Induktivní statistika

Rozdělení výběrových průměrů

Odhady

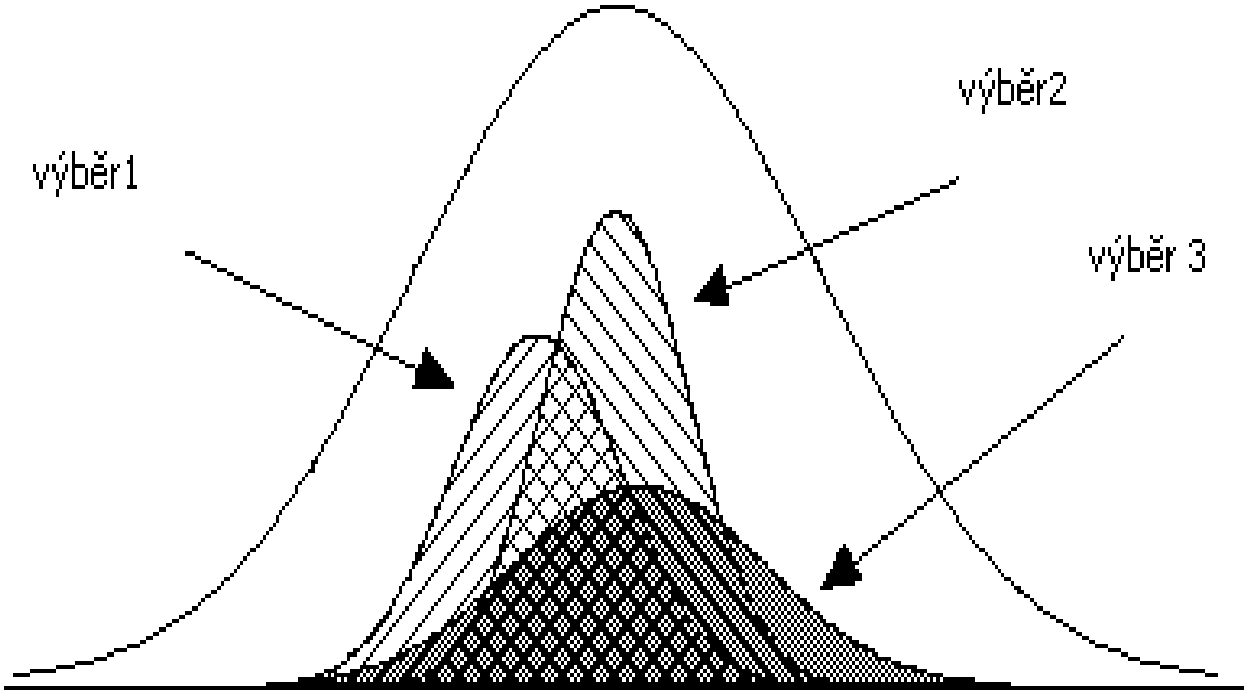
Rozdělení výběrových průměrů

- cílem induktivní statistiky je odhadnout parametry populace z charakteristik vzorku (výběrového souboru)
- např. odhadem průměru populace bude průměr vzorku
- odhad je vždy zatížen určitou **výběrovou chybou**

Rozdělení výběrových průměrů

- předpokládejme, že z jedné populace vybereme 3 různé vzorky
- budou se nejspíš navzájem lišit ve tvaru rozdělení hodnot, průměru i variabilitě
- jak se rozhodneme, který z nich zvolit pro odhad průměru populace ??

Rozdělení výběrových průměrů



Rozdělení výběrových průměrů

- pokud bychom spočítali průměry ze všech možných výběrů o určité velikosti *n*, budou tvořit tzv. **rozdělení výběrových průměrů** (sampling distribution)

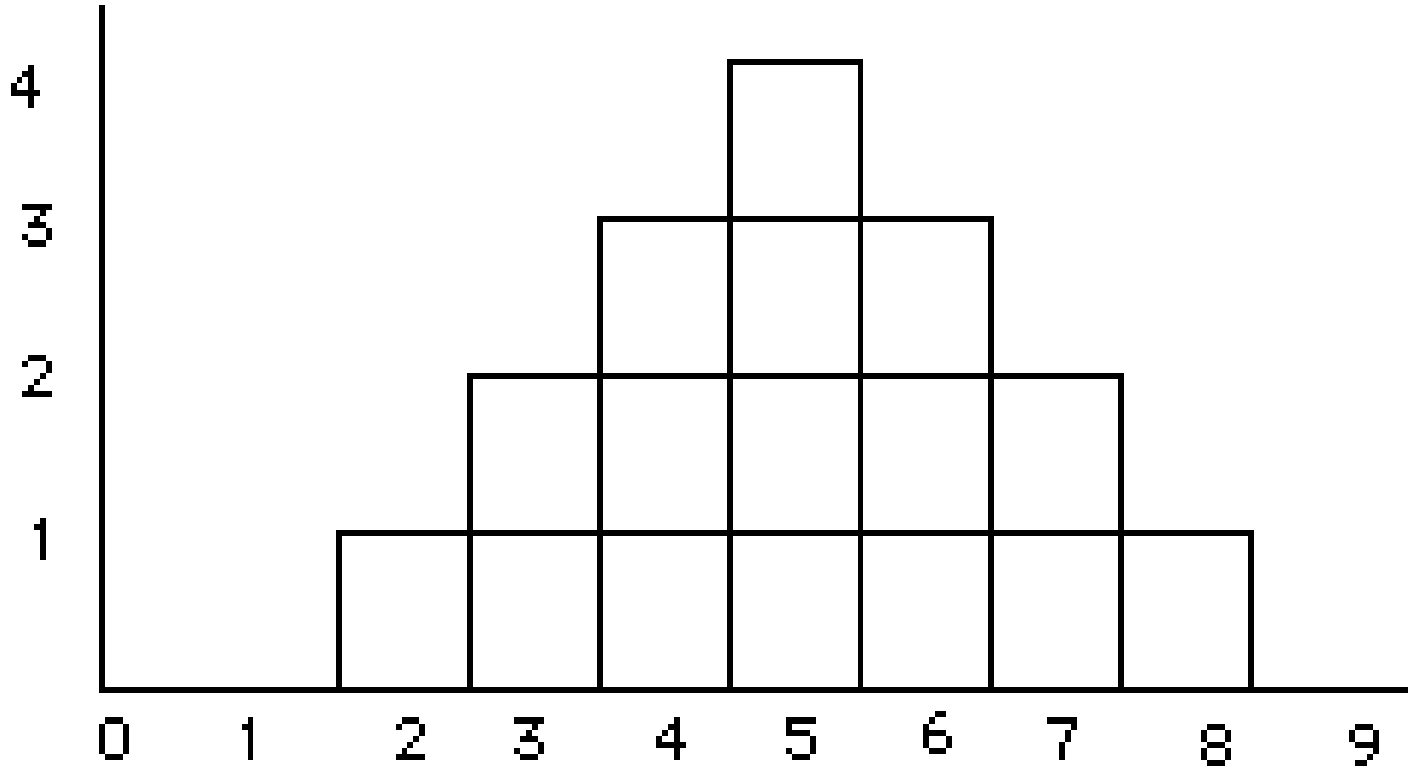
Rozdělení výběrových průměrů

- **příklad**: populace hodnot 2, 4, 6, 8
- průměr $\mu = 5$
- předpokládejme, že průměr neznáme a pokoušíme se ho odhadnout ze vzorku n=2
- v tabulce jsou uvedeny všechny možné výběrové soubory

