Induktivní statistika

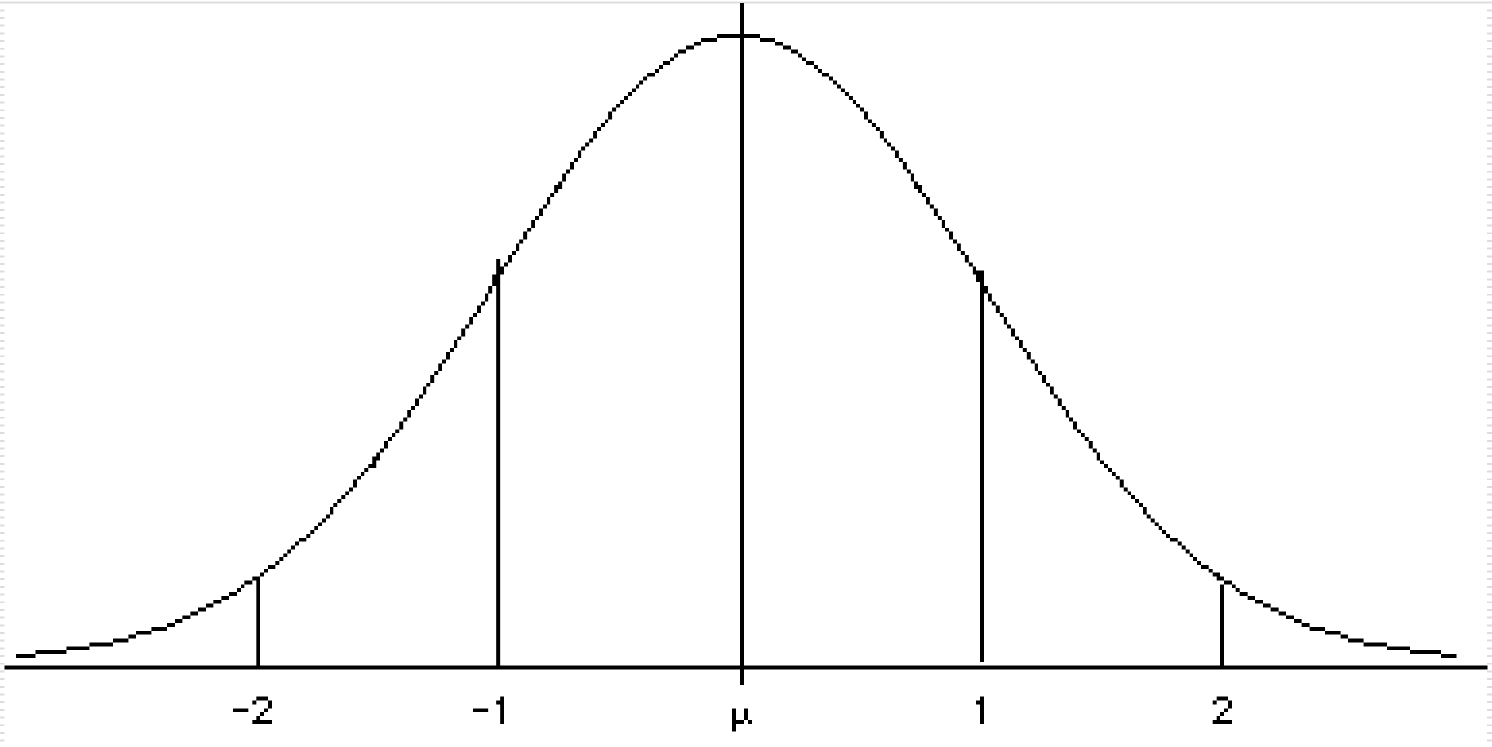
- normální rozdělení
- rozdělení výběrových průměrů

Normální rozdělení

- normální rozdělení je symetrické, unimodální, zvonovitého tvaru
- označuje se i jako Gaussova křivka

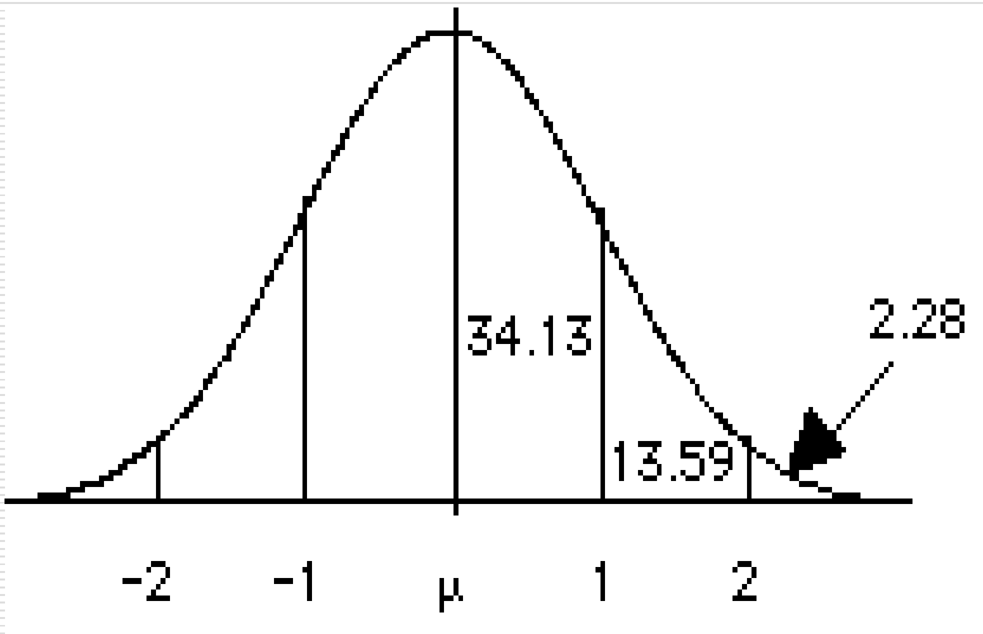
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

Normální rozdělení



Normální rozdělení

- 34.13% skórů spadá mezi průměr a 1 směr. odchylku
- 13.59% hodnot spadá mezi 1. a 2. směr. odchylku
- 2.28% hodnot spadá mezi 2. a 3. směr. odchylku

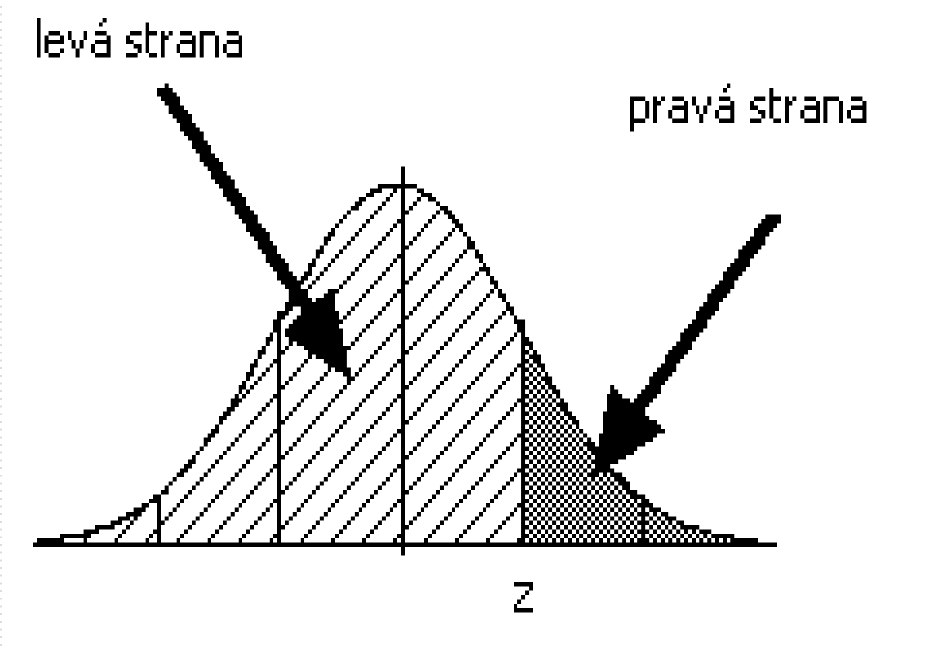


Normální rozdělení

- tabulka normálního rozdělení (z rozdělení)
- důležitý nástroj, obvykle jako apendix v učebnicích statistiky (spolu s dalšími tabulkami)
- umožňuje zjistit hustotu oblasti pod křivkou (tj. pravděpodobnost) pro jednotlivé z-skóry

