

# Induktivní statistika

---

Odhady

# Odhady

---

- bodové odhady
  - intervalové odhady
  - konstrukce intervalu spolehlivosti pro průměr
  - odhady podílů (kategorická proměnná)
-

# Odhady

---

- v příkladech v předchozích přednáškách jsme znali hodnoty průměru a rozptylu populace
  - obvykle tomu ale bývá přesně naopak: **známe hodnoty (statistiky) výběru a neznáme hodnoty (parametry) populace**
  - ty chceme z výběru **odhadnout**
-

# Odhady

---

- 2 typy odhadů: bodové a intervalové
  - **bodový odhad**: použijeme průměr vzorku a odhadneme, že se rovná průměru populace
-

# Bodový odhad

---

- bodový odhad je problematický v tom, že dva různé výběry nám mohou dát dva různé odhady
  - bodový odhad **neobsahuje** žádnou **informaci** o jeho **přesnosti** či **spolehlivosti**
  - na čem závisí přesnost odhadu?
-

# Bodový odhad

---

přesnost odhadu závisí na dvou charakteristikách

- **velikost výběru** (čím větší  $n$ , tím menší výběrová chyba)
  - **variabilita hodnot v populaci** (čím vyšší, tím vyšší i výběrová chyba)
-

# Intervalový odhad

---

- poskytuje rozsah (interval) hodnot, který s určitou pravděpodobností obsahuje hledanou hodnotu parametru
-

# Intervalový odhad

---

je založen na:

- bodovém odhadu
  - velikosti výběru
  - variabilitě znaku v populaci (známé nebo rovněž odhadované)
-