Rozdělení výběrových průměrů

výběr	**první skór**	**druhý skór**	**průměr vzorku**
1	**2**	**2**	**2**
2	**2**	**4**	**3**
3	**2**	**6**	**4**
4	**2**	**8**	**5**
5	**4**	**2**	**3**
6	**4**	**4**	**4**
7	**4**	**6**	**5**
8	**4**	**8**	**6**
9	**6**	**2**	**4**
10	**6**	**4**	**5**
11	**6**	**6**	**6**
12	**6**	**8**	**7**
13	**8**	**2**	**5**
14	**8**	**4**	**6**
15	**8**	**6**	**7**
16	**8**	**8**	**8**

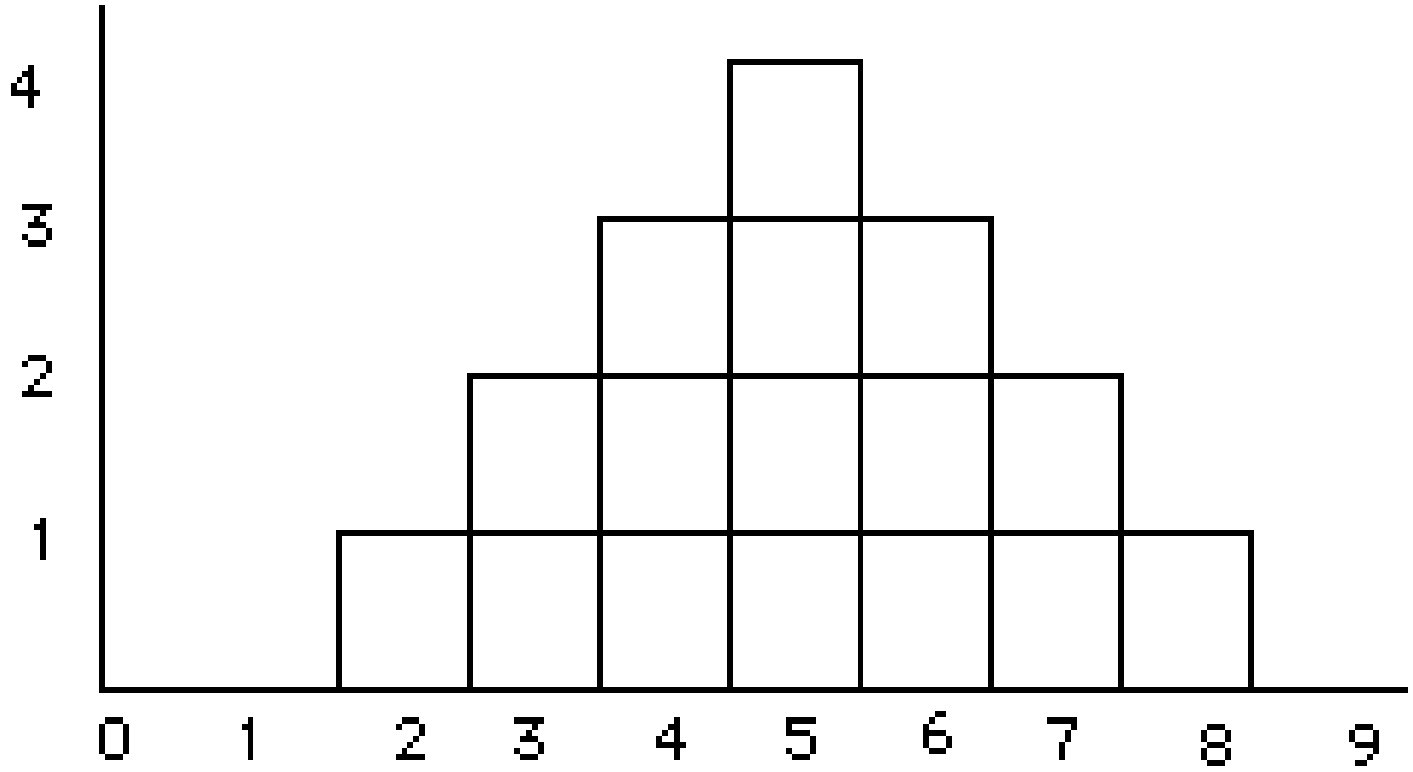
Rozdělení výběrových průměrů



Rozdělení výběrových průměrů

- jaká je pravděpodobnost, že z této populace vybereme vzorek s průměrem vyšším než 7?