Normální rozdělení

z	levá strana	pravá strana
0.00	0.5000	0.5000
0.01	0.5040	0.4960
…	…	…
0.30	0.6179	0.3821
0.31	0.6217	0.3783
…	…	…
1.00	0.8413	0.1587
…	…	…



Normální rozdělení - příklady

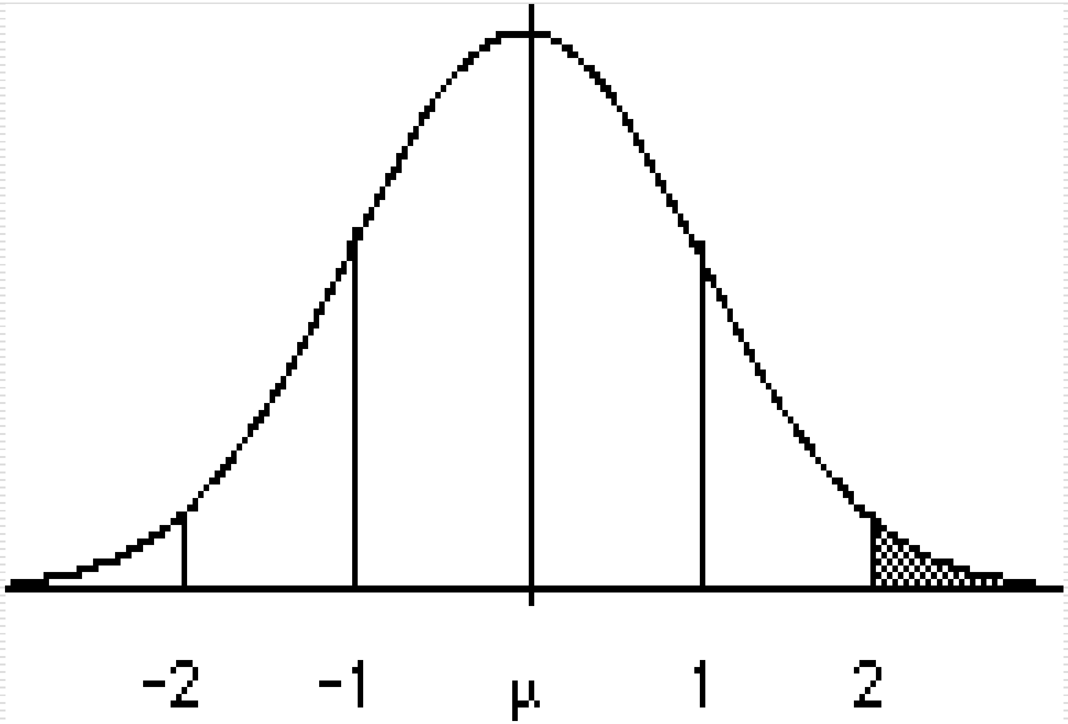
- postup při zjišťování pravděpodobnosti z tabulky:
  - načrtnout si normální rozdělení, s hodnotou průměru a směr. odch.
  - zakreslit hledanou hodnotu (v přibližné vzdálenosti od průměru), vystínovat hledanou oblast
  - převést hodnotu X na z-skór
  - najít v tabulce pravděpodobnost

Normální rozdělení - příklady

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 130 nebo vyšší? (μ = 100, σ =15)

Normální rozdělení - příklady

- $z = 2$



Normální rozdělení - příklady

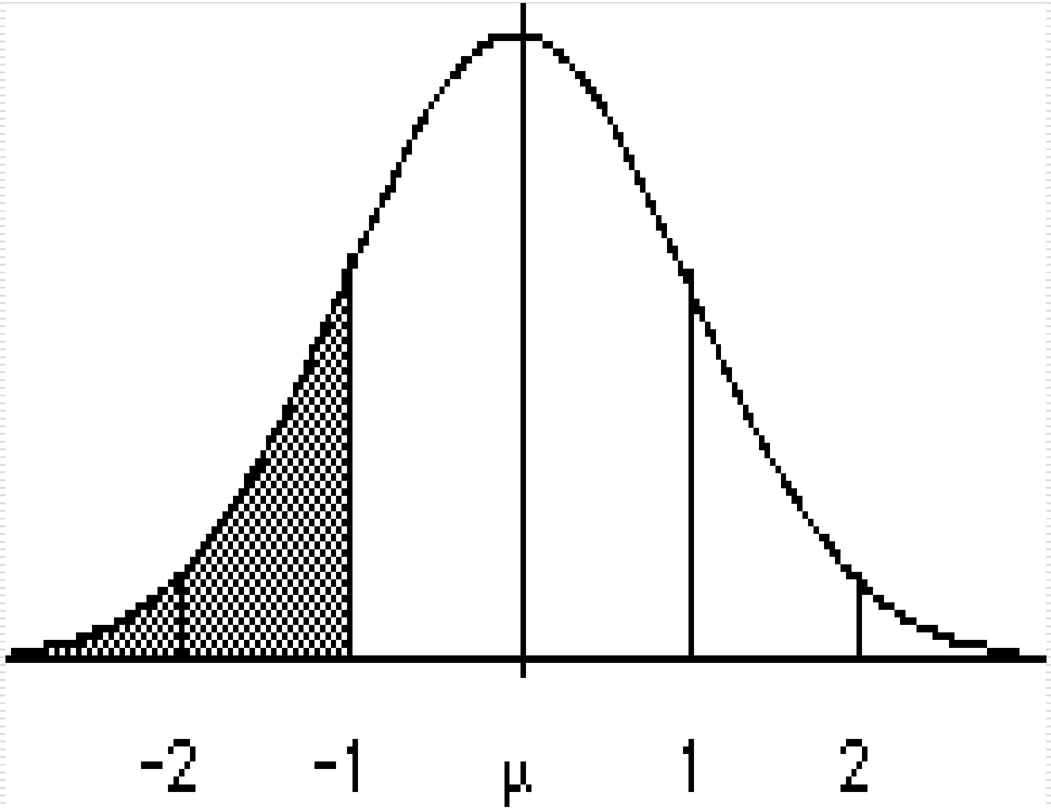
- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 130 nebo vyšší?
- z = 2
- p = 0.0228 tj. **2,3%**

Normální rozdělení - příklady

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 85 nebo nižší?