# Intervalový odhad

---

□ ptáme se: **jaká je hodnota  $\mu$  ?**

---

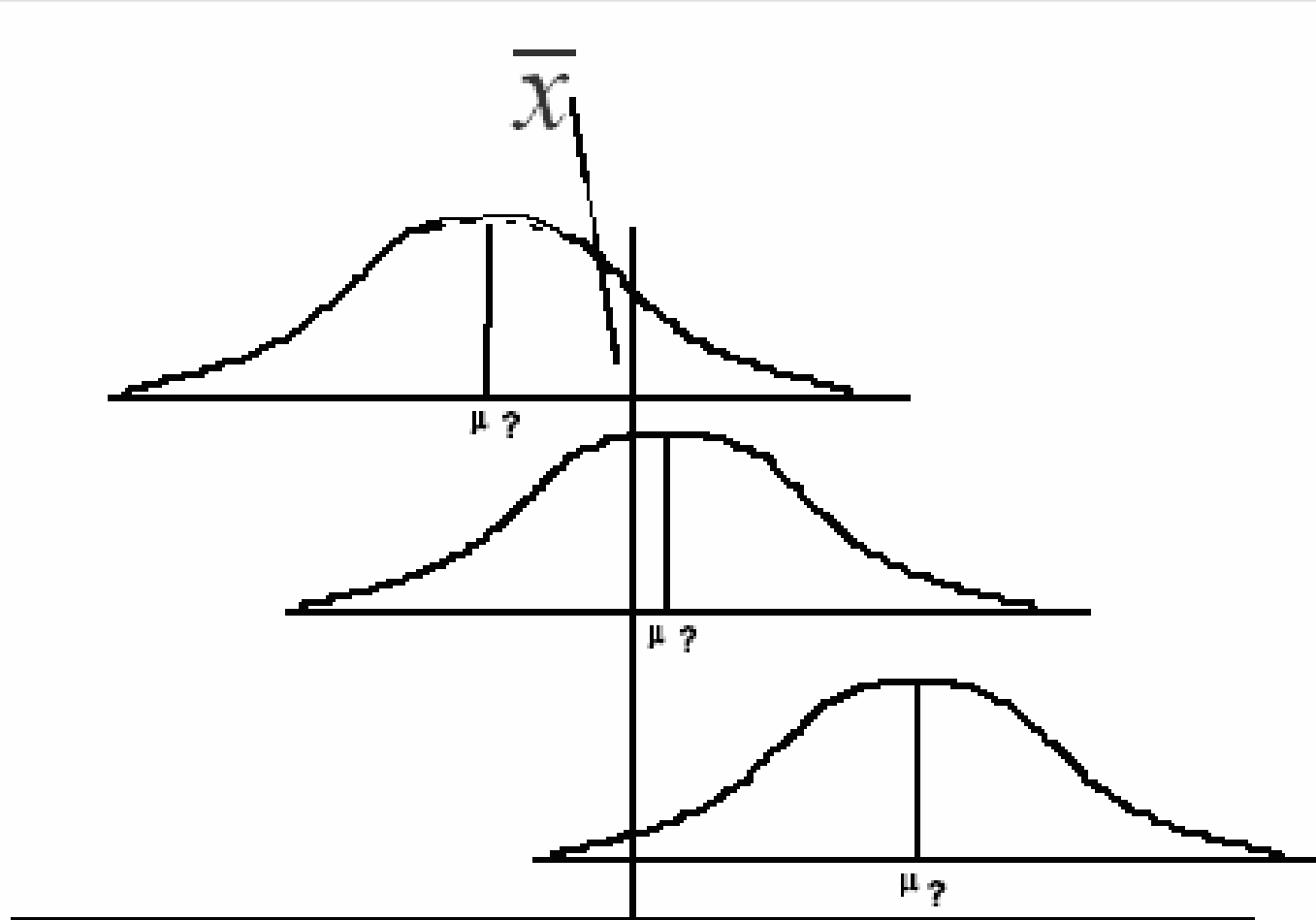
# Intervalový odhad

---

- ptáme se: **jaká je hodnota  $\mu$  ?**
  - výběrový průměr určité hodnoty může pocházet z populací o různých průměrech
  - proto **nemůžeme jednoznačně určit hodnotu  $\mu$**
-

# Intervalový odhad

---



# Intervalový odhad

---

- takže se místo toho snažíme určit, jaký je **možný rozsah hodnot  $\mu$**
  - jaké populace (tj. s jakou hodnotou průměru) by mohly být pravděpodobným zdrojem našeho vzorku?
-

