

# Testování hypotéz o rozdílu průměrů: Analýza rozptylu

---

- logika analýzy rozptylu
  - výpočetní postup
  - mnohonásobná porovnávání
-

# Porovnávání průměrů

---

- t-testy jsou určeny pouze pro porovnávání dvojice průměrů
  - v mnoha výzkumných plánech je však více skupin než dvě
    - např. v příkladu s testováním účinnosti nového léku může být kromě skupin s testovaným lékem a placebem ještě skupina se starým lékem
-

# Porovnávání průměrů

---

- rozdíly mezi více skupinami by sice bylo možné otestovat po dvojicích pomocí t-testu, ale...
    - pravděpodobnosti v tabulce t-rozdělení jsou spočítány za předpokladu, že je prováděno pouze jediné srovnání
    - čím více testů, tím vyšší pravděpodobnost chyby I. druhu (např. pro 3 srovnání je 5% alfa ve skutečnosti 10%, pro 10 srovnání 30% atd.)
-

# Analýza rozptylu

---

- proto je vhodnější místo mnoha t-testů použít jinou statistickou techniku – analýzu rozptylu
  - **analysis of variance** –ANOVA
  - umožňuje otestovat rozdíly mezi průměry více skupin najednou
-

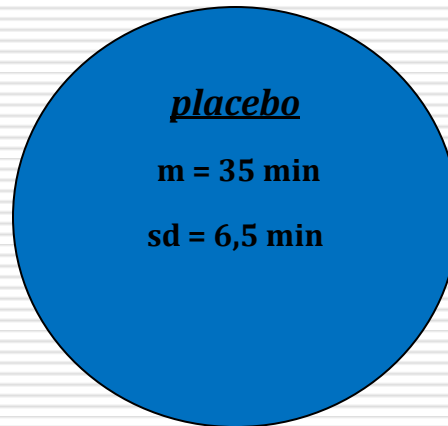
# Logika analýzy rozptylu

---

- analýza rozptylu nevyužívá pro testování rozdílu mezi průměry samotné průměry, ale **rozptyly**
  - počítají se dva odhady:
    - rozptyl uvnitř skupin (within-groups nebo within-subjects variance)
    - rozptyl mezi skupinami (between-groups nebo between-subjects variance)
-

# **Příklad:** ověřování účinnosti léku na bolest hlavy (délka trvání bolesti hlavy po aplikaci přípravku)

---



# Logika analýzy rozptylu

---

- **rozptyl uvnitř skupin** je ukazatel celkové variability uvnitř skupin – tj. jak se od sebe vzájemně liší osoby v rámci jednotlivých skupin
  - **rozptyl mezi skupinami** je měřítkem variability mezi skupinami – tj. jak se od sebe liší skupiny osob
-

# Logika analýzy rozptylu

---

- poměr těchto dvou rozptylů je statistika F

rozptyl mezi skupinami

F = rozptyl uvnitř skupin

---



# Logika analýzy rozptylu

---

- pokud nejsou mezi skupinami rozdíly, pak by měl být rozptyl mezi skupinami a uvnitř skupin velmi podobný (teoreticky shodný -  $F=1$ )
  - pokud jsou mezi skupinami rozdíly, pak budou tyto rozdíly (between) větší než vzájemné rozdíly mezi osobami uvnitř skupin (within)
-

# Logika analýzy rozptylu

---

- je-li  $F > 1$ , pak kromě  $F$  musíme ještě spočítat pravděpodobnost, že bychom takto vysoké získali náhodou (tj. statistickou významnost)
  - tabulka  $F$  rozdělení je vždy pro konkrétní hodnotu alfa; má v řádcích počet stupňů volnosti pro rozptyl uvnitř skupin a ve sloupcích pro rozptyl mezi skupinami
-

# Analýza rozptylu - příklad

---

- v klasickém experimentu testujícím tzv. efekt přihlížejících (bystander effect) zjišťovali Darley a Latane, zda má přítomnost dalších lidí vliv na naši ochotu pomoci někomu v nouzi
  - ZO čekala v místnosti s dalšími 0, 2 nebo 4 osobami
-

# Analýza rozptylu - příklad

---

- experimentátorka odešla něco připravit do vedlejší místnosti a bylo slyšet, že upadla a vykřikla něco o bolesti v kotníku
  - závislou proměnnou byla doba, která uplynula do nabídnutí pomoci experimentátorce (v sekundách)
-

