Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic

{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

26. 10. 2010

Obsah přednášky

Čísla – znalosti ze SŠ

- Číselné množiny
  - přirozená čísla $N = \{0, 1, \ldots\}$
  - celá čísla $Z = N \cup \{-1, -2, \ldots\}$
  - racionální čísla $Q = \{r/s \mid r, s \in Z \ \wedge \ s \neq 0\}$
  - reálná čísla – ,,celá číselná osa"
  - komplexní čísla – ,,pokrývají rovinu"
- Náš cíl
  - všechny objekty v matematice jsou množiny
  - $\rightarrow$ definice čísel s pomocí množin
  - definice číselných operací

Čísla – znalosti ze SŠ

- Číselné množiny
  - přirozená čísla $N = \{0, 1, ...\}$
  - celá čísla $Z = N \cup \{-1, -2, ...\}$
  - racionální čísla $Q = \{r/s \mid r, s \in Z \ \wedge \ s \neq 0\}$
  - reálná čísla – „celá číselná osa"
  - komplexní čísla – „pokrývají rovinu"
- Náš cíl
  - všechny objekty v matematice jsou množiny
  - $\rightarrow$ definice čísel s pomocí množin
  - definice číselných operací

Čísla – znalosti ze SŠ

- Číselné množiny
  - přirozená čísla $N = \{0, 1, \ldots\}$
  - celá čísla $Z = N \cup \{-1, -2, \ldots\}$
  - racionální čísla $Q = \{r/s \mid r, s \in Z \ \wedge \ s \neq 0\}$
  - reálná čísla – ,,celá číselná osa"
  - komplexní čísla – ,,pokrývají rovinu"
- Náš cíl
  - všechny objekty v matematice jsou množiny
  - $\rightarrow$ definice čísel s pomocí množin
  - definice číselných operací

Čísla – znalosti ze SŠ

- Číselné množiny
  - přirozená čísla $N = \{0, 1, \dots\}$
  - celá čísla $Z = N \cup \{-1, -2, \dots\}$
  - racionální čísla $Q = \{r/s \mid r, s \in Z \ \wedge \ s \neq 0\}$
  - reálná čísla – ,,celá číselná osa"
  - komplexní čísla – ,,pokrývají rovinu"
- Náš cíl
  - všechny objekty v matematice jsou množiny
  - $\rightarrow$ definice čísel s pomocí množin
  - definice číselných operací

Čísla – znalosti ze SŠ

- Číselné množiny
  - přirozená čísla $N = \{0, 1, ...\}$
  - celá čísla $Z = N \cup \{-1, -2, ...\}$
  - racionální čísla $Q = \{r/s \mid r, s \in Z \ \wedge \ s \neq 0\}$
  - reálná čísla – ,,celá číselná osa"
  - komplexní čísla – ,,pokrývají rovinu"
- Náš cíl
  - všechny objekty v matematice jsou množiny
  - $\rightarrow$ definice čísel s pomocí množin
  - definice číselných operací

Čísla – znalosti ze SŠ

- Číselné množiny
  - přirozená čísla $N = \{0, 1, ...\}$
  - celá čísla $Z = N \cup \{-1, -2, ...\}$
  - racionální čísla $Q = \{r/s \mid r, s \in Z \ \wedge \ s \neq 0\}$
  - reálná čísla – ,,celá číselná osa''
  - komplexní čísla – ,,pokrývají rovinu''
- Náš cíl
  - všechny objekty v matematice jsou množiny
  - $\rightarrow$ definice čísel s pomocí množin
  - definice číselných operací

Čísla – znalosti ze SŠ

- Číselné množiny
  - přirozená čísla $N = \{0, 1, \ldots\}$
  - celá čísla $Z = N \cup \{-1, -2, \ldots\}$
  - racionální čísla $Q = \{r/s \mid r, s \in Z \ \wedge \ s \neq 0\}$
  - reálná čísla – ,,celá číselná osa"
  - komplexní čísla – ,,pokrývají rovinu"
- Náš cíl
  - všechny objekty v matematice jsou množiny
  - $\rightarrow$ definice čísel s pomocí množin
  - definice číselných operací

Čísla – znalosti ze SŠ

- Číselné množiny
  - přirozená čísla $N = \{0, 1, ...\}$
  - celá čísla $Z = N \cup \{-1, -2, ...\}$
  - racionální čísla $Q = \{r/s \mid r, s \in Z \ \wedge \ s \neq 0\}$
  - reálná čísla – ,,celá číselná osa"
  - komplexní čísla – ,,pokrývají rovinu"
- Náš cíl
  - všechny objekty v matematice jsou množiny
  - $\rightarrow$ definice čísel s pomocí množin
  - definice číselných operací

