Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 6

Obsah přednášky

Funkce

- Funkce
  - speciální typ relace
  - tj. všechny funkce jsou současně i relace (naopak ne)
- Alternativní pohled na relaci
  - prvních n-1 hodnot uspořádané dvojice jsou argumenty relace (vstup)
  - poslední hodnota je hodnota funkce (výstup)
  - zápis – např.: $(a, b, c) \in + \equiv +(a, b) = c$
- Funkce
  - taková relace, kde výstup je jednoznačný

Definice funkce

- Funkce
  - taková relace, kde výstup je jednoznačný
  - binární relace f na množině A je funkce, pokud platí:
  - $\forall a, b, c \in A\ (\ (a, b) \in f\ \wedge\ (a, c) \in f \Rightarrow b = c\ )$
  - $\rightarrow$ unární funkce je binární relace
  - ternární relace f na množině A je funkce, pokud:
  - $\forall a, b, c, d \in A\ (\ (a, b, c) \in f\ \wedge\ (a, b, d) \in f \Rightarrow c = d\ )$
  - $\rightarrow$ binární funkce je ternární relace
  - podobně funkce více proměnných

Funkce – varianty zápisu

- Často říkáme ,,funkce z A do B"
  - případně ,,zobrazení z A do B"
  - zapisujeme $f : A \rightarrow B$
  - tj. podmnožina kartézského součinu A x B
  - $A =$ definiční obor (vstup), značíme D_f nebo $dom(f)$
  - $B =$ obor hodnot (výstup), značíme R_f nebo $f(A)$
- Funkční hodnota
  - zapisujeme $f(a) = b$
  - totéž jako: $(a, b) \in f$
  - také ,,b je obraz prvku a"
  - také ,,a je vzor prvku b"

Vlastnosti funkcí

- Injektivita
  - $f : A \rightarrow B$ je injektivní (též prostá), právě tehdy, když
  - $\forall a, b \in A\ (\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b\ )$
  - $\rightarrow$,,žádné dva prvky nemají stejný obraz"
- Surjektivita
  - $f : A \rightarrow B$ je surjektivní (též ,,na"), právě tehdy, když
  - $\forall b \in B\ (\ \exists a \in A\ (b = f(a)\ )$
  - $\rightarrow$,,každý prvek oboru hodnot má nějaký vzor"
  - $\rightarrow$,,celý obor hodnot je pokrytý"

Vlastnosti funkcí (2)

- Úplnost
  - $f : A \rightarrow B$ je úplná, právě tehdy, když
  - $\forall a \in A\ (\ \exists b \in B\ (b = f(a)\ )$
  - $\rightarrow$,,každý prvek definičního oboru má nějaký obraz"
  - $\rightarrow$,,celý definiční obor je pokrytý"
  - pojmem ,,funkce" se často myslí úplná funkce
- Bijekce
  - $f : A \rightarrow B$ je bijekce, právě tehdy, když je injektivní, surjektivní a úplná
  - $\rightarrow$ množiny A a B jsou ,,stejně velké"

Inverzní funkce

- Inverzní funkce
  - pokud $f : A \rightarrow B$ je injektivní, definujeme inverzní funkci
  - $f^{-1} : B \rightarrow A$
  - $f^{-1}(b) = a \equiv f(a) = b$

Definice velikosti množiny

- Velikost množiny A: $|A|$
  - je definována jako přirozené číslo n právě tehdy, pokud existuje bijekce $f : n \to A$
  - viz konstrukce přirozených čísel pomocí množin
- Nekonečné množiny
  - A je spočetná právě tehdy, pokud existuje bijekce $f : N \to A$
  - $\to$ spočetné množiny mají stejný počet prvků jako přirozená čísla
  - N, Z, Q jsou spočetné množiny
  - R (reálná čísla) není spočetná množina
  - A má mohutnost kontinua právě tehdy, pokud existuje bijekce $f : R \to A$

Posloupnosti

- Záleží na pořadí prvků
- Konečné posloupnosti
  - $=$ uspořádané n-tice
- Nekonečné posloupnosti
  - $=$ funkce na přirozených číslech
  - $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ je jen jiný zápis $f(0), f(1), ..., f(n), ...$
- Induktivní definice nekonečné posloupnosti
  - vypíšeme první člen (prvních několik členů)
  - určíme předpis, podle něhož dostaneme a_n s pomocí a_{n-1} (případně a_{n-2} apod.)

Posloupnosti – příklad

- Fibonacciho posloupnost
  - 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
  - $a_0 = 0$
  - $a_1 = 1$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$