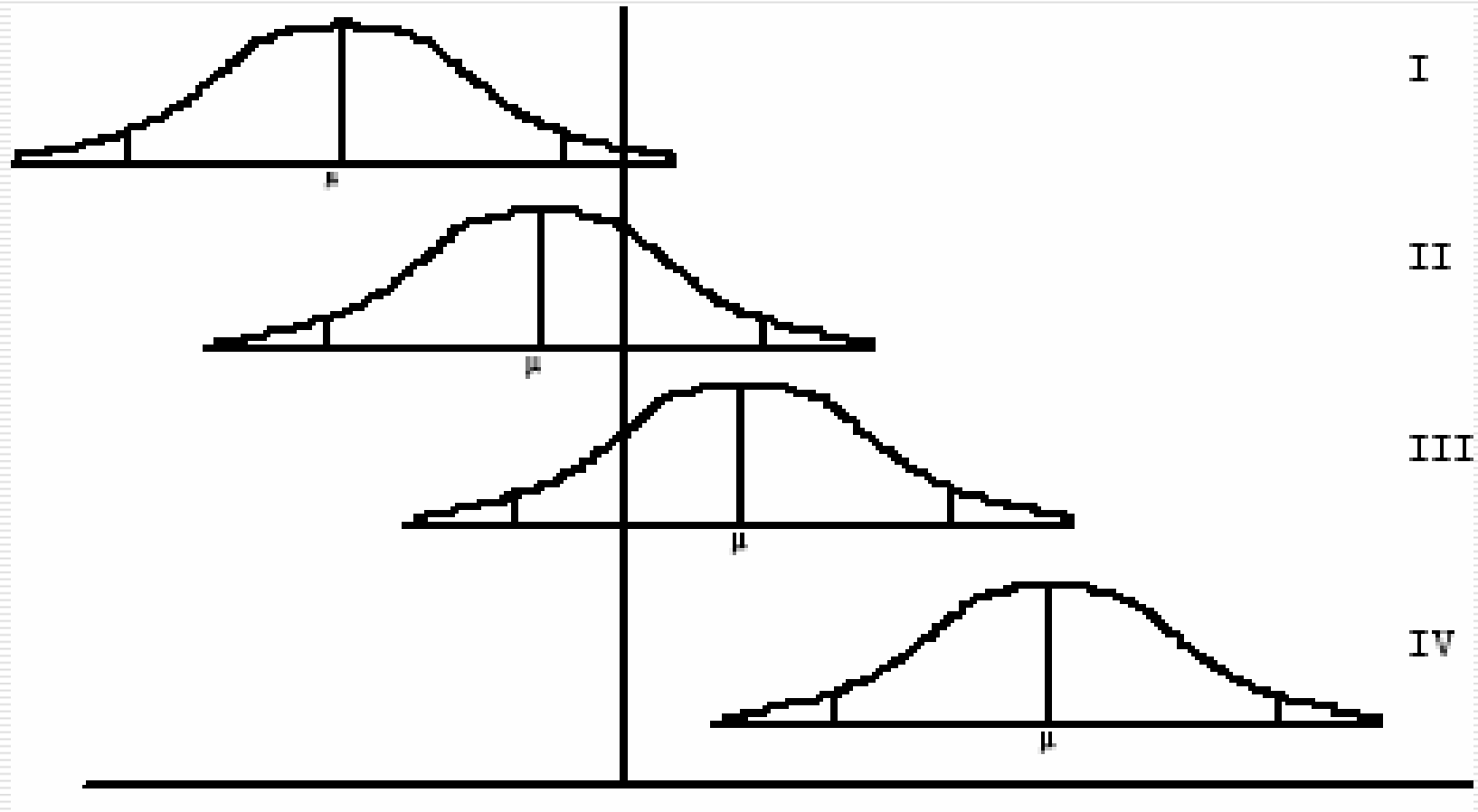
# Intervalové odhady

---

- ze které populace nejpravděpodobněji pochází výběr, jehož průměr je v následujícím grafu naznačen svislou čarou?
-

# RVP pro populace I-IV

---



# Intervalové odhady

---

- výběr pochází
    - nejpravděpodobněji z populace II nebo III
    - méně pravděpodobně z populace I
    - a velmi málo pravděpodobně z populace IV
-

# Intervalové odhady

---

- intervalový odhad spočívá v konstrukci tzv. **intervalu spolehlivosti** (confidence interval) = rozsahu hodnot, ve kterém s určitou pravděpodobností leží průměr populace
-



# Interval spolehlivosti

---

- nejprve je třeba si **stanovit tuto pravděpodobnost** – tj. úroveň přesnosti(spolehlivosti);
  - obvyklá je např. **95%** - snažíme se najít interval hodnot, ve kterém s 95% pravděpodobností leží průměr populace
  - pak jde o tzv. **95% interval spolehlivosti**
-

