

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory

I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic

{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

7. 12. 2010

Obsah přednášky

- 1 Kombinatorika
- 2 Základní kombinatorická pravidla
- 3 Pravděpodobnost
- 4 Příklady

Kombinatorika

■ Motivace

- vědět kolik možností (situací) může nastat
- umožňuje výpočet pravděpodobností

■ Znáte ze SŠ

- kombinační čísla, faktoriály
- vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)

■ Cíl přednášky

- odnaučit se vzorečky
- řešit kombinatorické problémy „úvahou“ (selským rozumem)

Kombinatorika

■ Motivace

- vědět kolik možností (situací) může nastat
- umožňuje výpočet pravděpodobností

■ Znáte ze SŠ

- kombinační čísla, faktoriály
- vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)

■ Cíl přednášky

- odnaučit se vzorečky
- řešit kombinatorické problémy „úvahou“ (selským rozumem)

Kombinatorika

■ Motivace

- vědět kolik možností (situací) může nastat
- umožňuje výpočet pravděpodobností

■ Znáte ze SŠ

- kombinační čísla, faktoriály
- vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)

■ Cíl přednášky

- odnaučit se vzorečky
- řešit kombinatorické problémy „úvahou“ (selským rozumem)

Kombinatorika

■ Motivace

- vědět kolik možností (situací) může nastat
- umožňuje výpočet pravděpodobností

■ Znáte ze SŠ

- kombinační čísla, faktoriály
- vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)

■ Cíl přednášky

- odnaučit se vzorečky
- řešit kombinatorické problémy „úvahou“ (selským rozumem)

Kombinatorika

■ Motivace

- vědět kolik možností (situací) může nastat
- umožňuje výpočet pravděpodobností

■ Znáte ze SŠ

- kombinační čísla, faktoriály
- vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)

■ Cíl přednášky

- odnaučit se vzorečky
- řešit kombinatorické problémy „úvahou“ (selským rozumem)

Kombinatorika

■ Motivace

- vědět kolik možností (situací) může nastat
- umožňuje výpočet pravděpodobností

■ Znáte ze SŠ

- kombinační čísla, faktoriály
- vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)

■ Cíl přednášky

- odnaučit se vzorečky
- řešit kombinatorické problémy „úvahou“ (selským rozumem)

Kombinatorika

■ Motivace

- vědět kolik možností (situací) může nastat
- umožňuje výpočet pravděpodobností

■ Znáte ze SŠ

- kombinační čísla, faktoriály
- vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)

■ Cíl přednášky

- odnaučit se vzorečky
- řešit kombinatorické problémy „úvahou“ (selským rozumem)

Kombinatorika

■ Motivace

- vědět kolik možností (situací) může nastat
- umožňuje výpočet pravděpodobností

■ Znáte ze SŠ

- kombinační čísla, faktoriály
- vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)

■ Cíl přednášky

- odnaučit se vzorečky
- řešit kombinatorické problémy „úvahou“ (selským rozumem)

Kombinatorika

■ Motivace

- vědět kolik možností (situací) může nastat
- umožňuje výpočet pravděpodobností

■ Znáte ze SŠ

- kombinační čísla, faktoriály
- vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)

■ Cíl přednášky

- odnaučit se vzorečky
- řešit kombinatorické problémy „úvahou“ (selským rozumem)

Základní kombinatorická pravidla

■ Pravidlo součtu

- pro **disjunktní** množiny A_1, A_2, \dots, A_n o velikostech p_1, p_2, \dots, p_n
- množina $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \dots + p_n$

■ Pravidlo součinu

- počet všech uspořádaných k -tic, takových, že
- 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, ..., k -tý člen n_k způsoby
- je $n_1 * n_2 * \dots * n_k$

Základní kombinatorická pravidla

■ Pravidlo součtu

- pro **disjunktní** množiny A_1, A_2, \dots, A_n o velikostech p_1, p_2, \dots, p_n
- množina $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \dots + p_n$

■ Pravidlo součinu

- počet všech uspořádaných k -tic, takových, že
- 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, ..., k -tý člen n_k způsoby
- je $n_1 * n_2 * \dots * n_k$

Základní kombinatorická pravidla

■ Pravidlo součtu

- pro **disjunktní** množiny A_1, A_2, \dots, A_n o velikostech p_1, p_2, \dots, p_n
- množina $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \dots + p_n$