Normální rozdělení - příklady

- $z = -1$



Normální rozdělení - příklady

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 85 nebo nižší?
- $z = -1$
- $p = 0.1587$ tj. **15,9%**

Normální rozdělení - příklady

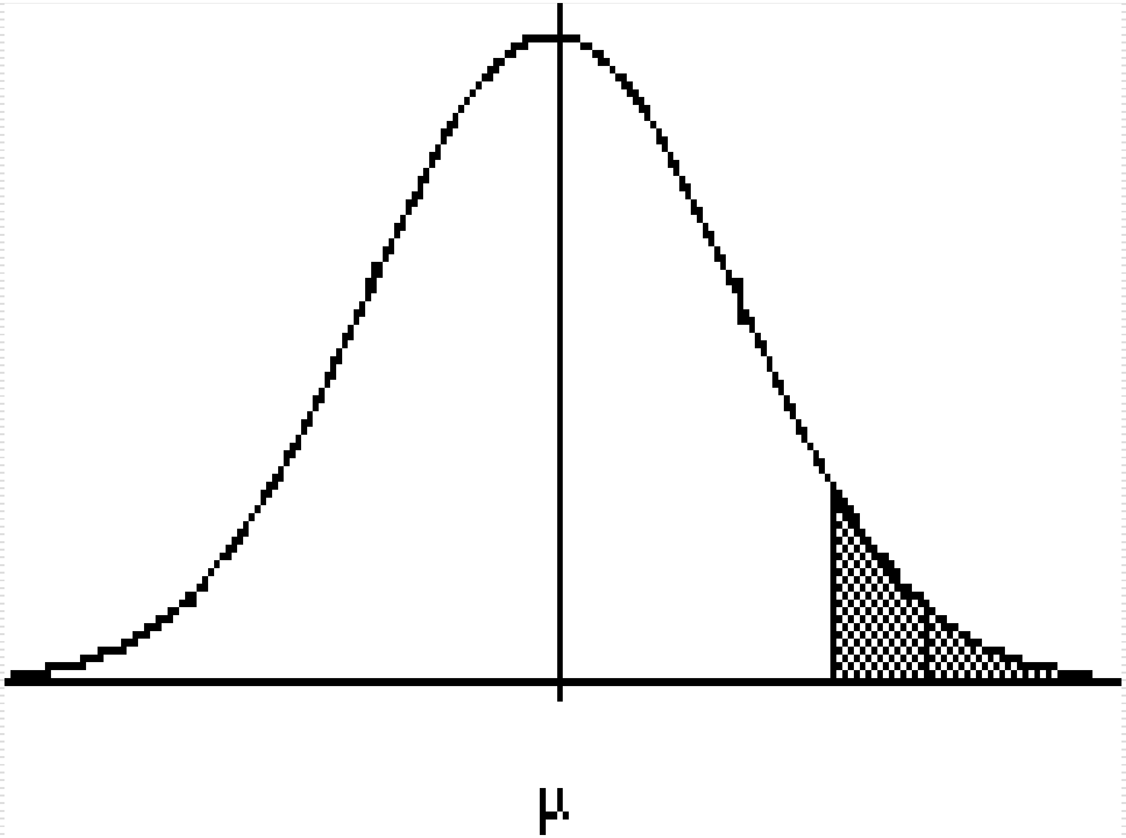
- postup při zjišťování z-skóru z tabulky:
  - načrtnout si normální rozdělení
  - vystínovat oblast odpovídající zadané pravděpodobnosti
  - v tabulce vyhledat příslušný z-skór
  - vypočítat z něj hrubý skór

Normální rozdělení - příklady

- Jakou minimální hodnotu IQ musí člověk mít, aby patřil mezi 5% osob s nejvyššími hodnotami IQ?

Normální rozdělení - příklady

- p = 0.05



Normální rozdělení - příklady

- Jakou minimální hodnotu IQ musí člověk mít, aby patřil mezi 5% osob s nejvyššími hodnotami IQ?
- $p = 0.05$
- z tabulky: **$z = 1.65$**
- $X = (1.65).(15) + 100 =$ **124.75**

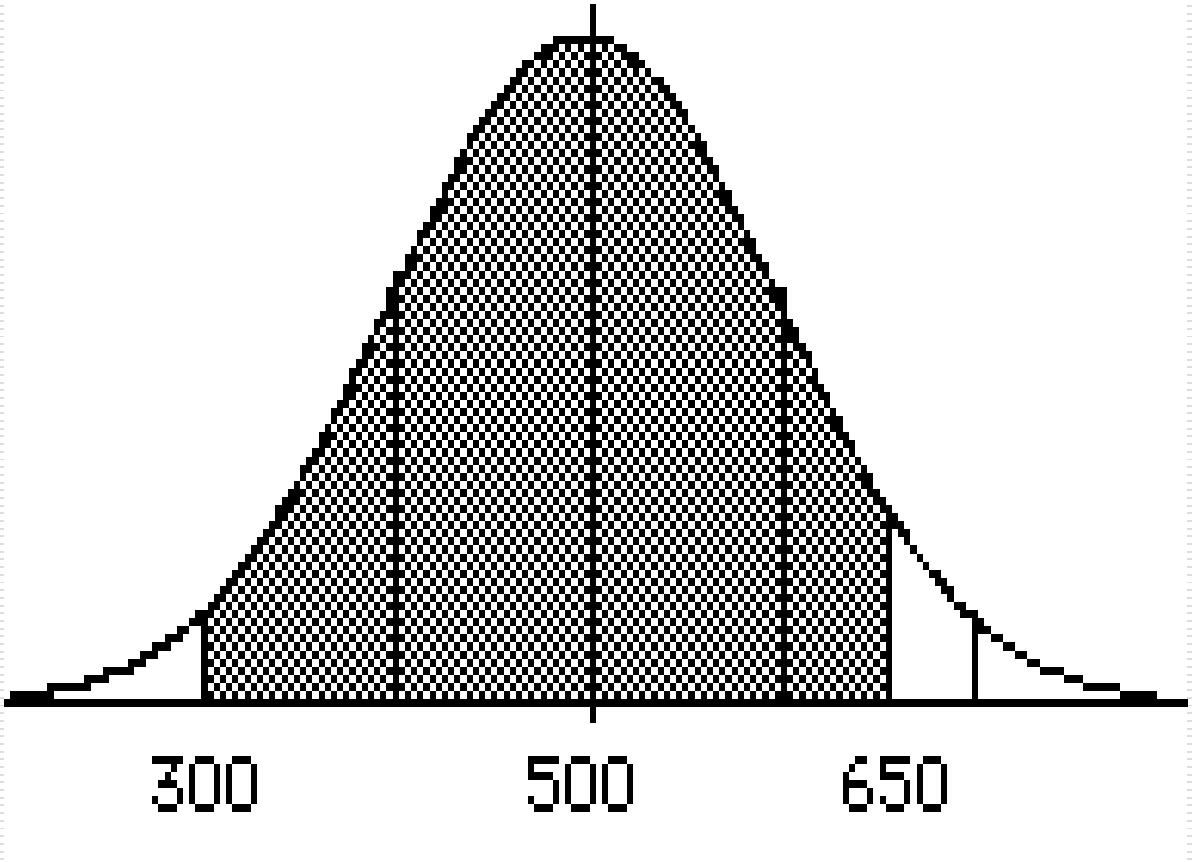
Normální rozdělení - příklady

- někdy chceme zjistit pravděpodobnost, že skór bude spadat do určitého intervalu
- postup:
  - načtrtnout graf a vystínovat zadanou oblast
  - oba (ohraničující) skóry převést na z-skóry
  - vyhledat pravděpodobnosti < nebo > skóru
  - sečíst či odečíst pravděpodobnosti