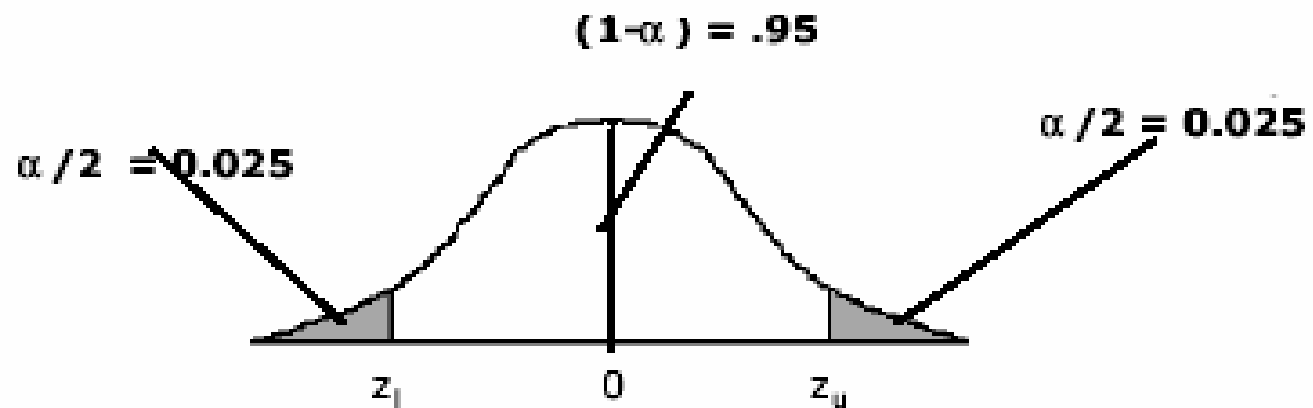
# Interval spolehlivosti

---

- poté **najít hodnotu z pro tuto pravděpodobnost** – tj. rozsah, ve kterém bude ležet středních 95% hodnot (výběrových průměrů)
  - 2,5% na každé straně rozdělení
-

