

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Matematická logika

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 2

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Obsah přednášky

- 1 Matematická logika
- 2 Výroková logika
- 3 Něco z predikátové logiky
- 4 Matematická indukce

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Matematická logika – motivace

Matematická logika – motivace

- Jazyk matematiky
 - přirozený jazyk je víceznačný
 - „k jednání XY na úřadě YZ potřebujete pas a řidičský průkaz nebo občanský průkaz“
 - matematická fakta potřebujeme zapisovat přesně
- Formalizace pojmu důkaz
 - důkaz = posloupnost elementárních kroků
 - to, co je „elementární“ je individuální
 - logika zavádí přesnou definici elementárního kroku

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Typy logik

Typy logik

- Výroková logika
 - výroky, logické funkce, pravidlo modus ponens
- Predikátová logika
 - predikáty, kvantifikátory
- Další typy logik
 - modální, temporální, fuzzy, intenzionální, ...
 - nebudeme se jimi zabývat
- Naším cílem je naučit se logiku prakticky používat
 - → číst a psát
 - nikoli zkoumat její temná zákoutí (viz předmět „Matematická logika“ na FI)

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Výroková logika

Výroková logika

- Výrok
 - základní jednotka
 - tvrzení, jemuž lze přiřadit pravdivostní hodnotu
 - např. „a = 1“, „4 je prvočíslo“
- Pravdivost
 - přiřazení hodnoty 0 nebo 1 každému výroku
 - zapisujeme $v(A) = 1$ („výrok A platí“)
 - $v(A) = 0$ („výrok A neplatí“)
- Logické funkce
 - konstrukce složitějších výroků z výroků jednodušších

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Logické funkce

Logické funkce (1)

- Základní logické funkce
 - necht' A, B jsou výroky
 - **negace** $\neg A$
 - $v(\neg A) = 0$, je-li $v(A) = 1$
 - $v(\neg A) = 1$, je-li $v(A) = 0$
 - **implikace** $A \Rightarrow B$
 - $v(A \Rightarrow B) = 0$, je-li $v(A) = 1$ a $v(B) = 0$
 - $v(A \Rightarrow B) = 1$ v ostatních případech
 - kombinací těchto funkcí lze vyjádřit všechny ostatní logické funkce

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Logické funkce

Logické funkce (2)

- Odvozené logické funkce
 - **konjunkce** $A \wedge B$ (logické „a“)
 - $v(A \wedge B) = 1$, je-li $v(A) = 1$ a $v(B) = 1$
 - $v(A \wedge B) = 0$ v ostatních případech
 - **disjunkce** $A \vee B$ (logické „nebo“)
 - $v(A \vee B) = 0$, je-li $v(A) = 0$ a $v(B) = 0$
 - $v(A \vee B) = 1$ v ostatních případech
 - **ekvivalence** $A \Leftrightarrow B$
 - $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Odvozování

Odvozování

- Schémata axiomů
 - pro libovolné výroky A, B, C platí
 - $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
 - $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
 - $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
 - dosazením konkrétních výroků vzniknou **axiomy**
- Odvozovací pravidlo modus ponens
 - pokud platí A a platí $A \Rightarrow B$, pak platí B
- Formální definice důkazu
 - posloupnost výroků, z nichž každý je buď axiom nebo výsledek aplikace odvozovacího pravidla na předchozí výroky

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Odvozování

Příklad důkazu: $X \Rightarrow X$

- Schémata axiomů
 - $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
 - $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
 - $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- Dokazujeme, že pro libovolný výrok X platí $X \Rightarrow X$
 - 1 $(X \Rightarrow ((X \Rightarrow X) \Rightarrow X)) \Rightarrow ((X \Rightarrow (X \Rightarrow X)) \Rightarrow (X \Rightarrow X))$ / axiom 2
 - 2 $X \Rightarrow ((X \Rightarrow X) \Rightarrow X)$ / axiom 1
 - 3 $(X \Rightarrow (X \Rightarrow X)) \Rightarrow (X \Rightarrow X)$ / aplikace modus ponens na 2. a 1.
 - 4 $X \Rightarrow (X \Rightarrow X)$ / axiom 1
 - 5 $X \Rightarrow X$ / aplikace modus ponens na 4. a 3.

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Něco z predikátové logiky (1)

- Ohodnocení proměnných
 - formule („výroky“) mohou obsahovat proměnné ($x = 1$)
 - pravdivost pak závisí na ohodnocení, tj. přiřazení hodnot proměnným
- Kvantifikátory
 - \exists – existuje alespoň jedno ohodnocení, při kterém formule platí
 - \forall – výrok platí pro všechna možná ohodnocení
 - např.: $\exists x(x = 0 \wedge x = 1)$

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Něco z predikátové logiky (2)

- Predikáty
 - funkční symboly – vyjadřují fakta o konstantách a proměnných
 - např. $\text{Prime}(x)$ – „ x je prvočíslo“
 - např. $\in(x, Y)$, resp. $x \in Y$ – „prvek x patří do množiny Y “
- Příklady složitějších formulí
 - $\exists x(\exists k(x = 2k + 1) \wedge \exists m(x = 2m))$
 - $\forall x(\text{Prime}(x) \Rightarrow \exists k(x = 2k))$
 - $\exists x(\text{Prime}(x) \wedge \exists k(x = 2k))$
 - dokážete je přecíst?