Čísla – znalosti ze SŠ

- Číselné množiny
  - přirozená čísla $N = \{0, 1, ...\}$
  - celá čísla $Z = N \cup \{-1, -2, ...\}$
  - racionální čísla $Q = \{r/s \mid r, s \in Z \ \wedge \ s \neq 0\}$
  - reálná čísla – ,,celá číselná osa"
  - komplexní čísla – ,,pokrývají rovinu"
- Náš cíl
  - všechny objekty v matematice jsou množiny
  - $\rightarrow$ definice čísel s pomocí množin
  - definice číselných operací

Čísla – znalosti ze SŠ

- Číselné množiny
  - přirozená čísla $N = \{0, 1, \dots\}$
  - celá čísla $Z = N \cup \{-1, -2, \dots\}$
  - racionální čísla $Q = \{r/s \mid r, s \in Z \ \wedge \ s \neq 0\}$
  - reálná čísla – ,,celá číselná osa"
  - komplexní čísla – ,,pokrývají rovinu"
- Náš cíl
  - všechny objekty v matematice jsou množiny
  - $\rightarrow$ definice čísel s pomocí množin
  - definice číselných operací

Přirozená čísla

- Přirozená čísla
  - formálně definována jako objekt splňující nějaké axiomy
  - tzv. Peanova aritmetika
- Axiomy přirozených čísel
  - existuje nula
  - každé číslo x má následníka $S(x)$
  - nula není následníkem žádného čísla
  - různá čísla mají různé následníky: $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$

Přirozená čísla

- Přirozená čísla
  - formálně definována jako objekt splňující nějaké axiomy
  - tzv. Peanova aritmetika
- Axiomy přirozených čísel
  - existuje nula
  - každé číslo x má následníka $S(x)$
  - nula není následníkem žádného čísla
  - různá čísla mají různé následníky: $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$

Přirozená čísla

- Přirozená čísla
  - formálně definována jako objekt splňující nějaké axiomy
  - tzv. Peanova aritmetika
- Axiomy přirozených čísel
  - existuje nula
  - každé číslo x má následníka $S(x)$
  - nula není následníkem žádného čísla
  - různá čísla mají různé následníky: $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$

Přirozená čísla

- Přirozená čísla
  - formálně definována jako objekt splňující nějaké axiomy
  - tzv. Peanova aritmetika
- Axiomy přirozených čísel
  - existuje nula
  - každé číslo x má následníka $S(x)$
  - nula není následníkem žádného čísla
  - různá čísla mají různé následníky: $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$

Přirozená čísla

- Přirozená čísla
    - formálně definována jako objekt splňující nějaké axiomy
    - tzv. Peanova aritmetika
- Axiomy přirozených čísel
    - existuje nula
    - každé číslo x má následníka $S(x)$
    - nula není následníkem žádného čísla
    - různá čísla mají různé následníky: $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$

Přirozená čísla

- Přirozená čísla
  - formálně definována jako objekt splňující nějaké axiomy
  - tzv. Peanova aritmetika
- Axiomy přirozených čísel
  - existuje nula
  - každé číslo x má následníka $S(x)$
  - nula není následníkem žádného čísla
  - různá čísla mají různé následníky: $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$

Přirozená čísla

- Přirozená čísla
  - formálně definována jako objekt splňující nějaké axiomy
  - tzv. Peanova aritmetika
- Axiomy přirozených čísel
  - existuje nula
  - každé číslo x má následníka $S(x)$
  - nula není následníkem žádného čísla
  - různá čísla mají různé následníky: $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$

Přirozená čísla

- Přirozená čísla
  - formálně definována jako objekt splňující nějaké axiomy
  - tzv. Peanova aritmetika
- Axiomy přirozených čísel
  - existuje nula
  - každé číslo x má následníka $S(x)$
  - nula není následníkem žádného čísla
  - různá čísla mají různé následníky: $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$

Konstrukce přirozených čísel

- Definujeme množinový systém, který splňuje Peanovy axiomy
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $S(x) \equiv x \cup \{x\}$
- Jak tedy čísla vypadají?
  - $0 = \emptyset$
  - $1 = \{\emptyset\}$
  - $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
  - atd. – vždy $n = \{0, \ldots, n-1\}$