Rozdělení výběrových průměrů



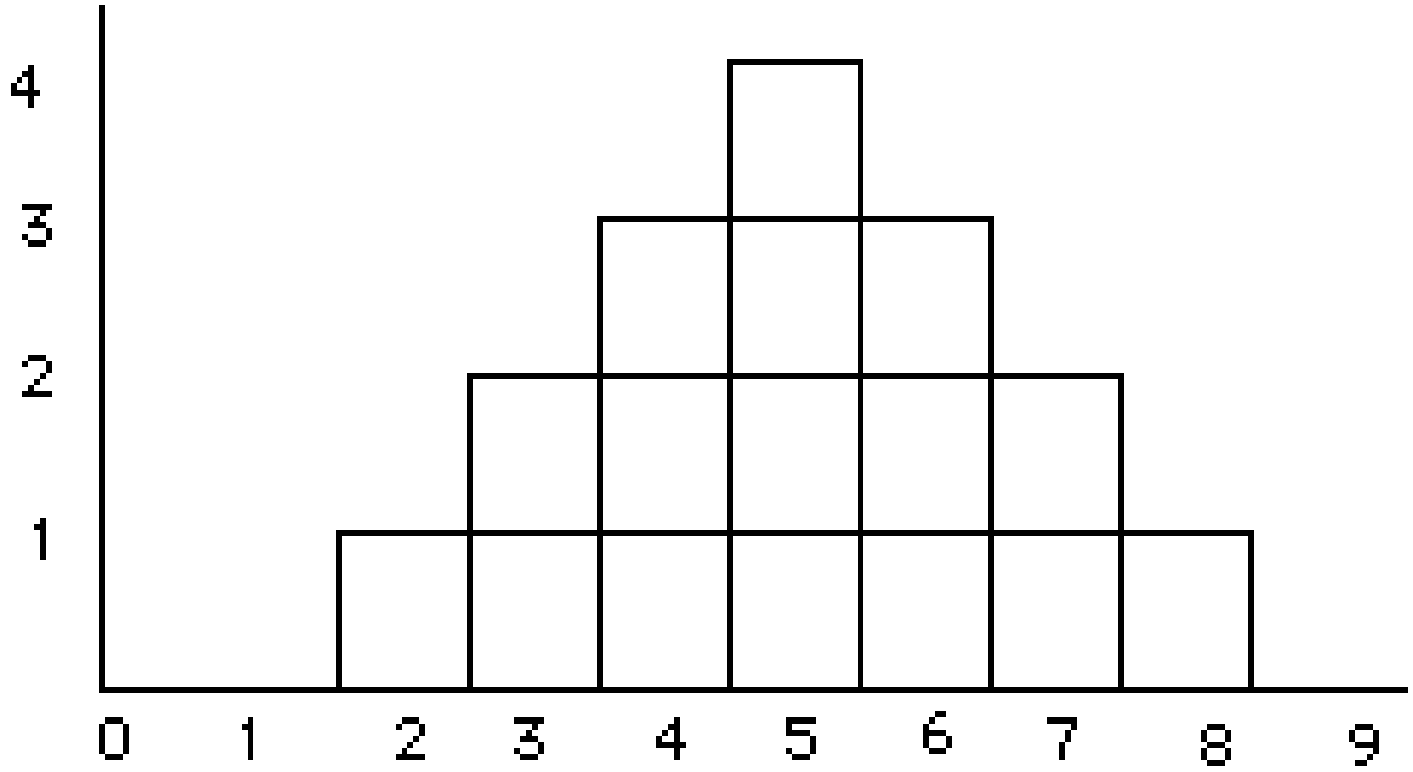
Rozdělení výběrových průměrů

- jaká je pravděpodobnost, že z této populace vybereme vzorek s průměrem vyšším než 7?
- v rozdělení výběrových průměrů je takový vzorek jen 1 ze 16 – tj. pravděpodobnost takového vzorku je 1/16 = 0.0625, tj. 6%

Rozdělení výběrových průměrů

- jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný vzorek 2 čísel z této populace bude mít průměr roven průměru populace, tj. 5?

Rozdělení výběrových průměrů



Rozdělení výběrových průměrů

- jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný vzorek 2 čísel z této populace bude mít průměr roven průměru populace, tj. 5?
- tato pravděpodobnost je 4/16, tj. 25%

Rozdělení výběrových průměrů

- většina populací i vzorků je mnohem větší
- ale existují určité základní vlastnosti rozdělení výběrových průměrů (RVP)
- **tvar** – RVP se při dostatečně velkém vzorku (30 a více) blíží **normálnímu rozdělení**

Rozdělení výběrových průměrů

- **průměr** tohoto rozdělení (=průměr průměrů všech teoretických výběrů) je roven **průměru populace**
- označuje se také jako očekávaná hodnota průměru vzorku

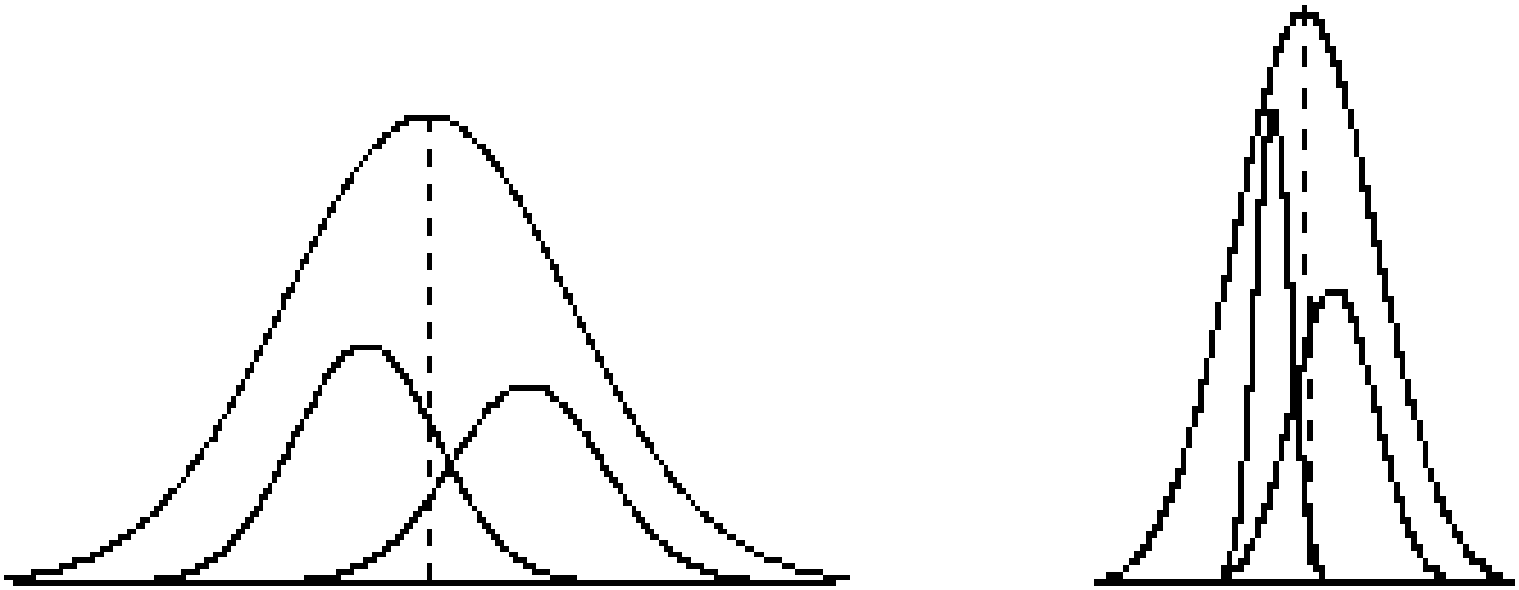
Rozdělení výběrových průměrů

- **variabilita** – směrodatná odchylka RVP se označuje jako výběrová nebo standardní chyba průměru (standard error)
- jde o směrodatnou odchylku výběrových průměrů od průměru populace
- ukazuje, jak spolehlivý je odhad populačního průměru z průměru vzorku – tj. jak velkou chybou je odhad zatížen

Rozdělení výběrových průměrů

- velikost výběrové chyby je dána dvěma charakteristikami: variabilitou v populaci a velikostí výběru
- **variabilita znaku v populaci**: čím je vyšší, tím je vyšší i variabilita výběrových průměrů

Rozdělení výběrových průměrů



Rozdělení výběrových průměrů

- velikost výběru – čím větší výběr *(n)*, tím méně průměrů výběrů se odchyluje od průměru populace (= výběrová chyba je menší)

Rozdělení výběrových průměrů

- vzorec pro výpočet výběrové chyby:

$$\sigma_x = \sigma/\sqrt{n}$$

Rozdělení výběrových průměrů

- platí zjednodušení **tzv. centrálního limitního teorému** – pro každou populaci o průměru μ a směrodatné odchylce σ se bude rozdělení výběrových průměrů výběrů (pro rozsah výběru jdoucí do nekonečna) blížit normálnímu rozdělení s průměrem μ a směrodatnou odchylkou $\sigma_x = \sigma/\sqrt{n}$

Rozdělení výběrových průměrů

- **příklad**: když vybereme z populace náhodně vzorek 9 osob, jaká je pravděpodobnost, že jejich průměrné IQ bude větší nebo rovno 112?