<b><i>Z0 sama</i></b>	<b><i>2 další osoby</i></b>	<b><i>4 další osoby</i></b>
27	30	29
20	35	20
22	20	34
21	31	38
19	29	29
20	30	36
30	20	30
31	22	35
22	21	28
25	38	33
27		33
21		

# Analýza rozptylu - příklad

	<b><i>0 osob</i></b>	<b><i>2 osoby</i></b>	<b><i>4 osoby</i></b>
průměr	<b>23,75</b>	<b>27,60</b>	<b>31,36</b>
směrodatná odchylka	<b>4,11</b>	<b>6,48</b>	<b>4,94</b>
$\Sigma X$	285	276	345
$\Sigma X^2$	6955	7996	11065
n	<b>12</b>	<b>10</b>	<b>11</b>

# Analýza rozptylu

---

- **1. krok** – výpočet celkového rozptylu  
(součtu čtverců – sum of squares)

$$SST (SS_{\text{total}}) = SSB + SSW$$

- $SST = \sum (X - \bar{X})^2$

- výpočetní rovnice

$$SST = \sum X^2 - [(\sum X)^2 / n]$$

---

# Analýza rozptylu - příklad

---

□  $SST = \sum X^2 - [(\sum X)^2/n]$

$$SST = (27^2 + 20^2 + 22^2 + \dots + 33^2) - [(906)^2/33]$$

$$SST = 26016 - 24873,818$$

$$\underline{SST = 1142,182}$$

---



# Analýza rozptylu

---

□ **2. krok** – výpočet rozptylu mezi skupinami SSB ( $SS_{\text{between}}$ )

□  $SSB = \sum n_k (\bar{X}_k - \bar{X})^2$

- $n_k$  je počet osob ve skupině
  - $\bar{X}_k$  je průměr skupiny
-

# Analýza rozptylu - příklad

---

□  $SSB = \sum n_k (\bar{X}_k - \bar{X})^2$

$$SSB = 12 * (23,75 - 27,45)^2 + 10 * (27,60 - 27,45)^2 + 11 * (31,36 - 27,45)^2$$

$$SSB = 12 * (-3,7)^2 + 10 * (0,15)^2 + (11 * 3,91)^2$$

$$\underline{SSB = 332,968}$$

---

# Analýza rozptylu

---

- **3. krok** – výpočet rozptylu uvnitř skupin  $SSW$  ( $SS_{\text{within}}$ )
  
  - $SSW = \sum (X - \bar{X}_k)^2$ 
    - $\bar{X}_k$  je průměr skupiny
  
  - výpočetní rovnice  
 $SSW = SST - SSB$
-

# Analýza rozptylu - příklad

---

□  $SSW = SST - SSB$

$$SSW = 1142,182 - 332,986$$

$$\underline{SSW = 809,196}$$

---

# Analýza rozptylu - příklad

---

- **4. krok** – výpočet stupňů volnosti
  - pro SST:  $df_t = n - 1$  (n je **celkový** počet osob)
    - $df_t = 33 - 1 = 32$
  - pro SSB:  $df_b = k - 1$  (k je počet skupin)
    - $df_b = 3 - 1 = 2$
  - pro SSW:  $df_w = n - k$ 
    - $df_w = 33 - 3 = 30$
-

# Analýza rozptylu - příklad

	<b>Sum of Squares</b>	<b>df</b>	<b>Mean Square</b>	<b>F</b>
<i>between</i>	332,986	2	166,493	6,173
<i>within</i>	809,196	30	26,973	
<i>total</i>	1142,182	32		

rozptyl mezi skupinami

rozptyl uvnitř skupin

# Analýza rozptylu - příklad

---

□  $F = \text{rozptyl mezi} / \text{rozptyl uvnitř}$

$$F = \text{MSB} / \text{MSW}$$

$$F = 166,493 / 26,973$$

$$\mathbf{F = 6,17}$$

□  $F$  je větší než 1, ale jak je pravděpodobné, že by tento výsledek byl náhodný? tj., je  $F$  statisticky významné?

---

# Analýza rozptylu - příklad

---

□  $F(2, 30) = 6,17$

---



**Table D.3 Critical Values of the F Distribution Alpha = .05** (Source: The entries in this table were computed by the author.)