Normální rozdělení - příklady

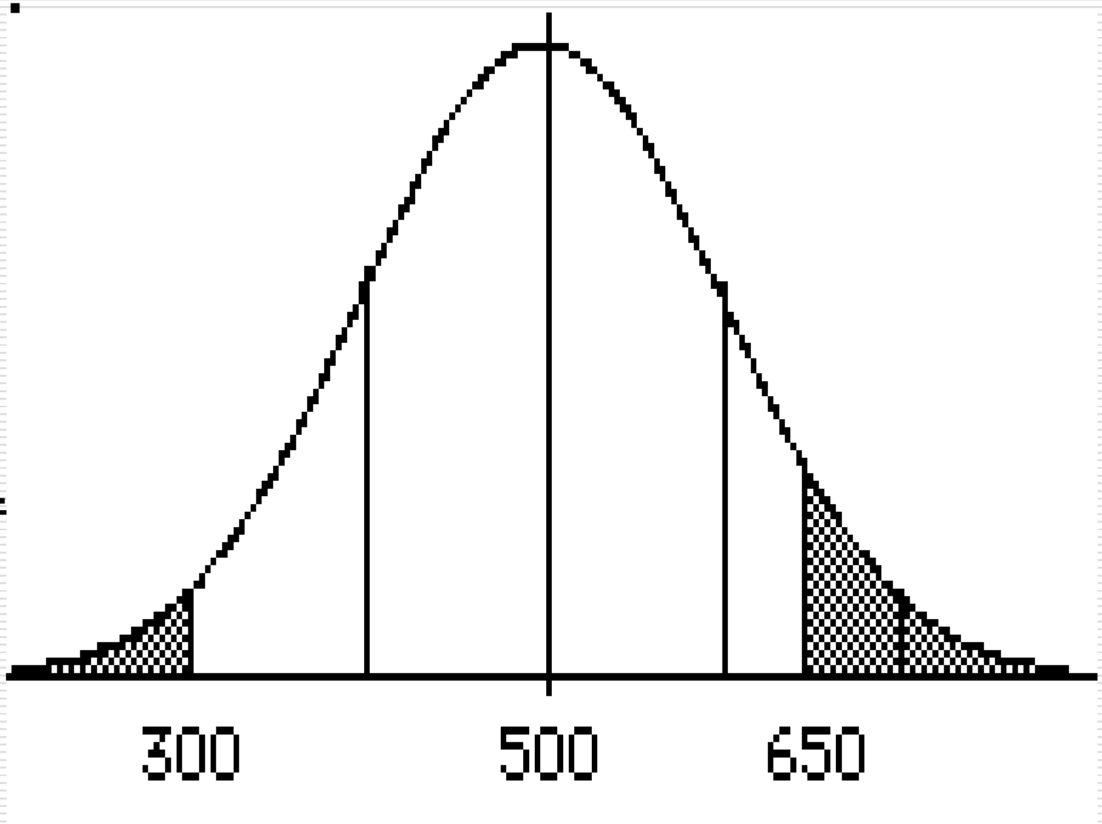
- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student bude v testu z psychologie skórovat mezi 300 a 650 body? (μ = 500, σ =100)

Normální rozdělení - příklady



Normální rozdělení - příklady

- alternativní postup: spočítat pravděpodobnost skórování <u>mimo zadaný interval</u> a poté ji <u>odečíst od 1</u>



Normální rozdělení - příklady

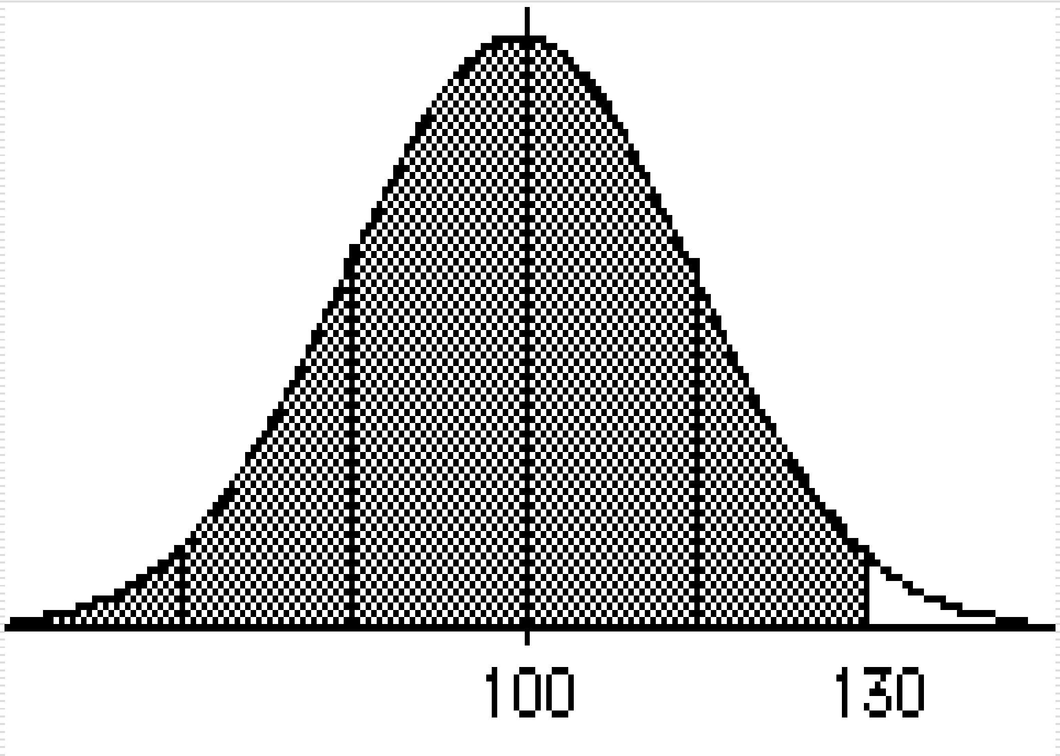
- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student bude v testu z psychologie skórovat mezi 300 a 650 body? ($\mu = 500$, $\sigma = 100$)
- $p(x \geq \frac{(650 - 500)}{100}) = p(z \geq 1.5) = 0.0668$
- $p(x < \frac{(300 - 500)}{100}) = p(z \leq -2.0) = 0.0228$
- $0.0668 + 0.0228 = .0896$
- $p(300 < x < 650) = 1 - 0.0896 =$ **0.9104**

Normální rozdělení - příklady

- pomocí tabulky normálního rozdělení je možno nalézt také hodnotu percentilu
- <u>příklad</u>: kolik procent osob má nižší hodnoty IQ než člověk s IQ 130?