■ Pravidlo součinu

- počet všech uspořádaných k -tic, takových, že
- 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, ..., k -tý člen n_k způsoby
- je $n_1 * n_2 * \dots * n_k$

Základní kombinatorická pravidla

■ Pravidlo součtu

- pro **disjunktní** množiny A_1, A_2, \dots, A_n o velikostech p_1, p_2, \dots, p_n
- množina $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \dots + p_n$

■ Pravidlo součinu

- počet všech uspořádaných k -tic, takových, že
- 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, ..., k -tý člen n_k způsoby
- je $n_1 * n_2 * \dots * n_k$

Základní kombinatorická pravidla

■ Pravidlo součtu

- pro **disjunktní** množiny A_1, A_2, \dots, A_n o velikostech p_1, p_2, \dots, p_n
- množina $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \dots + p_n$

■ Pravidlo součinu

- počet všech uspořádaných k -tic, takových, že
- 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, ..., k -tý člen n_k způsoby
- je $n_1 * n_2 * \dots * n_k$

Základní kombinatorická pravidla

■ Pravidlo součtu

- pro **disjunktní** množiny A_1, A_2, \dots, A_n o velikostech p_1, p_2, \dots, p_n
- množina $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \dots + p_n$

■ Pravidlo součinu

- počet všech uspořádaných k -tic, takových, že
- 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, ..., k -tý člen n_k způsoby
- je $n_1 * n_2 * \dots * n_k$

Základní kombinatorická pravidla

■ Pravidlo součtu

- pro **disjunktní** množiny A_1, A_2, \dots, A_n o velikostech p_1, p_2, \dots, p_n
- množina $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \dots + p_n$

■ Pravidlo součinu

- počet všech uspořádaných k -tic, takových, že
- 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, ..., k -tý člen n_k způsoby
- je $n_1 * n_2 * \dots * n_k$

Pravděpodobnost

- Už znáte ze SŠ
 - pravděpodobnost jevu A je podíl m/n
 - kde m je počet situací, kdy jev A nastal
 - kde n je počet všech možných situací

Pravděpodobnost

- Už znáte ze SŠ
 - pravděpodobnost jevu A je podíl m/n
 - kde m je počet situací, kdy jev A nastal
 - kde n je počet všech možných situací

Pravděpodobnost

- Už znáte ze SŠ
 - pravděpodobnost jevu A je podíl m/n
 - kde m je počet situací, kdy jev A nastal
 - kde n je počet všech možných situací

Pravděpodobnost

- Už znáte ze SŠ
 - pravděpodobnost jevu A je podíl m/n
 - kde m je počet situací, kdy jev A nastal
 - kde n je počet všech možných situací

