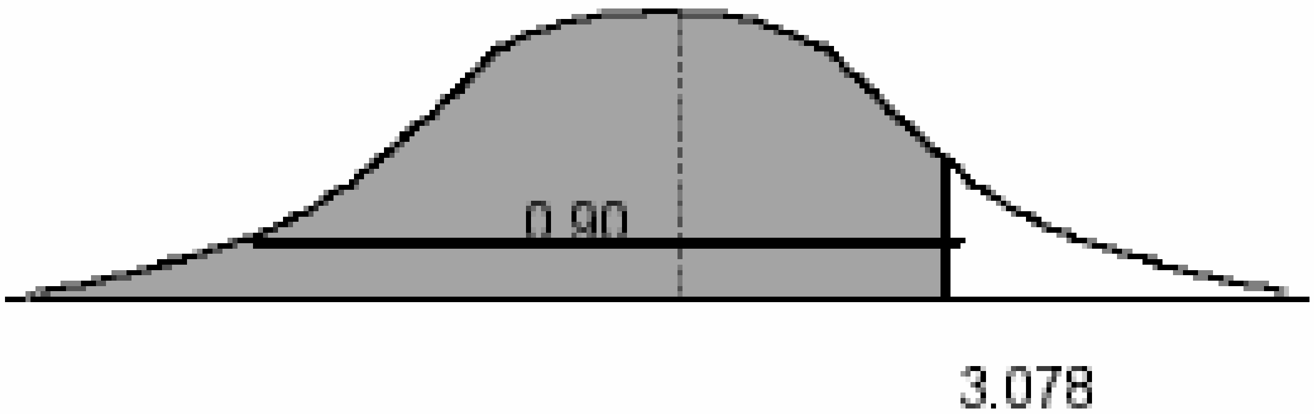
Studentovo rozdělení

- tabulka t-rozdělení:
  - každý řádek udává hodnoty t pro celé rozdělení pro daný počet stupňů volnosti (tj. n-1)
  - sloupce pro nejdůležitější percentily

Studentovo rozdělení

d.f.	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
1	3.078	6.3138	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.92	4.3027	6.965	9.9248
3	1.638	2.3534	3.1825	4.541	5.8409

Studentovo rozdělení



Odhady podílů

- u kategoriálních proměnných nemůžeme počítat průměry
- odhadujeme proto **podíly** jednotlivých kategorií proměnné

Odhady podílů

- např. podíl kuřáků v populaci českých adolescentů
- podíl pacientů s rakovinou plic, kteří přežijí 5 let od diagnózy
- podíl chlapců mezi dětmi s poruchou pozornosti

Odhady podílů

- pokud zkoumáme místo celé populace pouze výběr z ní, nezajímá nás tolik, jaký je podíl kategorií proměnné ve výběru (četnost **p**)
- ale spíše jaký je skutečný podíl v populaci – četnost $\boldsymbol{\pi}$

Odhady podílů

- při dostatečně velkém *n* platí i pro rozdělení podílů centrální limitní věta
- rozdělení výběrových podílů je normální rozdělení, s **průměrnou četností π** a směrodatnou odchylkou (výběrovou chybou)

$$SE = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

Příklad 4

- chceme zjistit, jaká je podpora zachování hlavního nádraží v Brně na stávajícím místě
- náhodný výběr z populace brněnských voličů (n=1000 osob)
- 585 osob se vyjádřilo <u>pro</u> (p=0,585)
- odhadněte s 95% spolehlivostí podporu zachování nádraží v populaci brněnských voličů

Odhady podílů

- interval spolehlivosti pro podíly se spočítá podobně jako pro průměry:

$$p \pm z_{1-\alpha/2}\,\sigma_p$$

Odhady podílů

- nemůžeme však spočítat výběrovou chybu, protože neznáme π
- v tomto případě je však možné dosadit místo toho *p* a přitom použít normální rozdělení (pokud je $n>30$)
- pokud je $n<30$, pak dosadíme místo π hodnotu 0,5

Příklad 4

- $p=0,585$
- $z=1,96$
- $SE(p)=\sqrt{[0,585(1-0,585)/1000]}$

$=0,156$

interval spolehlivosti

$0.585 \pm 1.96(0.0156)$

$0.585 \pm 0,0305$

--- **přesnost odhadu je ± 3%**

Příklad 4

- s 95% pravděpodobností je podíl osob souhlasících se zachováním hlavního nádraží na stávajícím místě **mezi 55.4% a 61.6%**
- tj. máme 95% pravděpodobnost, že kdyby se v době průzkumu hlasovalo, bude většina pro

Odhady podílů

vztah mezi velikostí vzorku a přesností odhadu

- n=100 ± 10%
- n=200 ± 7%
- n=400 ± 5%
- n=1000 ± 3%
- n=2400 ± 2%
- n=9600 ± 1%

Odhady podílů

- požadovaná velikost vzorku roste mnohem rychleji než spolehlivost odhadu (pro zdvojnásobení spolehlivosti je nutné asi čtyřnásobně zvětšit vzorek)
- důležité při plánování výzkumu – jakou přesnost potřebujeme? jaké budou náklady?
- podobný vztah platí pro odhad průměru

Kontrolní otázky

- 2 typy odhadů
- na čem závisí šířka intervalu spolehlivosti? (*není nutno znát zpaměti vzorce, ale je třeba chápat princip výpočtu)*
- vztah velikosti výběru a spolehlivosti odhadu