Konstrukce přirozených čísel

- Definujeme množinový systém, který splňuje Peanovy axiomy
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $S(x) \equiv x \cup \{x\}$
- Jak tedy čísla vypadají?
  - $0 = \emptyset$
  - $1 = \{\emptyset\}$
  - $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
  - atd. – vždy $n = \{0, ..., n-1\}$

Konstrukce přirozených čísel

- Definujeme množinový systém, který splňuje Peanovy axiomy
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $S(x) \equiv x \cup \{x\}$
- Jak tedy čísla vypadají?
  - $0 = \emptyset$
  - $1 = \{\emptyset\}$
  - $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
  - atd. – vždy $n = \{0, \ldots, n-1\}$

Konstrukce přirozených čísel

- Definujeme množinový systém, který splňuje Peanovy axiomy
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $S(x) \equiv x \cup \{x\}$
- Jak tedy čísla vypadají?
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $1 = \{\emptyset\}$
  - $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
  - atd. – vždy $n = \{0, \ldots, n-1\}$

Konstrukce přirozených čísel

- Definujeme množinový systém, který splňuje Peanovy axiomy
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $S(x) \equiv x \cup \{x\}$
- Jak tedy čísla vypadají?
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $1 = \{\emptyset\}$
  - $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
  - atd. – vždy $n = \{0, ..., n-1\}$

Konstrukce přirozených čísel

- Definujeme množinový systém, který splňuje Peanovy axiomy
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $S(x) \equiv x \cup \{x\}$
- Jak tedy čísla vypadají?
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $1 = \{\emptyset\}$
  - $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
  - atd. – vždy $n = \{0, ..., n-1\}$

Konstrukce přirozených čísel

- Definujeme množinový systém, který splňuje Peanovy axiomy
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $S(x) \equiv x \cup \{x\}$
- Jak tedy čísla vypadají?
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $1 = \{\emptyset\}$
  - $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
  - atd. – vždy $n = \{0, ..., n-1\}$

Konstrukce přirozených čísel

- Definujeme množinový systém, který splňuje Peanovy axiomy
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $S(x) \equiv x \cup \{x\}$
- Jak tedy čísla vypadají?
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $1 = \{\emptyset\}$
  - $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
  - atd. – vždy $n = \{0, ..., n-1\}$

Konstrukce přirozených čísel

- Definujeme množinový systém, který splňuje Peanovy axiomy
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $S(x) \equiv x \cup \{x\}$
- Jak tedy čísla vypadají?
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $1 = \{\emptyset\}$
  - $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
  - atd. – vždy $n = \{0, \ldots, n-1\}$

Číselné operace

- Definovány induktivně
- Sčítání
  - $a + 0 = a$
  - $a + S(b) = S(a + b)$
- Násobení
  - $a * 0 = 0$
  - $a * S(b) = (a * b) + a$

Číselné operace

- Definovány induktivně
- Sčítání
  - $a + 0 = a$
  - $a + S(b) = S(a + b)$
- Násobení
  - $a * 0 = 0$
  - $a * S(b) = (a * b) + a$

Číselné operace

- Definovány induktivně
- Sčítání
  - $a + 0 = a$
  - $a + S(b) = S(a + b)$
- Násobení
  - $a * 0 = 0$
  - $a * S(b) = (a * b) + a$

Číselné operace

- Definovány induktivně
- Sčítání
  - $a + 0 = a$
  - $a + S(b) = S(a + b)$
- Násobení
  - $a * 0 = 0$
  - $a * S(b) = (a * b) + a$

Číselné operace

- Definovány induktivně
- Sčítání
  - $a + 0 = a$
  - $a + S(b) = S(a + b)$
- Násobení
  - $a * 0 = 0$
  - $a * S(b) = (a * b) + a$

Číselné operace

- Definovány induktivně
- Sčítání
  - $a + 0 = a$
  - $a + S(b) = S(a + b)$
- Násobení
  - $a * 0 = 0$
  - $a * S(b) = (a * b) + a$

Číselné operace

- Definovány induktivně
- Sčítání
  - $a + 0 = a$
  - $a + S(b) = S(a + b)$
- Násobení
  - $a * 0 = 0$
  - $a * S(b) = (a * b) + a$

Příklad – sčítání podle definice

- $1 + 2$
  - $1 = S(0)$
  - $2 = S(1) = S(S(0))$
- $1 + 2$
  - $1 + S(1)$
  - $S(1 + 1)$
  - $S(1 + S(0))$
  - $S(S(1 + 0))$
  - $S(S(1))$
  - $S(S(S(0)))$
  - $= 3$