# Interval spolehlivosti

---



# Interval spolehlivosti

---

□ tomu odpovídají hodnoty

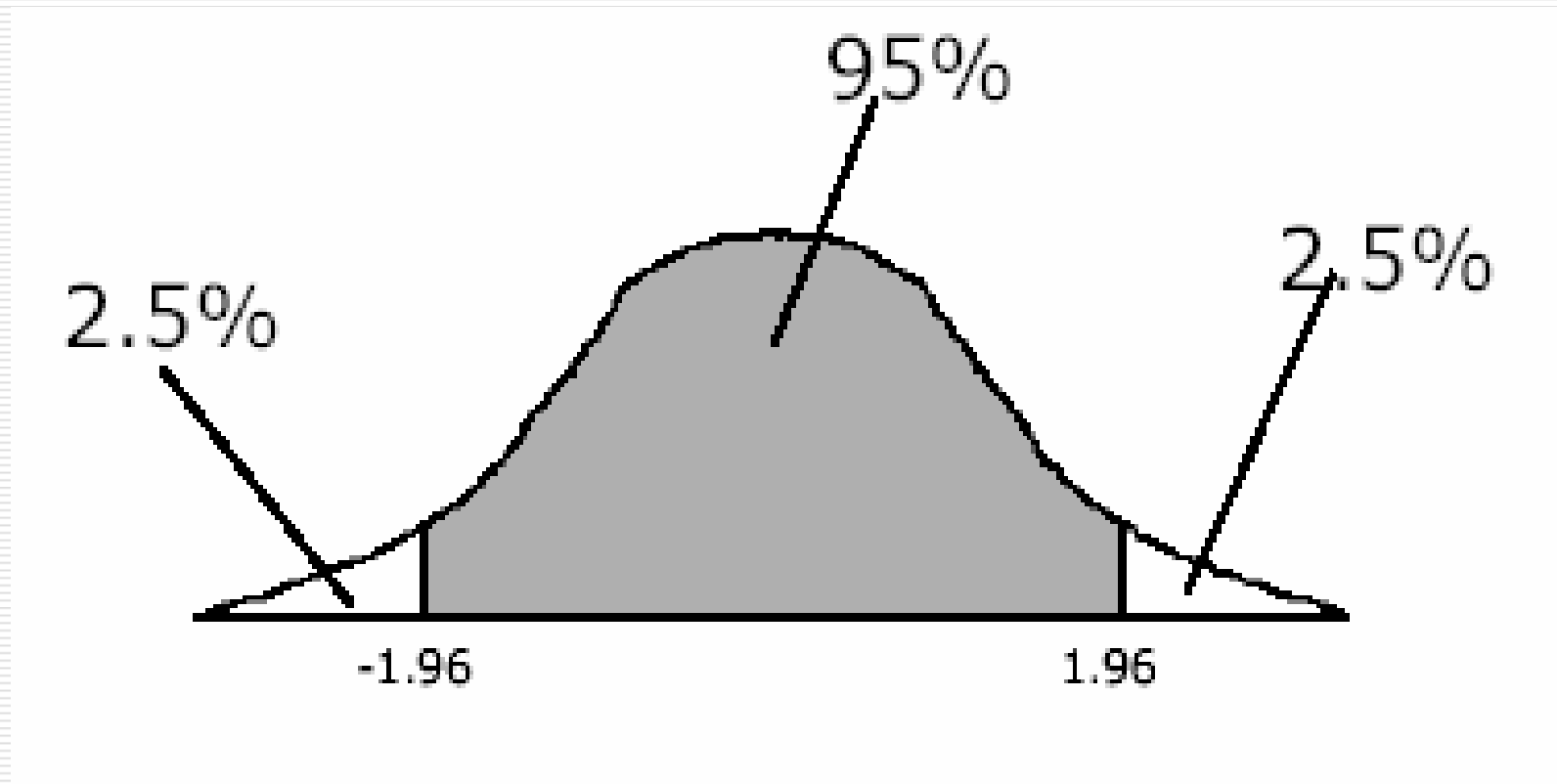
$$z = -1,96$$

$$z = 1,96$$

---

# Interval spolehlivosti

---



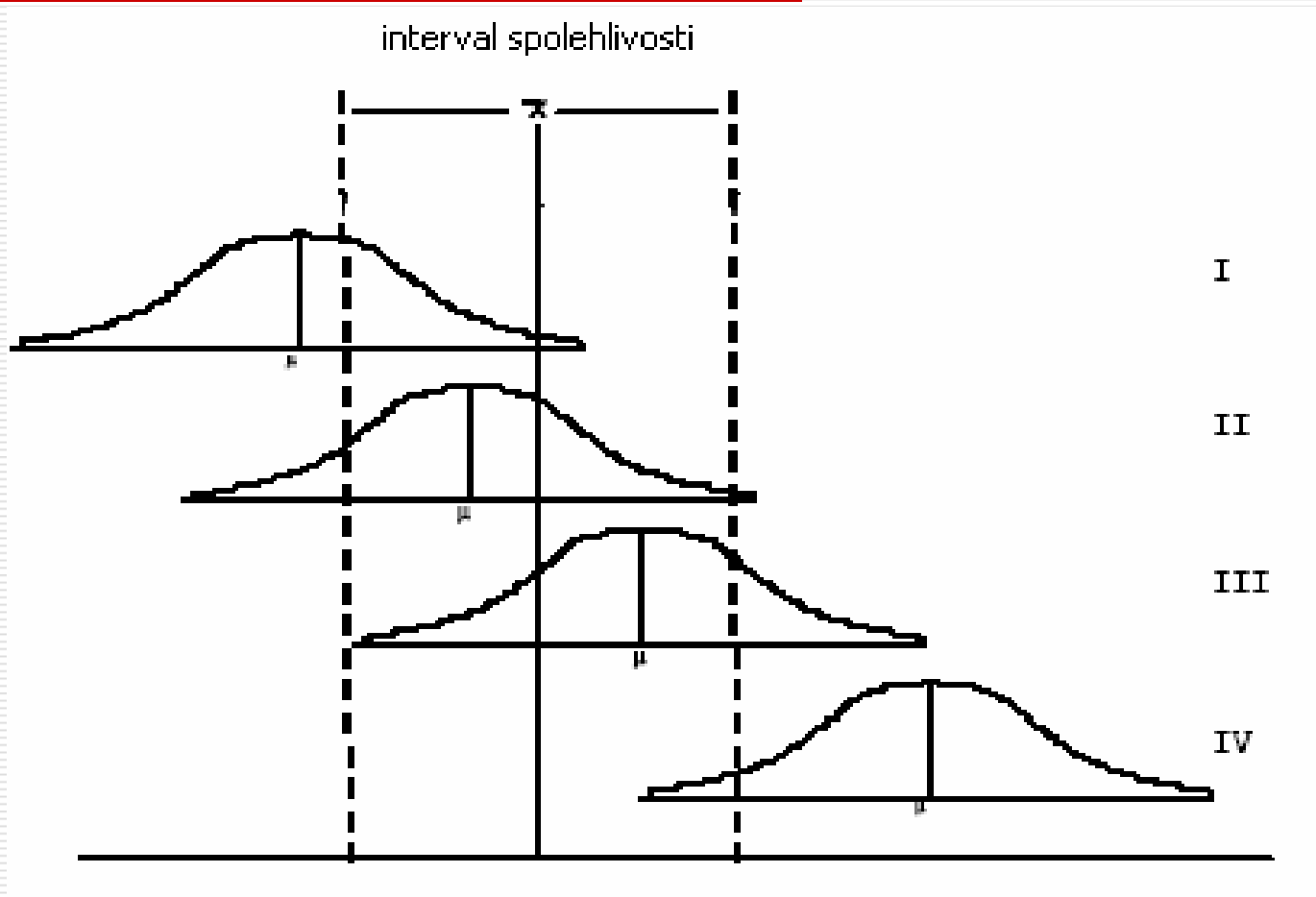
# Interval spolehlivosti - výpočet

---

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

# Interval spolehlivosti

---



# Interval spolehlivosti

---

- interpretace intervalu spolehlivosti:  
pokud bychom z populace vybrali 100 náhodných výběrů o velikosti  $n$  a pro každý z nich sestrojili tento interval, 95 intervalů by obsahovalo průměr populace a 5 nikoliv
  - opatrně můžeme říct : máme 95% pravděpodobnost, že se v tomto intervalu nachází průměr populace
-



# Interval spolehlivosti

---

- oblíbený omyl:
    - v 95% intervalu spolehlivosti leží 95% hodnot populace (NEPLATÍ!)
  
  - kromě 95% intervalu spolehlivosti se používá také např. 99% a 90% pravděpodobnost
-

# Příklad

---

- náhodný výběr 36 dětí hospitalizovaných bez matky v raném věku (do 6 měsíců), průměrné IQ vzorku = 96
  - na základě tohoto zjištění odhadněte průměrné IQ populace dětí hospitalizovaných bez matky v raném věku (sestavte 95% interval spolehlivosti)
-