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Matematická indukce

- Princip
 - potřebujeme dokázat, že pro všechny prvky nějaké posloupnosti x_0, \dots, x_n, \dots platí nějaký výrok A
 - $\forall n(A(x_n))$
 - dokážeme výrok pro x_0
 - \rightarrow **báze indukce**
 - dokážeme, že pokud výrok platí pro x_{i-1} , pak platí i pro x_i pro libovolné i
 - $A(x_{i-1}) \Rightarrow A(x_i)$
 - \rightarrow **indukční krok**
 - levá strana implikace výše se nazývá **indukční předpoklad**

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Příklad indukce

- Dokážeme, že pro všechna přirozená $n \geq 1$ platí:
 - $1 + 2 + \dots + n = n/2 * (1 + n)$
- Báze
 - $1 = 1/2 * (1 + 1)$
- Indukční krok
 - předpokládáme: $1 + 2 + \dots + k = k/2 * (1 + k)$
 - dokážeme:

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = (k + 1)/2 * (1 + (k + 1))$$

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Příklad indukce (2)

- Indukční krok
 - předpokládáme: $1 + 2 + \dots + k = k/2 * (1 + k)$
 - dokážeme:

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = (k + 1)/2 * (1 + (k + 1))$$
 - $1 + 2 + \dots + k + (k + 1)$
 - $k/2 * (1 + k) + (k + 1)$
 - $(k + k^2)/2 + (k + 1)$
 - $(k + k^2 + 2k + 2)/2$
 - $(k^2 + 3k + 2)/2$
 - $(k + 2) * (k + 1)/2$
 - $(k + 1)/2 * (k + 2)$
 - $(k + 1)/2 * (1 + (k + 1))$

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Korektnost matematické indukce

Proč to funguje?

- Intuitivní ověření korektnosti
 - báze \rightarrow platí $A(x_0)$
 - indukční krok \rightarrow platí $(A(x_0) \Rightarrow A(x_1))$
 - modus ponens \rightarrow platí i $A(x_1)$
 - indukční krok \rightarrow platí $(A(x_1) \Rightarrow A(x_2))$
 - modus ponens \rightarrow platí i $A(x_2)$
 - atd. ad infinitum
- Formální důkaz korektnosti matematické indukce
 - existuje, ale nad rámec předmětu

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Obsah přednášky Matematika logika Výroková logika Něco z predikátové logiky Matematická indukce

Složitější typy indukce

Složitější typy indukce (1)

- Složitější indukční předpoklad
 - např. platí $A(x_{i-1})$ i $A(x_{i-2})$
 - musíme dokázat odpovídající bázi
 - tj. $A(x_0)$ i $A(x_1)$
- Induktivní definice
 - umožňují popsat potenciálně nekonečné struktury
 - př.: definice číselných výrazů se sčítáním a násobením
 - číslo je výraz
 - $(x + y)$, kde x a y jsou výrazy, je výraz
 - $(x * y)$, kde x a y jsou výrazy, je výraz

Pavel Rychlý, Vojtěch Kovář FI MU Brno
PLIN004

Složitější typy indukce (2)

■ Strukturální indukce

- aplikujeme na induktivně definované objekty (např. výrazy)
- báze indukce: výrok platí pro čísla
- indukční krok 1: výrok platí pro x a $y \Rightarrow$ platí i pro $(x + y)$
- indukční krok 2: výrok platí pro x a $y \Rightarrow$ platí i pro $(x * y)$
- Princip zůstává stejný, pouze vedení důkazu je komplikovanější
- Důkaz, že každý výraz podle definice výše má sudý počet závorek?

Všichni koně mají stejnou barvu

- **Věta:** V každém stádě mají všichni koně stejnou barvu.
- **Důkaz:** indukcí vzhledem k velikosti stáda
 - **báze:** Ve stádě o 1 koni mají všichni stejnou barvu.
 - **indukční krok:** Předp., že věta platí pro dvě stáda o $n - 1$ koních; dokážeme, že platí pro stádo o velikosti n
 - $S_1 = \{K_1, \dots, K_{n-1}\}$, $S_2 = \{K_2, \dots, K_n\}$
 - podle I. P. mají v S_1 i v S_2 všichni koně stejnou barvu
 - koně K_2, \dots, K_{n-1} jsou v obou stádech \Rightarrow i barva obou stád je stejná
 - tedy i ve stádě $S = \{K_1, \dots, K_n\}$ mají všichni koně stejnou barvu
- Kde je problém?
 - (všichni studenti oboru PLIN mají stejné pohlaví?)