		Degrees of Freedom for Numerator															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	40	50
Degrees of Freedom for Denominator	1	161.4	199.5	215.8	224.8	230.0	233.8	236.5	238.6	240.1	242.1	245.2	248.4	248.9	250.5	250.8	252.6
	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.43	19.44	19.46	19.47	19.48	19.48
	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58
	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70
	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.44
	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.75
	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.32
	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.02
	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80
	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.64
	11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51
	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40
	13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.31
	14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.24
	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.18
	16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.12
	17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.08
	18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.04
	19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00
	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.97
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.91	
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.86	
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.82	
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.76	
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.66	
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.60	
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.56	
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.75	1.66	1.60	1.55	1.50	1.46	
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.72	1.62	1.56	1.52	1.46	1.41	
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.69	1.59	1.53	1.48	1.42	1.38	
1000	3.85	3.01	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84	1.68	1.58	1.52	1.47	1.41	1.36	

**Table D.4 Critical Values of the F Distribution Alpha = .01** (Source: The entries in this table were computed by the author.)

		Degrees of Freedom for Numerator															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	40	50
Degrees of Freedom for Denominator	1	4048	4993	5377	5577	5668	5924	5992	6096	6132	6168	6079	6168	6214	6355	6168	6213
	2	98.50	99.01	99.15	99.23	99.30	99.33	99.35	99.39	99.40	99.43	99.38	99.48	99.43	99.37	99.44	99.59
	3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	26.87	26.69	26.58	26.51	26.41	26.36
	4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.69
	5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.24
	6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.09
	7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.86
	8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.07
	9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.52
	10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.12
	11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.81
	12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.57
	13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.38
	14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.22
	15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.08
	16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.97
	17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.87
	18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.78
	19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.71
	20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.64
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.53	
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.44	
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.36	
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.30	
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.25	
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.06	
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.95	
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.88	
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.19	2.03	1.93	1.86	1.76	1.70	
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.13	1.97	1.87	1.79	1.69	1.63	
500	6.69	4.65	3.82	3.36	3.05	2.84	2.68	2.55	2.44	2.36	2.07	1.92	1.81	1.74	1.63	1.57	
1000	6.67	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34	2.06	1.90	1.79	1.72	1.61	1.54	

# Analýza rozptylu - příklad

---

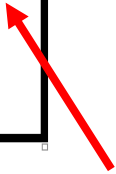
- $F(2, 30) = 6,17$
  - kritická hodnota F pro **5%** hladinu významnosti  
 **$F = 3,32$**
  - kritická hodnota F pro **1%** hladinu významnosti  
 **$F = 5,39$**
  - $F(2, 30) = 6,17$      $p < 0.01$
  
  - **rozdíl mezi průměry  
je statisticky významný  
na 1% hladině významnosti**
-

# Výstup v SPSS

## ANOVA

latence

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	332,986	2	166,493	6,173	,006
Within Groups	809,195	30	26,973		
Total	1142,182	32			



# Předpoklady analýzy rozptylu

---

- měřený znak by měl mít normální rozdělení
  - **homogenita rozptylů skupin-** zda se rozptyly liší, je možno otestovat některým testem pro rozdíl rozptylů, např. Leveneovy testy
    - pokud nevyjde stat. významný, pak rozptyly pokládáme za shodné
-