# Příklad

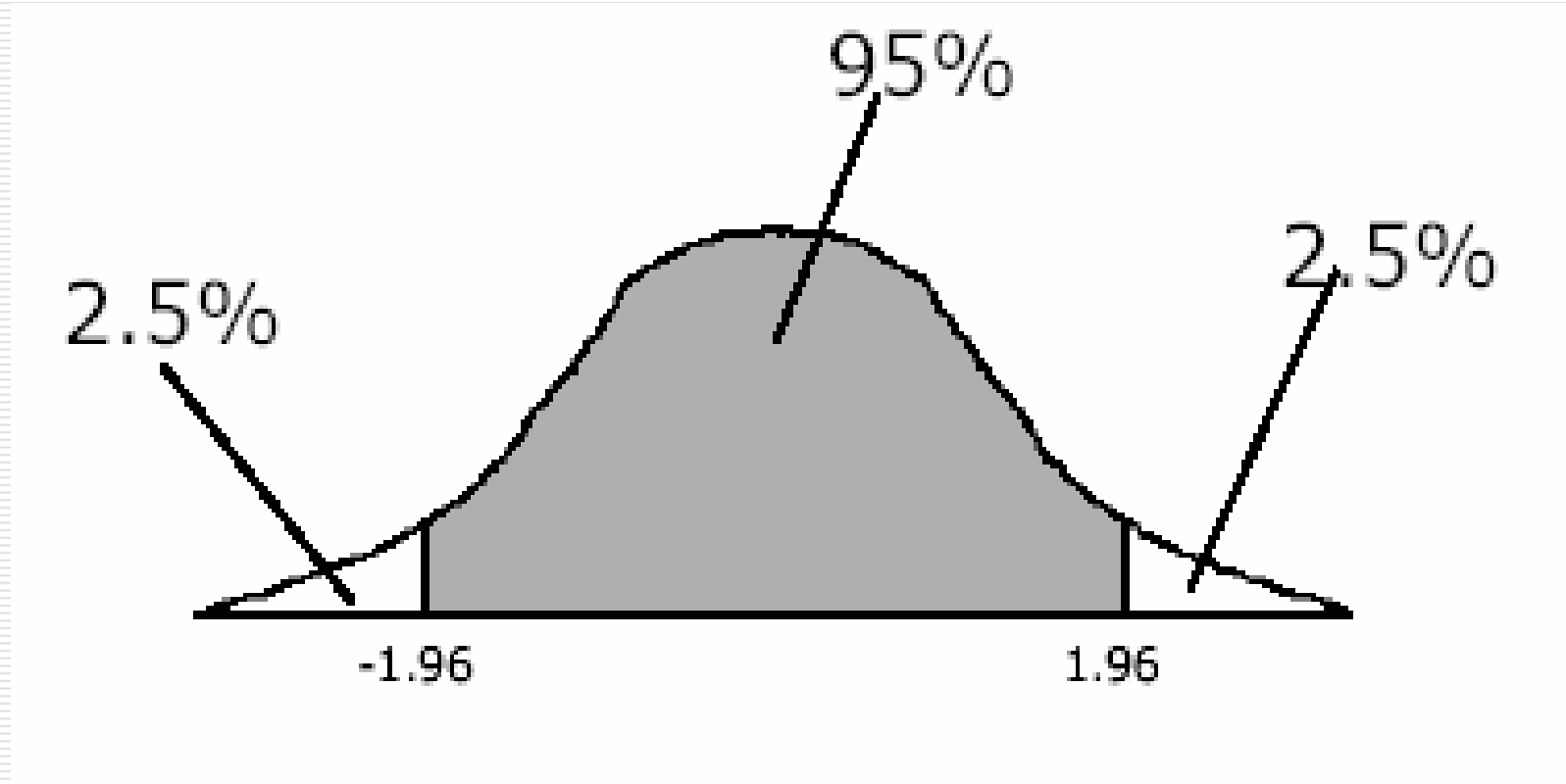
---

## □ Postup:

- bodový odhad:  $\mu=96$
  - výpočet výběrové chyby (směrodatné odchyly RVP):  
$$\sigma/\sqrt{n} = 15/\sqrt{36} = 15/6 = \mathbf{2,5}$$
  - stanovení úrovně spolehlivosti: 95%
  - najít hodnotu  $z$  pro 95% pravděpodobnost
-

# Příklad

---



# Příklad

---

- v tabulce normálního rozdělení najdeme hodnoty  $z$
  - hodnoty  $z$  pro 99% : 1,96 a -1,96
-

# Příklad

---

- k výběrovému průměru přičteme (pro horní hranici intervalu) a odečteme (pro spodní hranici) výběrovou chybu, vynásobenou hodnotou  $z$
-

# Příklad

---

$$CI(\mu) = \bar{x} \pm z(\sigma/\sqrt{n})$$

$$CI(\mu) = 96 + 1,96 * 2,5 = 96 + 4,9 = \mathbf{100,9}$$

$$CI(\mu) = 96 - 1,96 * 2,5 = 96 - 4,9 = \mathbf{91,10}$$

**95% interval spolehlivosti je 91,1 – 100,9**

---

# Interval spolehlivosti

---

□ **hodnoty z** pro nejčastěji užívané pravděpodobnosti:

- 90% (zbývá 5% + 5%)  $z = +/- 1,645$
  - 95% (zbývá 2,5% + 2,5%)  $z = +/- 1,96$
  - 99% (zbývá 0,5% + 0,5%)  $z = +/- 2,57$
-



# Příklad 2

---

- pro odhad průměru z předchozího příkladu sestrojte 99% interval spolehlivosti
-