Rozdělení výběrových průměrů

- ptáme se vlastně: jaká je pravděpodobnost, že vzorek 9 osob z populace o průměru 100 bude mít průměr 112 nebo vyšší?
- a k tomu potřebujeme znát odpověď na otázku

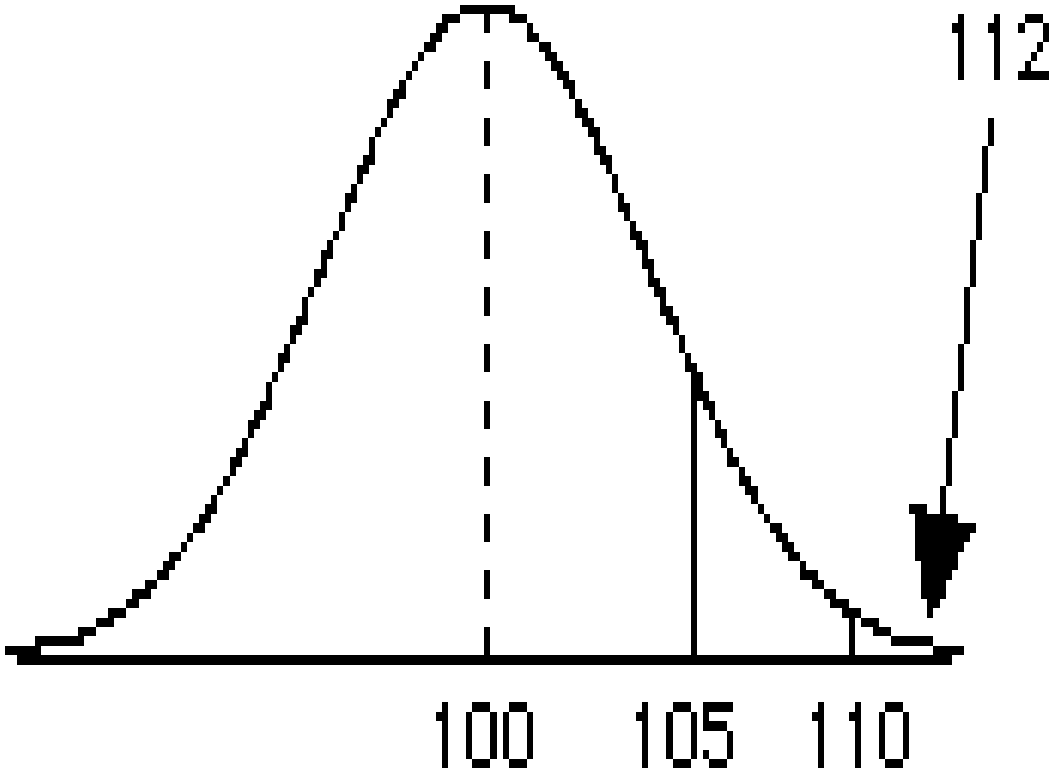
  jaké je **rozdělení výběrových průměrů**
  pro populaci s průměrem 100, sd 15 a velikost vzorku 9?

Rozdělení výběrových průměrů

- musíme zjistit charakteristiku rozdělení výběrových průměrů pro tuto velikost vzorku (N=9) u populace s $\mu = 100$, $\sigma = 15$
- průměr RVP = 100
- směrodatná odchylka = standardní chyba:

  $\sigma_x = \sigma/\sqrt{n} = 15/3 = 5$

Rozdělení výběrových průměrů



Rozdělení výběrových průměrů

- známe průměr a směrodatnou odchylku rozdělení, převedeme tedy skór 112 na z-skór
- $\mu = 100$, $\sigma_x = 5$
- **z** = (112-100)/ σ_x = 12/5 = **2.4**

Rozdělení výběrových průměrů

- pak najdeme v tabulce z-rozdělení pravděpodobnost pro z=2.4

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
…										
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952

Rozdělení výběrových průměrů

- pak najdeme v tabulce z-rozdělení pravděpodobnost pro z=2.4
- z tabulky $P(Z \geq 2.4) =$ **0.4918**
- odečteme od 50% (celá jedna strana z-rozdělení) a vyjde nám pravděpodobnost:
- $p = 0.5000 - 0.4918 =$ **0.0082**

Odhady

- bodové odhady
- intervalové odhady
- konstrukce intervalu spolehlivosti pro průměr
- odhady podílů (kategoriální proměnné)

Odhady

- v příkladech v předchozích přednáškách jsme znali hodnoty průměru a rozptylu populace
- obvykle tomu ale bývá přesně naopak: **známe hodnoty (statistiky) výběru a neznáme hodnoty (parametry) populace**
- ty chceme z výběru **odhadnout**

Odhady

- 2 typy odhadů: bodové a intervalové
- **bodový odhad**: použijeme průměr vzorku a odhadneme, že se rovná průměru populace

Bodový odhad

- bodový odhad je problematický v tom, že dva různé výběry nám mohou dát dva různé odhady
- bodový odhad **neobsahuje** žádnou **informaci** o jeho **přesnosti** či **spolehlivosti**
- na čem závisí přesnost odhadu?

Bodový odhad

přesnost odhadu závisí na dvou charakteristikách

- **velikost výběru** (čím větší n, tím menší výběrová chyba)
- **variabilita hodnot v populaci** (čím vyšší, tím vyšší i výběrová chyba)

Intervalový odhad

- poskytuje rozsah (interval) hodnot, který s určitou pravděpodobností obsahuje hledanou hodnotu parametru

Intervalový odhad

je založen na:

- bodovém odhadu
- velikosti výběru
- variabilitě znaku v populaci (známé nebo rovněž odhadované)