Normální rozdělení - příklady

- $z = 2$



Normální rozdělení - příklady

- Kolik procent osob má nižší hodnoty IQ než člověk s IQ 130?
- z tabulky: pro z = 2

p = 0.9772

97.72% osob má nižší skór

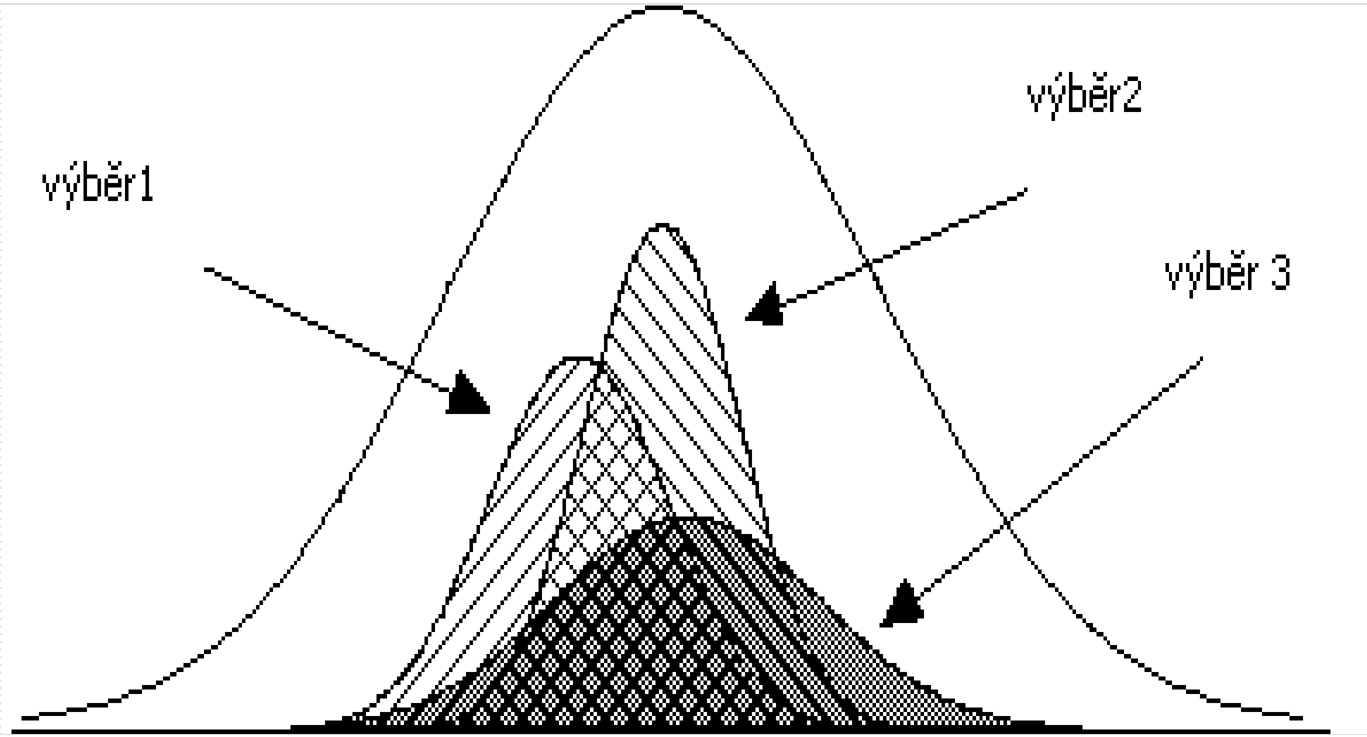
Rozdělení výběrových průměrů

- cílem induktivní statistiky je odhadnout <u>parametry populace</u> z <u>charakteristik vzorku</u> (výběrového souboru)
- např. odhadem průměru populace bude průměr vzorku
- odhad je vždy zatížen určitou **výběrovou chybou**

Rozdělení výběrových průměrů

- předpokládejme, že z jedné populace vybereme 3 různé vzorky
- budou se nejspíš navzájem lišit ve tvaru rozdělení hodnot, průměru i variabilitě
- jak se rozhodneme, který z nich zvolit pro odhad průměru populace ??

Rozdělení výběrových průměrů



Rozdělení výběrových průměrů

- pokud bychom spočítali průměry ze všech možných výběrů o určité velikosti *n*, budou tvořit tzv. **rozdělení výběrových průměrů** (sampling distribution)

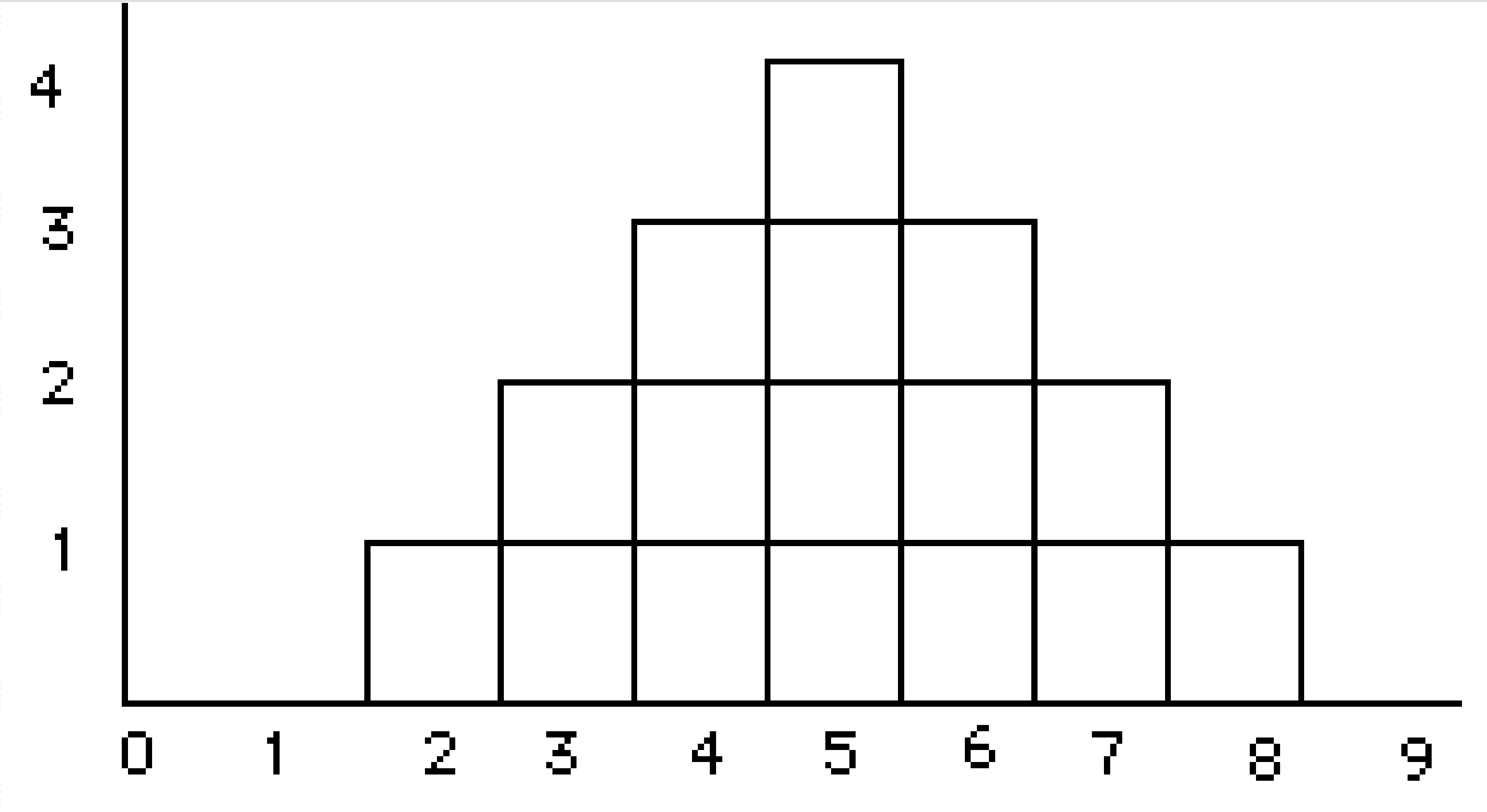
Rozdělení výběrových průměrů

- **příklad**: populace hodnot 2, 4, 6, 8
- průměr $\mu = 5$
- předpokládejme, že průměr neznáme a pokoušíme se ho odhadnout ze vzorku n=2
- v tabulce jsou uvedeny všechny možné výběrové soubory

