# Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

2. 11. 2010





## Obsah přednášky







## Uspořádaná dvojice

- (a, b)
  - má první a druhý prvek
  - $\rightarrow$ na rozdíl od množiny záleží na pořadí prvků
- Definice pomocí množin
  - $(a, b) \equiv \{\{a\}, \{a, b\}\}$
  - takto jednoznačně rozlišíme, který z prvků je první
  - jsou možné i jiné definice? Jaké?
- Uspořádané n-tice (kde n je přirozené)
  - trojice $(a, b, c) \equiv (a, (b, c))$
  - obecně $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \equiv (a_1, (a_2, (a_3, (..., a_n)...)))$
  - (funguje jen pro konečné $n$)





## Kartézský součin

- Kartézský součin dvou množin A, B
  - $A \text{ x } B \equiv \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$
  - $\rightarrow$ množina uspořádaných dvojic prvků z A a B
- Kartézský součin více množin
  - analogicky – obsahuje uspořádané n-tice
  - $A \text{ x } B \text{ x } C \equiv \{(a, b, c) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B \ \wedge \ c \in C\}$
  - podobně pro větší n

# Relace

- Motivace
  - způsob, jak v matematice svázat dvě hodnoty (případně více)
  - vyjadřujeme, že objekty (množiny) v relaci mají něco společného
- Binární relace
  - množina uspořádaných dvojic
  - $\rightarrow$ podmnožina kartézského součinu
- n-ární relace
  - množina uspořádaných n-tic
- Často říkáme ,,relace na množině A"
  - tzn. podmnožina součinu A x A, resp. A x A x ... x A





# Relace – příklady

- Relace identity na množině A
  - $Id(A)$ – binární relace
  - $Id(A) = \{(a, a) \in AxA \mid a \in A\}$
- Relace větší nebo rovno na přirozených číslech
  - $\geq (N)$ – binární relace
  - $\geq (N) = \{(a, b) \in NxN \mid b \subseteq a\}$
  - (podle množinové konstrukce přirozených čísel – viz minulá přednáška)
- Relace plus na přirozených číslech
  - $+(N)$ – ternární relace
  - $+(N) = \{(a, b, c) \in NxNxN \mid a + b = c\}$
  - $a + b = c$ je jen jiný zápis pro $(a, b, c) \in +(N)$
  - $\rightarrow$ všechny operace na číslech jsou relace





# Vlastnosti binárních relací

- Už jste se s nimi setkali jinde
- Reflexivita
  - R(A) je reflexivní, právě tehdy, když
  - $\forall a \in A(\ (a, a) \in R\ )$
- Symetrie
  - R(A) je symetrická, právě tehdy, když
  - $\forall a, b \in A(\ (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R\ )$
- Antisymetrie
  - R(A) je antisymetrická, právě tehdy, když
  - $\forall a, b \in A(\ (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b\ )$





# Vlastnosti binárních relací (2)

- Tranzitivita
  - R(A) je tranzitivní, právě tehdy, když
  - $\forall a, b, c \in A(\ (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R\ )$
- Ekvivalence
  - R(A) je ekvivalence, právě tehdy, když je současně reflexivní, symetrická i tranzitivní
- Uspořádání
  - R(A) je uspořádání, právě tehdy, když je současně reflexivní, antisymetrická i tranzitivní

# Vlastnosti binárních relací – příklady

- Identita na libovolné množině
    - splňuje všechny výše uvedené vlastnosti
    - $\longrightarrow$ ekvivalence i uspořádání
- Relace $\leq$ na přirozených číslech
    - není symetrická
    - $\longrightarrow$ uspořádání
- Relace $<$ na přirozených číslech
    - není symetrická ani reflexivní
    - $\longrightarrow$ ani ekvivalence, ani uspořádání
- Relace na prázdné množině $R(\emptyset)$
    - je $\emptyset$ (podmnožina $\emptyset$ $x$ $\emptyset$)
    - $\longrightarrow$ ekvivalence i uspořádání
    - (pro všechny prvky prázdné množiny platí kde co)