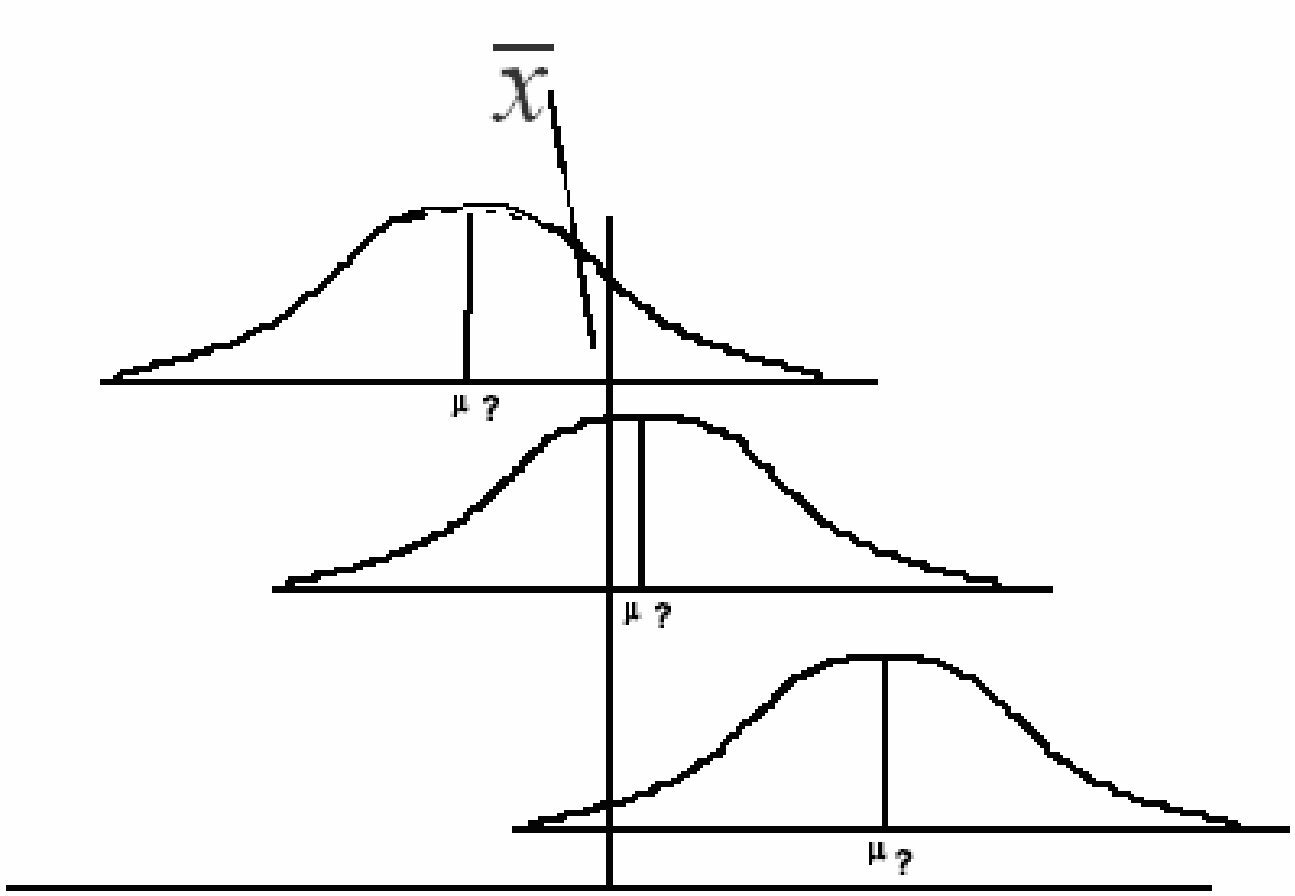
Intervalový odhad

- ptáme se: **jaká je hodnota μ ?**

Intervalový odhad

- ptáme se: **jaká je hodnota μ ?**
- výběrový průměr určité hodnoty může pocházet z populací o různých průměrech
- proto **nemůžeme jednoznačně určit hodnotu μ**

Intervalový odhad



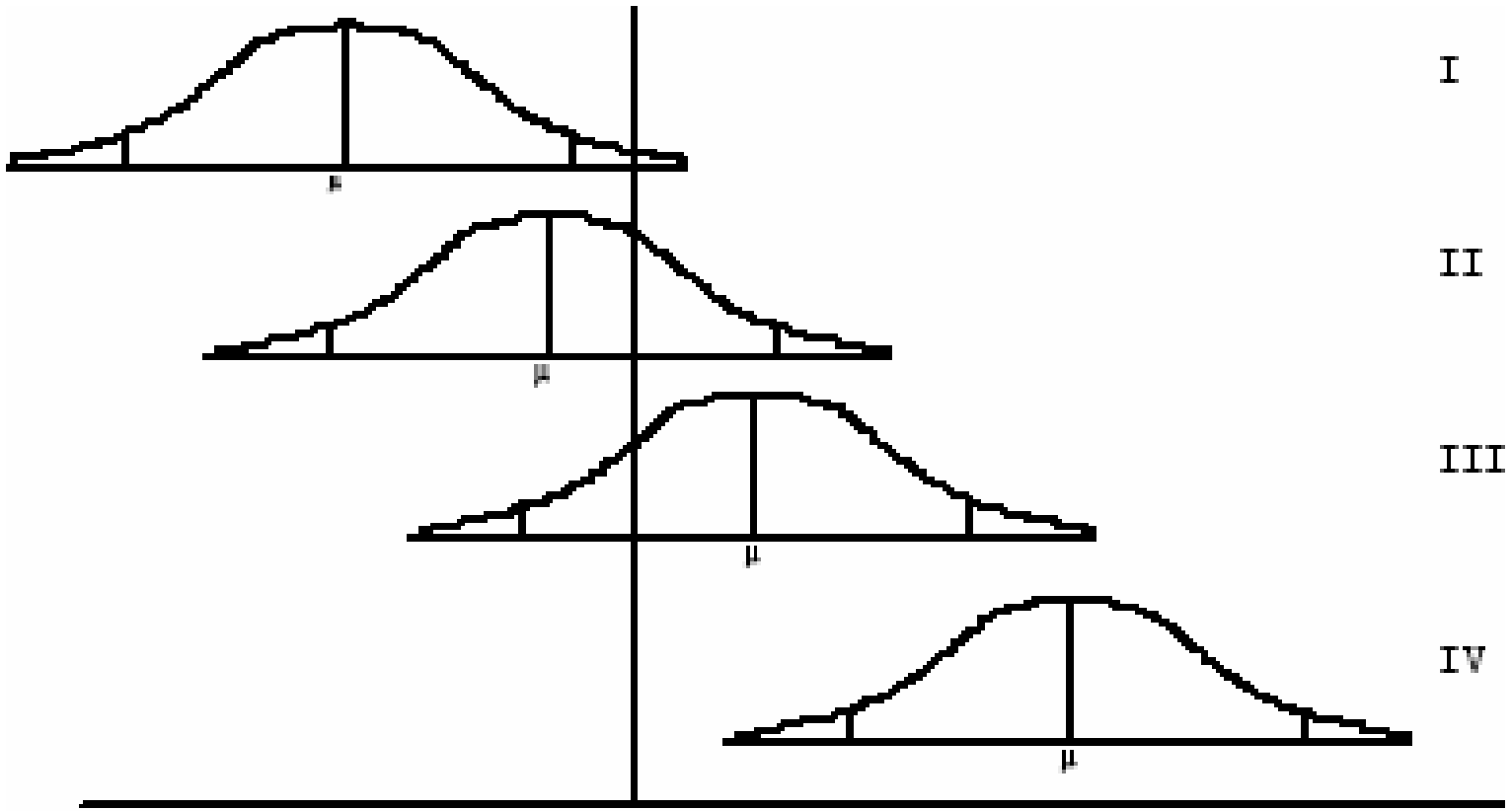
Intervalový odhad

- takže se místo toho snažíme určit, jaký je **možný rozsah hodnot** μ
- jaké populace (tj. s jakou hodnotou průměru) by mohly být pravděpodobným zdrojem našeho vzorku?