Rozdělení výběrových průměrů

výběr	první skór	druhý skór	průměr vzorku
1	2	2	2
2	2	4	3
3	2	6	4
4	2	8	5
5	4	2	3
6	4	4	4
7	4	6	5
8	4	8	6
9	6	2	4
10	6	4	5
11	6	6	6
12	6	8	7
13	8	2	5
14	8	4	6
15	8	6	7
16	8	8	8

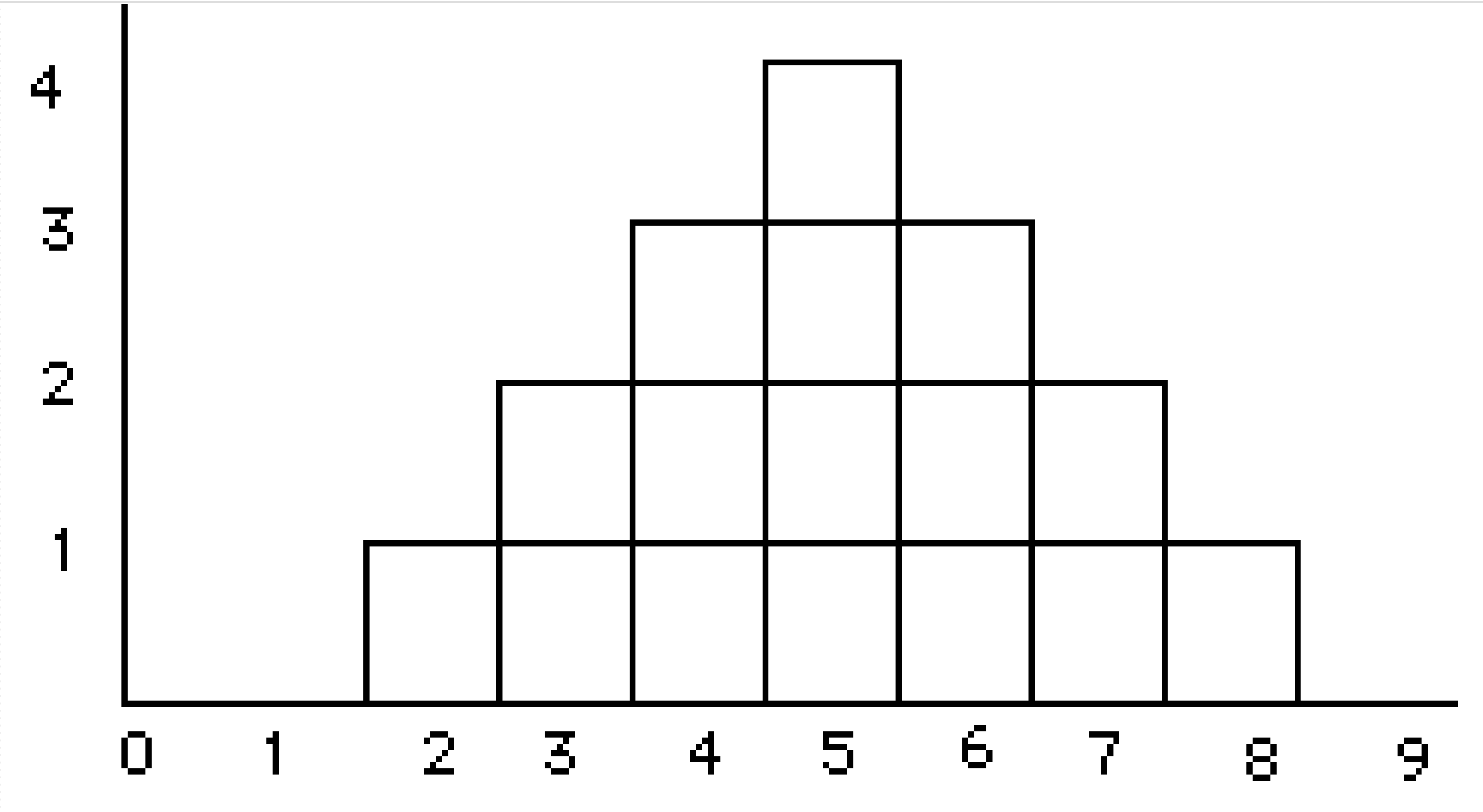
Rozdělení výběrových průměrů



Rozdělení výběrových průměrů

- jaká je pravděpodobnost, že z této populace vybereme vzorek s průměrem vyšším než 7?

Rozdělení výběrových průměrů



Rozdělení výběrových průměrů

- jaká je pravděpodobnost, že z této populace vybereme vzorek s průměrem vyšším než 7?
- v rozdělení výběrových průměrů je takový vzorek jen 1 ze 16 – tj. pravděpodobnost takového průměru vzorku je 1/16 = 0.0625

Rozdělení výběrových průměrů

- většina populací i vzorků je mnohem větší
- ale existují určité základní vlastnosti rozdělení výběrových průměrů (RVP)
- **tvar** – RVP se při dostatečně velkém vzorku (30 a více) blíží **normálnímu rozdělení**

Rozdělení výběrových průměrů

- **průměr** – průměr průměrů všech teoretických výběrů je roven průměru populace
- označuje se také jako očekávaná hodnota průměru vzorku

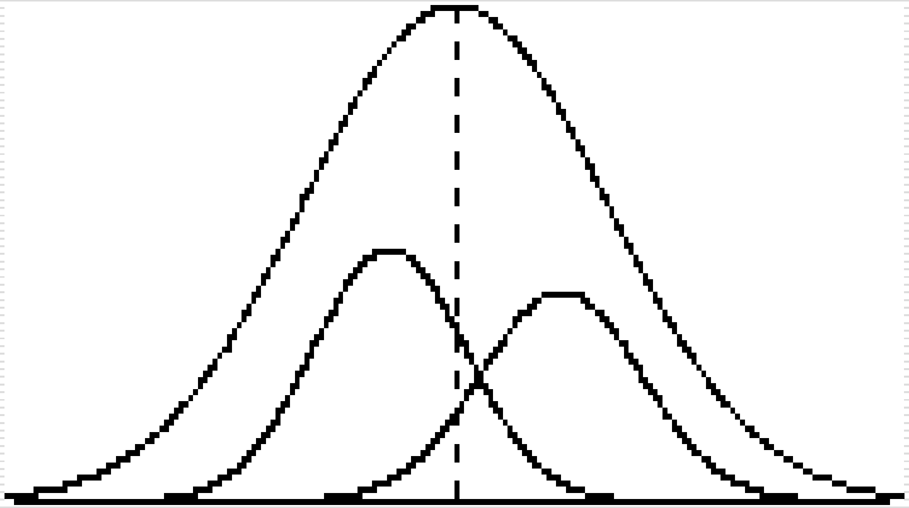
Rozdělení výběrových průměrů

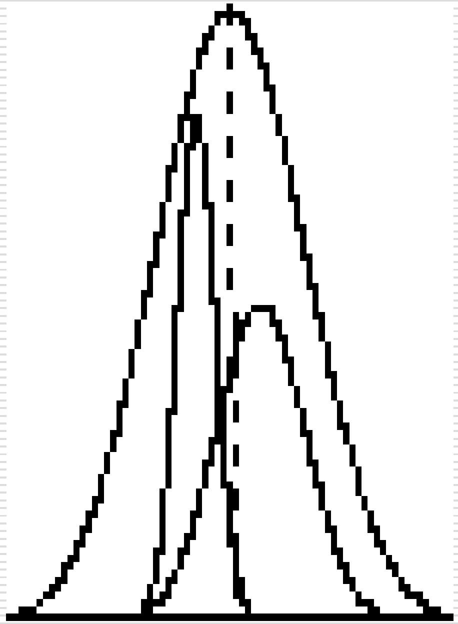
- **variabilita** – směrodatná odchylka RVP se označuje jako výběrová chyba (standard error) průměru
- jde o směrodatnou odchylku výběrových průměrů od průměru populace
- ukazuje, jak spolehlivý je odhad populačního průměru z průměru vzorku – tj. jak velkou chybou je odhad zatížen

