

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory

I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 60200 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 5

Obsah přednášky

Uspořádané dvojice, n-tice

Relace

Uspořádaná dvojice

- ▶ (a, b)
 - ▶ má první a druhý prvek
 - ▶ \rightarrow na rozdíl od množiny **záleží na pořadí prvků**
- ▶ Definice pomocí množin
 - ▶ $(a, b) \equiv \{\{a\}, \{a, b\}\}$
 - ▶ takto jednoznačně rozlišíme, který z prvků je první
 - ▶ jsou možné i jiné definice? Jaké?
- ▶ Uspořádané n-tice (kde n je přirozené)
 - ▶ trojice $(a, b, c) \equiv (a, (b, c))$
 - ▶ obecně $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \equiv (a_1, (a_2, (a_3, (\dots, a_n) \dots)))$
 - ▶ (funguje jen pro konečné n)

Kartézský součin

- ▶ Kartézský součin dvou množin A, B
 - ▶ $A \times B \equiv \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
 - ▶ \rightarrow množina uspořádaných dvojic prvků z A a B
- ▶ Kartézský součin více množin
 - ▶ analogicky – obsahuje uspořádané n-tice
 - ▶ $A \times B \times C \equiv \{(a, b, c) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$
 - ▶ podobně pro větší n

Relace

► Motivace

- způsob, jak v matematice svázat dvě hodnoty (případně více)
- vyjadřujeme, že objekty (množiny) v relaci mají něco společného

► Binární relace

- množina uspořádaných dvojic
- \rightarrow podmnožina kartézského součinu

► n-ární relace

- množina uspořádaných n-tic

► Často říkáme „relace na množině A“

- tzn. podmnožina součinu $A \times A$, resp. $A \times A \times \dots \times A$

Relace – příklady

► Relace identity na množině A

- $Id(A)$ – binární relace
- $Id(A) = \{(a, a) \in A \times A \mid a \in A\}$

► Relace větší nebo rovno na přirozených číslech

- $\geq(N)$ – binární relace
- $\geq(N) = \{(a, b) \in N \times N \mid b \subseteq a\}$
- (podle množinové konstrukce přirozených čísel – viz minulá přednáška)

► Relace plus na přirozených číslech

- $+(N)$ – ternární relace
- $+(N) = \{(a, b, c) \in N \times N \times N \mid a + b = c\}$
- $a + b = c$ je jen jiný zápis pro $(a, b, c) \in +(N)$
- \rightarrow všechny operace na číslech jsou relace

Vlastnosti binárních relací

► Už jste se s nimi setkali jinde

► Reflexivita

- $R(A)$ je reflexivní, právě tehdy, když
- $\forall a \in A ((a, a) \in R)$

► Symetrie

- $R(A)$ je symetrická, právě tehdy, když
- $\forall a, b \in A ((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R)$

► Antisymetrie

- $R(A)$ je antisymetrická, právě tehdy, když
- $\forall a, b \in A ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b)$

Vlastnosti binárních relací (2)

► Tranzitivita

- $R(A)$ je tranzitivní, právě tehdy, když
- $\forall a, b, c \in A ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R)$

► Ekvivalence

- $R(A)$ je ekvivalence, právě tehdy, když je současně reflexivní, symetrická i tranzitivní

► Uspořádání

- $R(A)$ je uspořádání, právě tehdy, když je současně reflexivní, antisymetrická i tranzitivní

Vlastnosti binárních relací – příklady

- ▶ Identita na libovolné množině
 - ▶ splňuje všechny výše uvedené vlastnosti
 - ▶ → ekvivalence i uspořádání
- ▶ Relace \leq na přirozených číslech
 - ▶ není symetrická
 - ▶ → uspořádání
- ▶ Relace $<$ na přirozených číslech
 - ▶ není symetrická ani reflexivní
 - ▶ → ani ekvivalence, ani uspořádání
- ▶ Relace na prázdné množině $R(\emptyset)$
 - ▶ je \emptyset (podmnožina $\emptyset \times \emptyset$)
 - ▶ → ekvivalence i uspořádání
 - ▶ (pro všechny prvky prázdné množiny platí kde co)