Intervalové odhady

- ze které populace nejpravděpodobněji pochází výběr, jehož průměr je v následujícím grafu naznačen svislou čarou?

RVP pro populace I-IV



Intervalové odhady

- výběr pochází
  - nejpravděpodobněji z populace II nebo III
  - méně pravděpodobně z populace I
  - a velmi málo pravděpodobně z populace IV

Intervalové odhady

- intervalový odhad spočívá v konstrukci tzv. **intervalu spolehlivosti** (confidence interval) = rozsahu hodnot, ve kterém s určitou pravděpodobností leží průměr populace

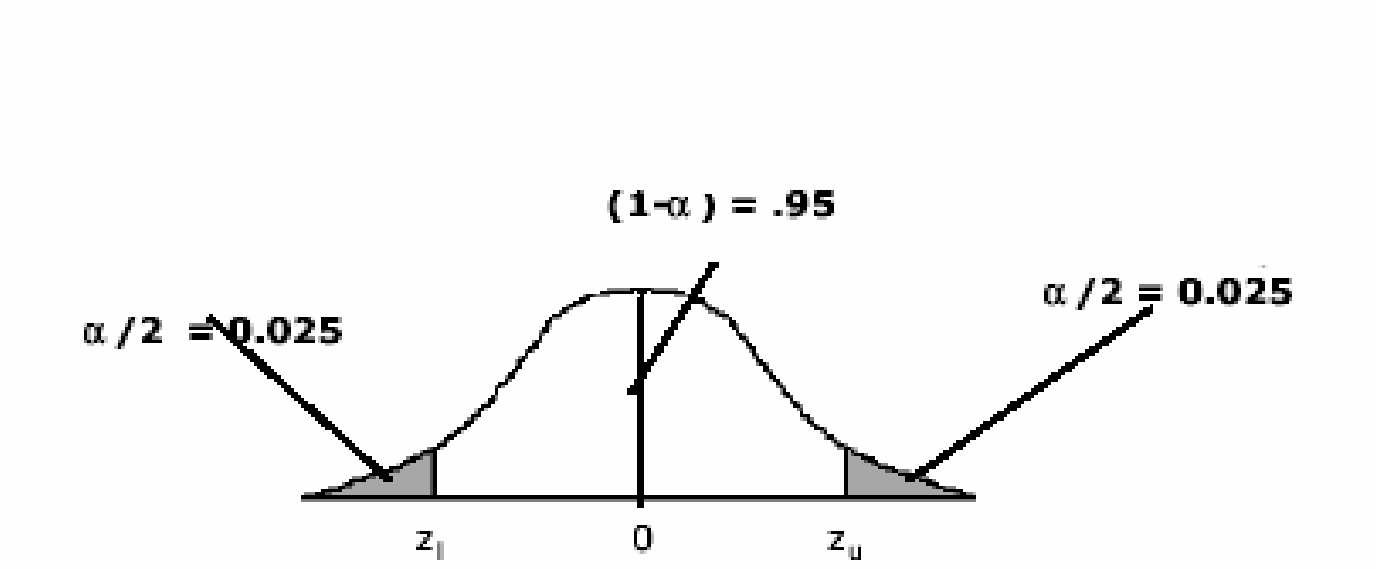
Interval spolehlivosti

- nejprve je třeba si **stanovit tuto pravděpodobnost** – tj. úroveň přesnosti(spolehlivosti);
- obvyklá je např. **95%** - snažíme se najít interval hodnot, ve kterém s 95% pravděpodobností leží průměr populace
- pak jde o tzv. **95% interval spolehlivosti**

Interval spolehlivosti

- poté **najít hodnotu *z* pro tuto pravděpodobnost** – tj. rozsah, ve kterém bude ležet středních 95% hodnot (výběrových průměrů)
- 2,5% na každé straně rozdělení