Rozdělení výběrových průměrů

- velikost výběrové chyby je dána dvěma charakteristikami: variabilitou v populaci a velikostí výběru
- **variabilita znaku v populaci**: čím je vyšší, tím je vyšší i variabilita výběrových průměrů

Rozdělení výběrových průměrů





Rozdělení výběrových průměrů

- velikost výběru – čím větší výběr (*n*), tím lépe jeho průměr reprezentuje průměr populace (zákon velkých čísel)

Rozdělení výběrových průměrů

- vzorec pro výpočet výběrové chyby:

$$\sigma_x = \sigma/\sqrt{n}$$

Rozdělení výběrových průměrů

- **centrální limitní věta** – pro každou populaci o průměru μ a směrodatné odchylce σ se bude rozdělení výběrových průměrů výběrů blížit normálnímu rozdělení s průměrem μ a směrodatnou odchylkou $\sigma_x = \sigma/\sqrt{n}$

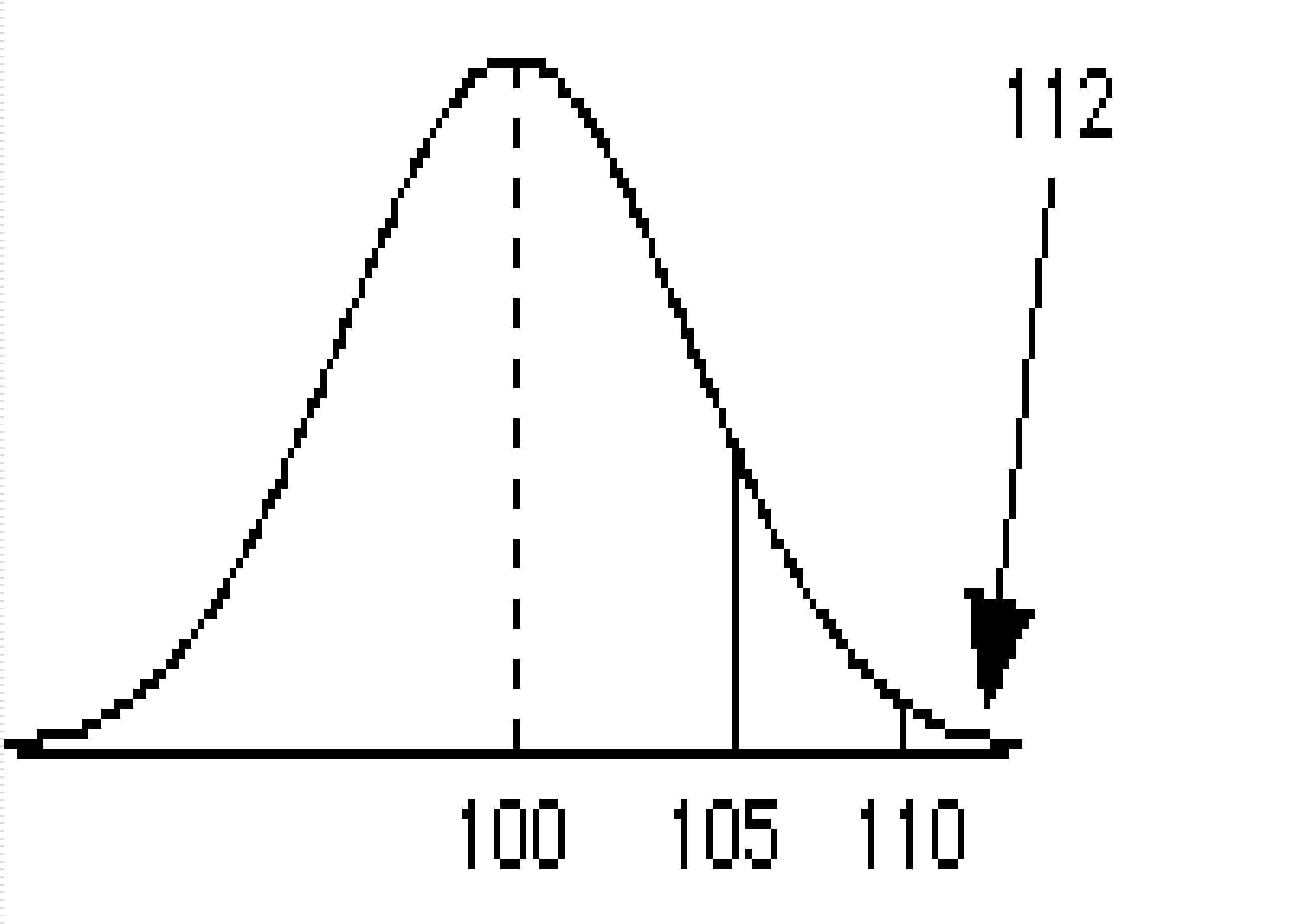
Rozdělení výběrových průměrů

- **příklad**: když vybereme z populace náhodně vzorek 9 osob, jaká je pravděpodobnost, že jejich průměrné IQ bude větší nebo rovno 112?

Rozdělení výběrových průměrů

- **příklad**: když vybereme z populace náhodně vzorek 9 osob, jaká je pravděpodobnost, že jejich průměrné IQ bude větší nebo rovno 112?
- $\mu = 100$, $\sigma_x = \sigma/\sqrt{n} = 15/3 = 5$
- $\mathbf{z} = (112-100)/\ \sigma_x = 12/5 = \mathbf{2.4}$
- z tabulky $P(Z \geq 2.4) = \mathbf{0.0082}$

Rozdělení výběrových průměrů



Příklad

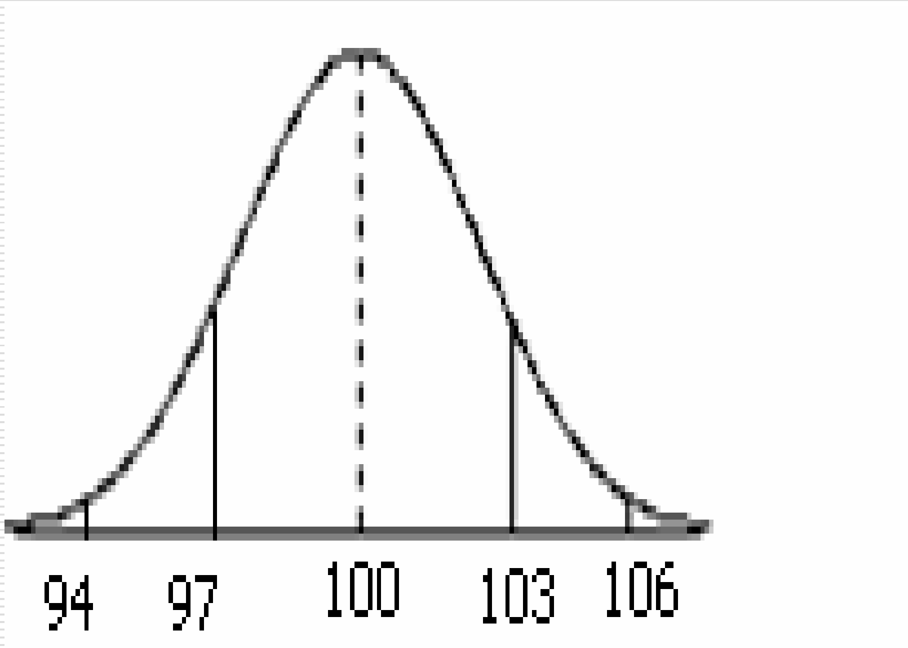
- IQ (μ=100, σ=15)
- jaká je **pravděpodobnost**, že **průměr výběru** o velikosti n=25 **bude mezi hodnotami** 94 a 106?