# Příklad 2

---

$$CI(\mu) = \bar{x} \pm z \left( \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$CI(\mu) = 96 + 2,57 * 2,5 = 96 + 6,4 = \mathbf{102,4}$$

$$CI(\mu) = 96 - 2,57 * 2,5 = 96 - 6,4 = \mathbf{89,6}$$

**95% interval spolehlivosti je 89,6 – 102,4**

---

# Odhady podílů

---

- ❑ u kategoriálních proměnných nemůžeme počítat průměry
  - ❑ odhadujeme proto **podíly** jednotlivých kategorií proměnné
-

# Odhady podílů

---

- např. podíl kuřáků v populaci českých adolescentů
  - podíl pacientů s rakovinou plic, kteří přežijí 5 let od diagnózy
  - podíl chlapců mezi dětmi s poruchou pozornosti
-

# Odhady podílů

---

- pokud zkoumáme místo celé populace pouze výběr z ní, nezajímá nás tolik, jaký je podíl kategorií proměnné ve výběru (četnost  $\mathbf{p}$ )
  - ale spíše jaký je skutečný podíl v populaci – četnost  $\pi$
-

# Odhady podílů

---

- při dostatečně velkém  $n$  platí i pro rozdělení podílů centrální limitní věta
- rozdělení výběrových podílů je normální rozdělení, s **průměrnou četností  $\pi$**  a směrodatnou odchylkou (výběrovou chybou)

$$SE = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

---

# Příklad 4

---

- ❑ chceme zjistit, jaká je podpora zachování hlavního nádraží v Brně na stávajícím místě
  - ❑ náhodný výběr z populace brněnských voličů ( $n=1000$  osob)
  - ❑ 585 osob se vyjádřilo pro ( $p=0,585$ )
  - ❑ odhadněte s 95% spolehlivostí podporu zachování nádraží v populaci brněnských voličů
-

# Odhady podílů

---

- interval spolehlivosti pro podíly se spočítá podobně jako pro průměry:

$$p \pm z_{1-\alpha/2} \sigma_p$$



# Odhady podílů

---

- nemůžeme však spočítat výběrovou chybu, protože neznáme  $\pi$
  - v tomto případě je však možné dosadit místo toho  $p$  a přitom použít normální rozdělení (pokud je  $n > 30$ )
  - pokud je  $n < 30$ , pak dosadíme místo  $\pi$  hodnotu 0,5
-

# Příklad 4

---

□  $p=0,585$

□  $z=1,96$

□  $SE(p)=\sqrt{[0,585(1-0,585)/1000]}$   
 $=0,0156$

**interval spolehlivosti**

$$0.585 \pm 1.96(0.0156)$$

$$0.585 \pm 0,0305$$

**--- přesnost odhadu je  $\pm 3\%$**

---

# Příklad 4

---

- s 95% pravděpodobností je podíl osob souhlasících se zachováním hlavního nádraží na stávajícím místě **mezi 55.4% a 61.6%**
  - tj. máme 95% pravděpodobnost, že kdyby se v době průzkumu hlasovalo, bude většina pro
-

# Odhady podílů

---

## **vztah mezi velikostí vzorku a přesností odhadu**

- $n=100$        $\pm 10\%$
  - $n=200$        $\pm 7\%$
  - $n=400$        $\pm 5\%$
  - $n=1000$        $\pm 3\%$
  - $n=2400$        $\pm 2\%$
  - $n=9600$        $\pm 1\%$
-

# Odhady podílů

---

- požadovaná velikost vzorku roste mnohem rychleji než spolehlivost odhadu (pro zdvojnásobení spolehlivosti je nutné asi čtyřnásobně zvětšit vzorek)
  - důležité při plánování výzkumu – jakou přesnost potřebujeme? jaké budou náklady?
  - podobný vztah platí pro odhad průměrů
-

# Kontrolní otázky

---

- 2 typy odhadů
  - na čem závisí šířka intervalu spolehlivosti? (*není nutno znát zpaměti vzorce, ale je třeba chápat princip výpočtu*)
  - vztah velikosti výběru a spolehlivosti odhadu
-

# Literatura

---

- Hendl: kapitoly 4 a 5
-