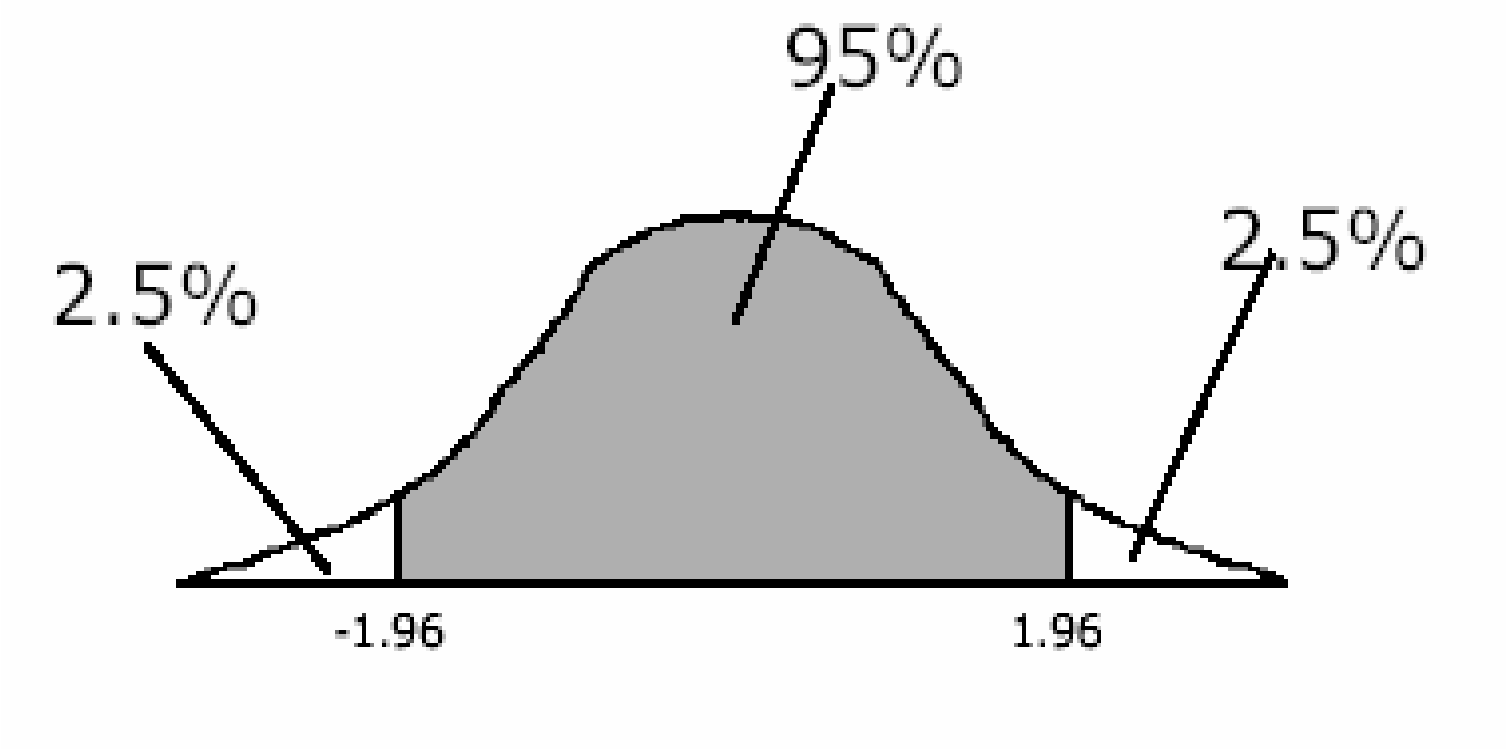
Interval spolehlivosti



Interval spolehlivosti

- tomu odpovídají hodnoty
  z=-1,96
  z=1,96

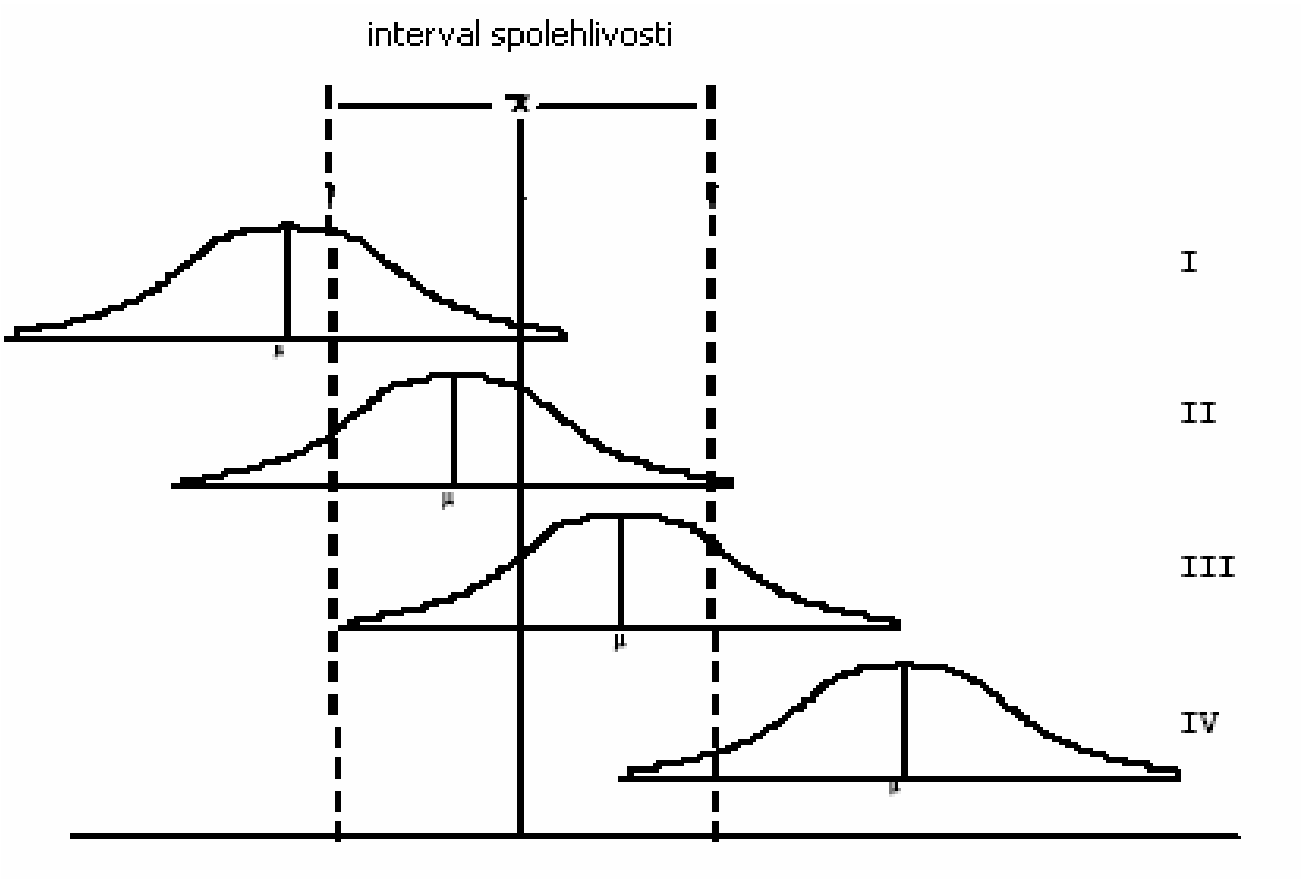
Interval spolehlivosti



Interval spolehlivosti - výpočet

$$\overline{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Interval spolehlivosti



Interval spolehlivosti

- interpretace intervalu spolehlivosti:

pokud bychom z populace vybrali 100 náhodných výběrů o velikosti n a pro každý z nich sestrojili tento interval, 95 intervalů by obsahovalo průměr populace a 5 nikoliv

- opatrně můžeme říct : máme 95% pravděpodobnost, že se v tomto intervalu nachází průměr populace

Interval spolehlivosti

- oblíbený omyl:
  - v 95% intervalu spolehlivosti leží 95% hodnot populace (NEPLATÍ!)

- kromě 95% intervalu spolehlivosti se používá také např. 99% a 90% pravděpodobnost

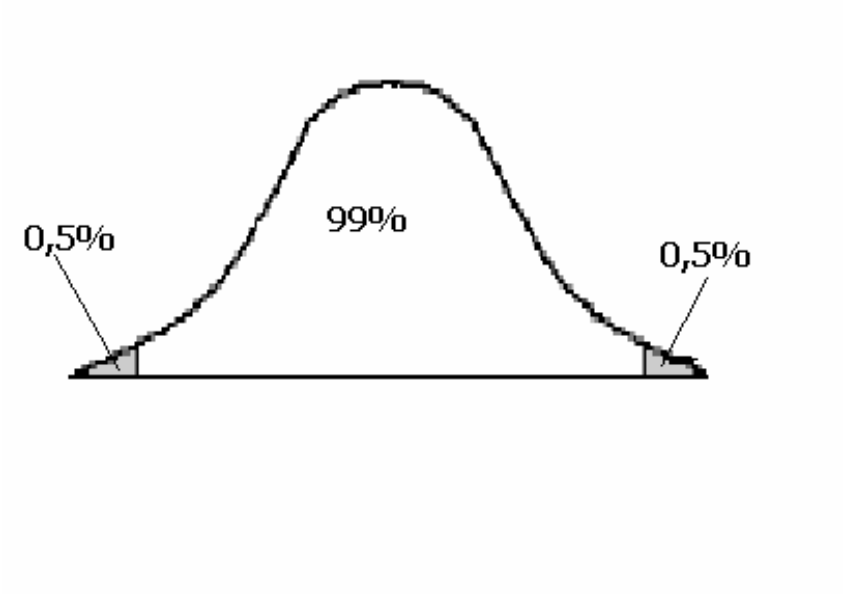
Příklad

- náhodný výběr 36 dětí romského původu, průměrné IQ vzorku = 96
- na základě tohoto zjištění odhadněte průměrné IQ populace romských dětí (sestavte 99% interval spolehlivosti)