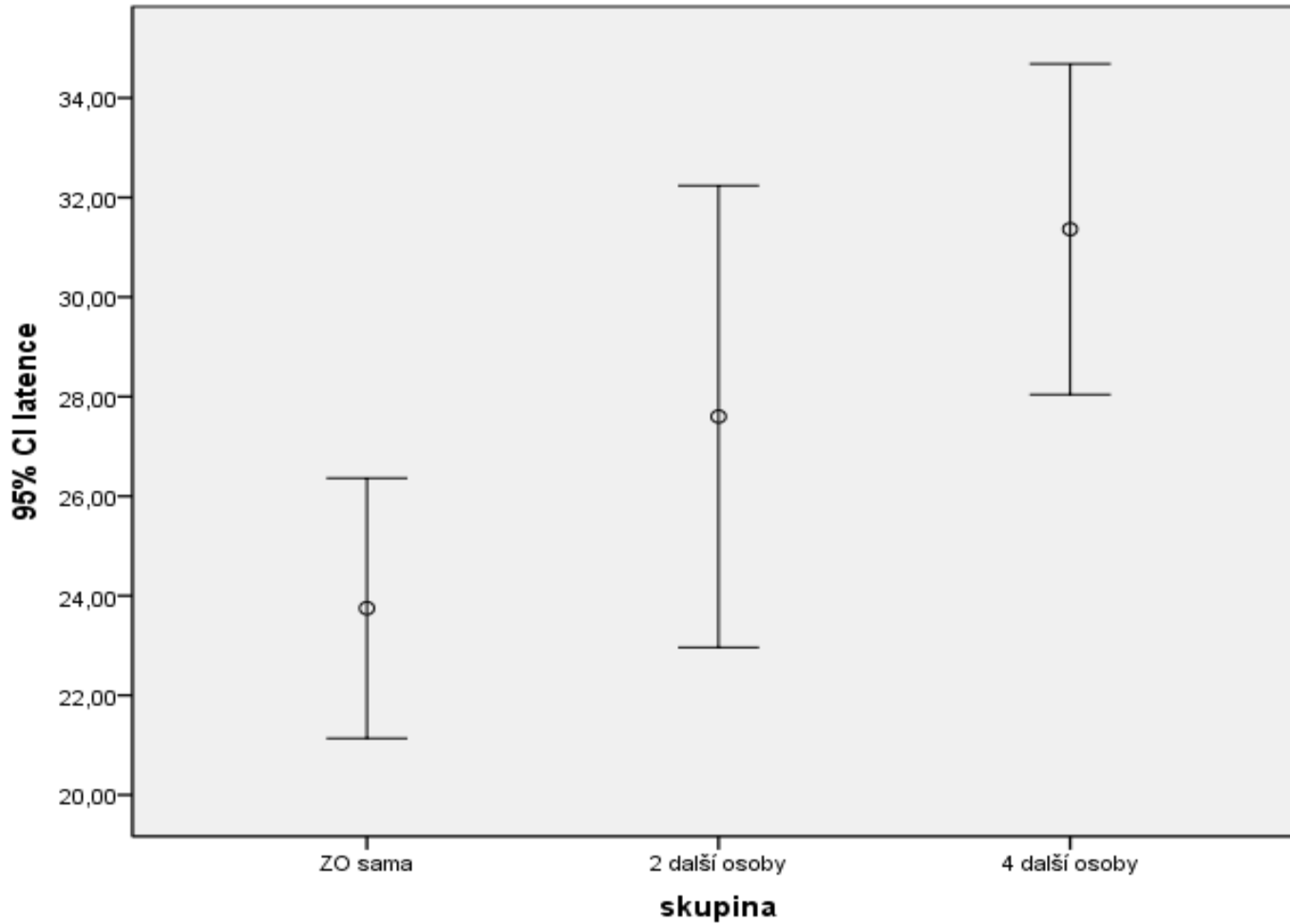
# Mnohonásobná porovnávání

---

- průkaznost  $F$  nám řekne, **zda** existují průkazné rozdíly mezi průměry
  - ale **nedozvíme** se tak, **mezi kterými** skupinami je průkazný rozdíl (která skupina se liší od které)
  - je třeba provést tzv. **mnohonásobná porovnání** (multiple comparisons nebo post-hoc comparisons)
-

# Mnohonásobná porovnávání

---



# Mnohonásobná porovnávání

---

- jde v podstatě o upravené t-testy
    - upravené vzhledem k počtu porovnávání
  - existuje více různých typů mnohonásobných porovnávání, např. Fisherův LSD test, Bonferroniho test, Tukeyho test, Scheffeho test atd.
-



# Mnohonásobná porovnávání

---

- tyto testy jsou si hodně podobné vzorcem pro jejich výpočet
  - liší se však ve způsobu, jak se u nich stanovuje hladina významnosti (Fisherův LSD test je liberálnější, zatímco ostatní uvedené přísnější)
-

# Mnohonásobná porovnávání

---

- pokud bychom tyto testy spočítali u předchozího příkladu, zjistili bychom, že průkazný rozdíl je mezi skupinou osob, které byly v místnosti samy, a skupinou se 4 dalšími lidmi
-

# Mnohonásobná porovnávání

## Multiple Comparisons

latence

Bonferroni

(I) skupina	(J) skupina	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
ZO sama	2 další osoby	-3,85000	2,22375	,281	-9,4889	1,7889
	4 další osoby	-7,61364*	2,16792	,004	-13,1109	-2,1164
2 další osoby	ZO sama	3,85000	2,22375	,281	-1,7889	9,4889
	4 další osoby	-3,76364	2,26923	,323	-9,5178	1,9906
4 další osoby	ZO sama	7,61364*	2,16792	,004	2,1164	13,1109
	2 další osoby	3,76364	2,26923	,323	-1,9906	9,5178

\*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

# Literatura

---

- Hendl, kapitola 9
  - Darley, J. M. & Latané, B. (1968).  
Bystander intervention in  
emergencies: Diffusion of  
responsibility. *Journal of Personality  
and Social Psychology, 8, 377-383.*
-