Příklad 1

- IQ (μ=100, σ=15)
- jaká je pravděpodobnost, že průměr výběru o velikosti n=25 bude mezi hodnotami 94 a 106?
- $z = (94-100) / (15/ \sqrt{25}) = -6/3 = -2$
- $z = (106-100) / (15/ \sqrt{25}) = 6/3 = 2$

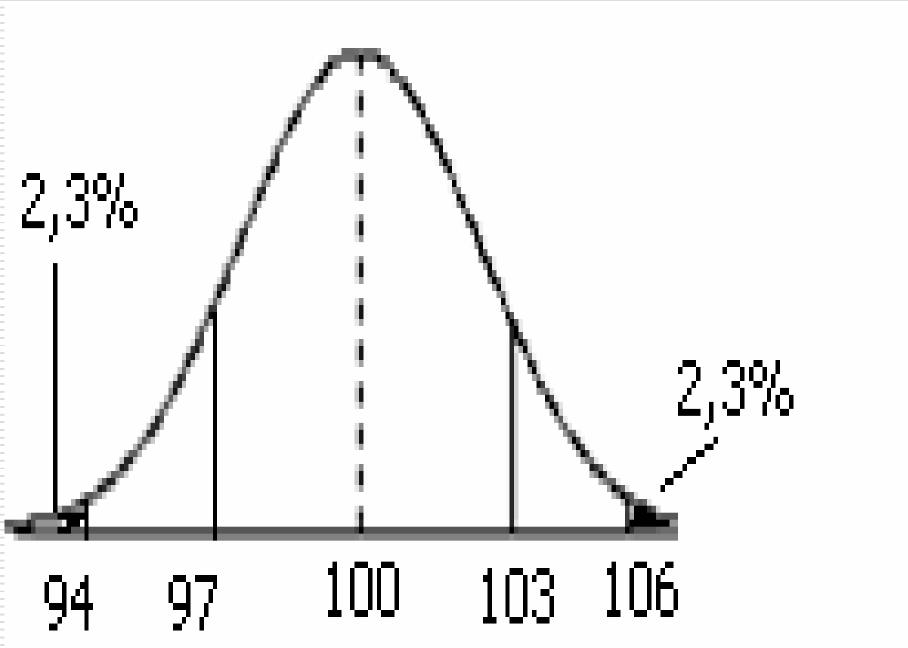
Příklad 1

- najdeme v tabulce normovaného normálního rozdělení hodnotu pravděpodobnosti pro z=2 a z=-2



Příklad 1

- hodnota je 0,023
- dohromady 0,046
- odečteme od 1,00
- výsledek **0,954**



Příklad 1

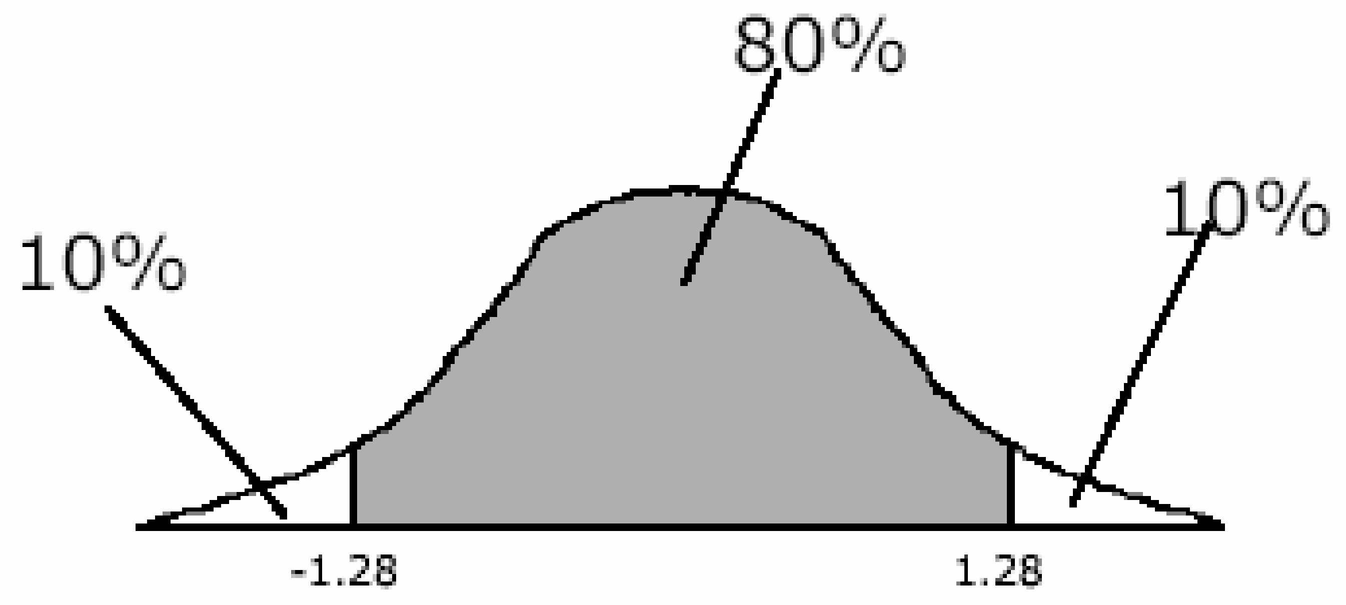
- IQ (μ=100, σ=15)
- jaká je pravděpodobnost, že průměr výběru o velikosti n=25 bude mezi hodnotami 94 a 106?
- **pravděpodobnost takového průměru je 95,4%**

Příklad 2

- IQ (μ=100, σ=15)
- v jakém **rozsahu hodnot** bude pravděpodobně **80% všech průměrů výběrů** o velikosti n=25?

Příklad 2

- IQ (μ=100, σ=15)
- v jakém **rozsahu hodnot** bude pravděpodobně **středních 80% všech průměrů výběrů** o velikosti n=25?
- potřebujeme zjistit hodnotu z, která odděluje pravděpodobnost 10% na obou stranách rozdělení


80%
10%
10%
-1.28
1.28

Příklad 2

- IQ (μ=100, σ=15)
- v jakém **rozsahu hodnot** bude pravděpodobně **středních 80% všech průměrů výběrů** o velikosti n=25?
- z = 1,28 a -1,28 převedeme na hodnoty IQ

Příklad 2

$$\bar{x} = \mu + z^*(\sigma/\sqrt{n})$$

$$\bar{x} = 100 + 1{,}28^*(15/\sqrt{25}) = 100+1{,}28(3) = \mathbf{103{,}84}$$

$$\bar{x} = 100 + (-1{,}28)^*(15/\sqrt{25}) = 100-1{,}28(3) = \mathbf{96{,}16}$$

Příklad 2

- IQ (μ=100, σ=15)
- v jakém rozsahu hodnot bude pravděpodobně středních 80% všech průměrů výběrů o velikosti n=25?
- **80% všech výběrových průměrů bude v rozsahu hodnot 96,16 - 103,84**