Příklad

- Postup:
  - bodový odhad: μ=96
  - výpočet výběrové chyby (směrodatné odchylky RVP):
    $\sigma/\sqrt{n}$ = 15/√36 = 15/6 = 2,5
  - stanovení úrovně spolehlivosti: 99%
  - najít hodnotu *z* pro 99% pravděpodobnost

Příklad



Příklad

- v tabulce normálního rozdělení najdeme hodnoty *z*
- hodnoty *z* pro 99% : 2,57 a -2,57

Příklad

- k výběrovému průměru přičteme (pro horní hranici intervalu) a odečteme (pro spodní hranici) výběrovou chybu, vynásobenou hodnotou *z*

Příklad

-

$$CI\ (\mu) = \bar{x} +- z * \sigma/\sqrt{n}$$

$CI\ (\mu) = 96 + 2{,}57 * 2{,}5 =$ **102,43**

$CI\ (\mu) = 96 - 2{,}57 * 2{,}5 =$ **89,58**

99% interval spolehlivosti je 89,6 – 102,4

Interval spolehlivosti

- **hodnoty *z*** pro nejčastěji užívané pravděpodobnosti:
  - 90% (zbývá 5% + 5%) z= +/- 1,645
  - 95% (zbývá 2,5% + 2,5%) z= +/- 1,96
  - 99% (zbývá 0,5% + 0,5%) z= +/- 2,57

Odhady podílů

- u kategoriálních proměnných nemůžeme počítat průměry
- odhadujeme proto **podíly** jednotlivých kategorií proměnné

Odhady podílů

- např. podíl kuřáků v populaci českých adolescentů
- podíl pacientů s rakovinou plic, kteří přežijí 5 let od diagnózy
- podíl chlapců mezi dětmi s poruchou pozornosti

Odhady podílů

- pokud zkoumáme místo celé populace pouze výběr z ní, nezajímá nás tolik, jaký je podíl kategorií proměnné ve výběru (četnost **p**)
- ale spíše jaký je skutečný podíl v populaci – četnost π

Odhady podílů

- při dostatečně velkém *n* platí i pro rozdělení podílů centrální limitní věta
- rozdělení výběrových podílů je normální rozdělení, s **průměrnou četností π** a směrodatnou odchylkou (výběrovou chybou)

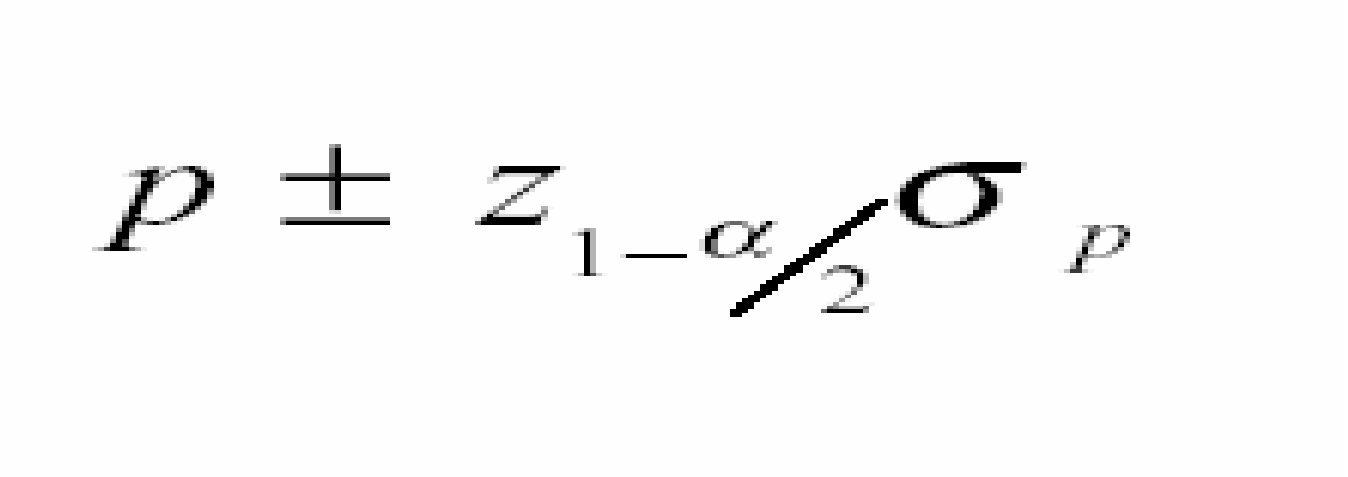
$$SE = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

Příklad 4

- chceme zjistit, jaká je podpora zachování hlavního nádraží v Brně na stávajícím místě
- náhodný výběr z populace brněnských voličů (n=1000 osob)
- 585 osob se vyjádřilo pro (p=0,585)
- odhadněte s 95% spolehlivostí podporu zachování nádraží v populaci brněnských voličů

Odhady podílů

- interval spolehlivosti pro podíly se spočítá podobně jako pro průměry:



Odhady podílů

- nemůžeme však spočítat výběrovou chybu, protože neznáme π
- v tomto případě je však možné dosadit místo toho *p* a přitom použít normální rozdělení (pokud je n>30)
- pokud je n<30, pak dosadíme místo π hodnotu 0,5

Příklad 4

- p=0,585
- z=1,96
- SE(p)=$\sqrt{[0,585(1-0,585)/1000]}$

=0,156

interval spolehlivosti

0.585 ± 1.96(0.0156)

0.585 ± 0,0305

--- **přesnost odhadu je ± 3%**

Příklad 4

- s 95% pravděpodobností je podíl osob souhlasících se zachováním hlavního nádraží na stávajícím místě **mezi 55.4% a 61.6%**
- tj. máme 95% pravděpodobnost, že kdyby se v době průzkumu hlasovalo, bude většina pro

Odhady podílů

vztah mezi velikostí vzorku a přesností odhadu

- n=100 ± 10%
- n=200 ± 7%
- n=400 ± 5%
- n=1000 ± 3%
- n=2400 ± 2%
- n=9600 ± 1%

Odhady podílů

- požadovaná velikost vzorku roste mnohem rychleji než spolehlivost odhadu (pro zdvojnásobení spolehlivosti je nutné asi čtyřnásobně zvětšit vzorek)
- důležité při plánování výzkumu – jakou přesnost potřebujeme? jaké budou náklady?
- podobný vztah platí pro odhad průměrů

Kontrolní otázky

- výpočet a především interpretace z-skórů
- normální rozdělení – charakteristiky
- rozdělení výběrových průměrů
- výpočet směrodatné chyby

Kontrolní otázky

- 2 typy odhadů
- na čem závisí šířka intervalu spolehlivosti? (*není nutno znát zpaměti vzorce, ale je třeba chápat princip výpočtu)*
- vztah velikosti výběru a spolehlivosti odhadu

Literatura

- Hendl: kapitoly 4 a 5