Příklad – sčítání podle definice

- $1 + 2$
  - $1 = S(0)$
  - $2 = S(1) = S(S(0))$
- $1 + 2$
  - $1 + S(1)$
  - $S(1 + 1)$
  - $S(1 + S(0))$
  - $S(S(1 + 0))$
  - $S(S(1))$
  - $S(S(S(0)))$
  - $= 3$

Příklad – sčítání podle definice

- $1 + 2$
    - $1 = S(0)$
    - $2 = S(1) = S(S(0))$
- $1 + 2$
    - $1 + S(1)$
    - $S(1 + 1)$
    - $S(1 + S(0))$
    - $S(S(1 + 0))$
    - $S(S(1))$
    - $S(S(S(0)))$
    - $= 3$

Příklad – sčítání podle definice

- $1 + 2$
    - $1 = S(0)$
    - $2 = S(1) = S(S(0))$
- $1 + 2$
    - $1 + S(1)$
    - $S(1 + 1)$
    - $S(1 + S(0))$
    - $S(S(1 + 0))$
    - $S(S(1))$
    - $S(S(S(0)))$
    - $= 3$

Příklad – sčítání podle definice

- $1 + 2$
    - $1 = S(0)$
    - $2 = S(1) = S(S(0))$
- $1 + 2$
    - $1 + S(1)$
    - $S(1 + 1)$
    - $S(1 + S(0))$
    - $S(S(1 + 0))$
    - $S(S(1))$
    - $S(S(S(0)))$
    - $= 3$

Příklad – sčítání podle definice

- $1 + 2$
  - $1 = S(0)$
  - $2 = S(1) = S(S(0))$
- $1 + 2$
  - $1 + S(1)$
  - $S(1 + 1)$
  - $S(1 + S(0))$
  - $S(S(1 + 0))$
  - $S(S(1))$
  - $S(S(S(0)))$
  - $= 3$

Příklad – sčítání podle definice

- $1 + 2$
  - $1 = S(0)$
  - $2 = S(1) = S(S(0))$
- $1 + 2$
  - $1 + S(1)$
  - $S(1 + 1)$
  - $S(1 + S(0))$
  - $S(S(1 + 0))$
  - $S(S(1))$
  - $S(S(S(0)))$
  - $= 3$

Příklad – sčítání podle definice

- $1 + 2$
  - $1 = S(0)$
  - $2 = S(1) = S(S(0))$
- $1 + 2$
  - $1 + S(1)$
  - $S(1 + 1)$
  - $S(1 + S(0))$
  - $S(S(1 + 0))$
  - $S(S(1))$
  - $S(S(S(0)))$
  - $= 3$

Příklad – sčítání podle definice

- $1 + 2$
  - $1 = S(0)$
  - $2 = S(1) = S(S(0))$
- $1 + 2$
  - $1 + S(1)$
  - $S(1 + 1)$
  - $S(1 + S(0))$
  - $S(S(1 + 0))$
  - $S(S(1))$
  - $S(S(S(0)))$
  - $= 3$

Příklad – sčítání podle definice

- $1 + 2$
  - $1 = S(0)$
  - $2 = S(1) = S(S(0))$
- $1 + 2$
  - $1 + S(1)$
  - $S(1 + 1)$
  - $S(1 + S(0))$
  - $S(S(1 + 0))$
  - $S(S(1))$
  - $S(S(S(0)))$
  - $= 3$

Příklad – sčítání podle definice

- $1 + 2$
    - $1 = S(0)$
    - $2 = S(1) = S(S(0))$
- $1 + 2$
    - $1 + S(1)$
    - $S(1 + 1)$
    - $S(1 + S(0))$
    - $S(S(1 + 0))$
    - $S(S(1))$
    - $S(S(S(0)))$
    - $= 3$

Další číselné množiny

- Jsou konstruovány s využitím dvojic a ekvivalencí
  - pojmy, které „neznáme"
  - $\longrightarrow$ v následujících přednáškách

Další číselné množiny

- Jsou konstruovány s využitím dvojic a ekvivalencí
  - pojmy, které ,,neznáme"
  - $\longrightarrow$ v následujících přednáškách

Další číselné množiny

- Jsou konstruovány s využitím dvojic a ekvivalencí
  - pojmy, které ,,neznáme"
  - $\longrightarrow$ v následujících přednáškách