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
 - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
 - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
 - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
 - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
 - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
 - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
 - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
 - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
 - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
 - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
 - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
 - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
 - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
 - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
 - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
 - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
 - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
 - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
 - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
 - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
 - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
 - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
 - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
 - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
 - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
 - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
 - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
 - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu $\{1, 2, \dots, n\}$?
 - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n - 1$ prvků atd.
 - pravidlo součinu: $n * (n - 1) * (n - 2) * \dots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
 - počet všech uspořádání: $6!$
 - ale některá uspořádání jsou identická
 - vždy můžeme prohodit obě jedničky
 - \rightarrow počet možností podělíme 2
 - vždy můžeme prohodit všechny trojky
 - \rightarrow počet možností podělíme 6 ($= 3!$, počet možných seřazení 3 prvků)
 - \rightarrow výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu $\{1, 2, \dots, n\}$?
 - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n - 1$ prvků atd.
 - pravidlo součinu: $n * (n - 1) * (n - 2) * \dots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
 - počet všech uspořádání: 6!
 - ale některá uspořádání jsou identická
 - vždy můžeme prohodit obě jedničky
 - \rightarrow počet možností podělíme 2
 - vždy můžeme prohodit všechny trojky
 - \rightarrow počet možností podělíme 6 (= 3!, počet možných seřazení 3 prvků)
 - \rightarrow výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu $\{1, 2, \dots, n\}$?
 - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n - 1$ prvků atd.
 - pravidlo součinu: $n * (n - 1) * (n - 2) * \dots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
 - počet všech uspořádání: 6!
 - ale některá uspořádání jsou identická
 - vždy můžeme prohodit obě jedničky
 - → počet možností podělíme 2
 - vždy můžeme prohodit všechny trojky
 - → počet možností podělíme 6 (= 3!, počet možných seřazení 3 prvků)
 - → výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu $\{1, 2, \dots, n\}$?
 - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n - 1$ prvků atd.
 - pravidlo součinu: $n * (n - 1) * (n - 2) * \dots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
 - počet všech uspořádání: 6!
 - ale některá uspořádání jsou identická
 - vždy můžeme prohodit obě jedničky
 - \rightarrow počet možností podělíme 2
 - vždy můžeme prohodit všechny trojky
 - \rightarrow počet možností podělíme 6 (= 3!, počet možných seřazení 3 prvků)
 - \rightarrow výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu $\{1, 2, \dots, n\}$?
 - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n - 1$ prvků atd.
 - pravidlo součinu: $n * (n - 1) * (n - 2) * \dots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
 - počet všech uspořádání: $6!$
 - ale některá uspořádání jsou identická
 - vždy můžeme prohodit obě jedničky
 - \rightarrow počet možností podělíme 2
 - vždy můžeme prohodit všechny trojky
 - \rightarrow počet možností podělíme 6 ($= 3!$, počet možných seřazení 3 prvků)
 - \rightarrow výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu $\{1, 2, \dots, n\}$?
 - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n - 1$ prvků atd.
 - pravidlo součinu: $n * (n - 1) * (n - 2) * \dots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
 - počet všech uspořádání: $6!$
 - ale některá uspořádání jsou identická
 - vždy můžeme prohodit obě jedničky
 - \rightarrow počet možností podělíme 2
 - vždy můžeme prohodit všechny trojky
 - \rightarrow počet možností podělíme 6 ($= 3!$, počet možných seřazení 3 prvků)
 - \rightarrow výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu $\{1, 2, \dots, n\}$?
 - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n - 1$ prvků atd.
 - pravidlo součinu: $n * (n - 1) * (n - 2) * \dots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
 - počet všech uspořádání: $6!$
 - ale některá uspořádání jsou identická
 - vždy můžeme prohodit obě jedničky
 - \rightarrow počet možností podělíme 2
 - vždy můžeme prohodit všechny trojky
 - \rightarrow počet možností podělíme 6 (= $3!$, počet možných seřazení 3 prvků)
 - \rightarrow výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu $\{1, 2, \dots, n\}$?
 - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n - 1$ prvků atd.
 - pravidlo součinu: $n * (n - 1) * (n - 2) * \dots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
 - počet všech uspořádání: $6!$
 - ale některá uspořádání jsou identická
 - vždy můžeme prohodit obě jedničky
 - \rightarrow počet možností podělíme 2
 - vždy můžeme prohodit všechny trojky
 - \rightarrow počet možností podělíme 6 ($= 3!$, počet možných seřazení 3 prvků)
 - \rightarrow výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu $\{1, 2, \dots, n\}$?
 - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n - 1$ prvků atd.
 - pravidlo součinu: $n * (n - 1) * (n - 2) * \dots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
 - počet všech uspořádání: $6!$
 - ale některá uspořádání jsou identická
 - vždy můžeme prohodit obě jedničky
 - \rightarrow počet možností podělíme 2
 - vždy můžeme prohodit všechny trojky
 - \rightarrow počet možností podělíme 6 ($= 3!$, počet možných seřazení 3 prvků)
 - \rightarrow výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu $\{1, 2, \dots, n\}$?
 - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n - 1$ prvků atd.
 - pravidlo součinu: $n * (n - 1) * (n - 2) * \dots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
 - počet všech uspořádání: $6!$
 - ale některá uspořádání jsou identická
 - vždy můžeme prohodit obě jedničky
 - \rightarrow počet možností podělíme 2
 - vždy můžeme prohodit všechny trojky
 - \rightarrow počet možností podělíme 6 ($= 3!$, počet možných seřazení 3 prvků)
 - \rightarrow výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu $\{1, 2, \dots, n\}$?
 - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n - 1$ prvků atd.
 - pravidlo součinu: $n * (n - 1) * (n - 2) * \dots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
 - počet všech uspořádání: $6!$
 - ale některá uspořádání jsou identická
 - vždy můžeme prohodit obě jedničky
 - \rightarrow počet možností podělíme 2
 - vždy můžeme prohodit všechny trojky
 - \rightarrow počet možností podělíme 6 (= $3!$, počet možných seřazení 3 prvků)
 - \rightarrow výsledek: $6!/12 = 60$