

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory

I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 60200 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 6

Obsah přednášky

Funkce

Velikost množin

Posloupnosti

Funkce

► Funkce

- speciální typ relace
- tj. všechny funkce jsou současně i relace (naopak ne)

► Alternativní pohled na relaci

- prvních $n-1$ hodnot uspořádané dvojice jsou argumenty relace (vstup)
- poslední hodnota je hodnota funkce (výstup)
- zápis – např.: $(a, b, c) \in + \equiv +(a, b) = c$

► Funkce

- taková relace, kde výstup je jednoznačný

Definice funkce

► Funkce

- taková relace, kde výstup je jednoznačný
- binární relace f na množině A je funkce, pokud platí:
 - $\forall a, b, c \in A ((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \Rightarrow b = c)$
 - \rightarrow **unární funkce je binární relace**
- ternární relace f na množině A je funkce, pokud:
 - $\forall a, b, c, d \in A ((a, b, c) \in f \wedge (a, b, d) \in f \Rightarrow c = d)$
 - \rightarrow **binární funkce je ternární relace**
- podobně funkce více proměnných

Funkce – varianty zápisu

► Často říkáme „funkce z A do B“

- případně „zobrazení z A do B“
- zapisujeme $f : A \rightarrow B$
- tj. podmnožina kartézského součinu $A \times B$
- $A =$ **definiční obor** (vstup), značíme D_f nebo $dom(f)$
- $B =$ **obor hodnot** (výstup), značíme R_f nebo $f(A)$

► Funkční hodnota

- zapisujeme $f(a) = b$
- totéž jako: $(a, b) \in f$
- také „b je obraz prvku a“
- také „a je vzor prvku b“

Vlastnosti funkcí

► Injektivita

- $f : A \rightarrow B$ je injektivní (též prostá), právě tehdy, když
- $\forall a, b \in A (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$
- \rightarrow „žádné dva prvky nemají stejný obraz“

► Surjektivita

- $f : A \rightarrow B$ je surjektivní (též „na“), právě tehdy, když
- $\forall b \in B (\exists a \in A (b = f(a)))$
- \rightarrow „každý prvek oboru hodnot má nějaký vzor“
- \rightarrow „celý obor hodnot je pokrytý“

Vlastnosti funkcí (2)

► Úplnost

- $f : A \rightarrow B$ je úplná, právě tehdy, když
- $\forall a \in A (\exists b \in B (b = f(a)))$
- \rightarrow „každý prvek definičního oboru má nějaký obraz“
- \rightarrow „celý definiční obor je pokrytý“
- pojmem „funkce“ se často myslí úplná funkce

► Bijekce

- $f : A \rightarrow B$ je bijekce, právě tehdy, když je injektivní, surjektivní a úplná
- \rightarrow množiny A a B jsou „stejně velké“

Inverzní funkce

► Inverzní funkce

- pokud $f : A \rightarrow B$ je injektivní, definujeme inverzní funkci
- $f^{-1} : B \rightarrow A$
- $f^{-1}(b) = a \equiv f(a) = b$

Definice velikosti množiny

- ▶ Velikost množiny A : $|A|$
 - ▶ je definována jako přirozené číslo n právě tehdy, pokud existuje bijekce $f : n \rightarrow A$
 - ▶ viz konstrukce přirozených čísel pomocí množin
- ▶ Nekonečné množiny
 - ▶ A je **spočetná** právě tehdy, pokud existuje bijekce $f : \mathbb{N} \rightarrow A$
 - ▶ \rightarrow spočetné množiny mají stejný počet prvků jako přirozená čísla
 - ▶ \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} jsou spočetné množiny
 - ▶ \mathbb{R} (reálná čísla) není spočetná množina
 - ▶ A má **mohutnost kontinua** právě tehdy, pokud existuje bijekce $f : \mathbb{R} \rightarrow A$

Posloupnosti

- ▶ Záleží na pořadí prvků
- ▶ Konečné posloupnosti
 - ▶ = uspořádané n -tice
- ▶ Nekonečné posloupnosti
 - ▶ = funkce na přirozených číslech
 - ▶ $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ je jen jiný zápis $f(0), f(1), \dots, f(n), \dots$
- ▶ Induktivní definice nekonečné posloupnosti
 - ▶ vypíšeme první člen (prvních několik členů)
 - ▶ určíme předpis, podle něhož dostaneme a_n s pomocí a_{n-1} (případně a_{n-2} apod.)

Posloupnosti – příklad

- ▶ Fibonacciho posloupnost
 - ▶ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
 - ▶ $a_0 = 0$
 - ▶ $a_1 = 1$
 - ▶ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$