

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 60200 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 5

Obsah přednášky

Uspořádané dvojice, n-tice

Relace

Rozklad podle ekvivalence

Celá čísla

Uspořádaná dvojice

- ▶ (a, b)
 - ▶ má první a druhý prvek
 - ▶ \rightarrow na rozdíl od množiny **záleží na pořadí prvků**
- ▶ Definice pomocí množin
 - ▶ $(a, b) \equiv \{\{a\}, \{a, b\}\}$
 - ▶ takto jednoznačně rozlišíme, který z prvků je první
 - ▶ jsou možné i jiné definice? Jaké?
- ▶ Uspořádané n-tice (kde n je přirozené)
 - ▶ trojice $(a, b, c) \equiv (a, (b, c))$
 - ▶ obecně $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \equiv (a_1, (a_2, (a_3, (\dots, a_n))))$
 - ▶ (funguje jen pro konečné n)

Kartézský součin

- ▶ Kartézský součin dvou množin A, B
 - ▶ $A \times B \equiv \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
 - ▶ \rightarrow množina uspořádaných dvojic prvků z A a B
- ▶ Kartézský součin více množin
 - ▶ analogicky – obsahuje uspořádané n-tice
 - ▶ $A \times B \times C \equiv \{(a, b, c) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$
 - ▶ podobně pro větší n

Relace

- ▶ Motivace
 - ▶ způsob, jak v matematice svázat dvě hodnoty (případně více)
 - ▶ vyjadřujeme, že objekty (množiny) v relaci mají něco společného
- ▶ Binární relace
 - ▶ množina uspořádaných dvojic
 - ▶ \rightarrow podmnožina kartézského součinu
- ▶ n-ární relace
 - ▶ množina uspořádaných n-tic

Relace

- ▶ Často říkáme „relace na množině A “
 - ▶ tzn. podmnožina součinu $A \times A$
 - ▶ resp. $A \times A \times \dots \times A$
- ▶ Přehledný zápis binárních relací
 - ▶ tabulkou
 - ▶ grafem

Relace – příklady

- ▶ Relace identity na množině A
 - ▶ $Id(A)$ – binární relace
 - ▶ $Id(A) = \{(a, a) \in A \times A \mid a \in A\}$
- ▶ Relace větší nebo rovno na přirozených číslech
 - ▶ $\geq(N)$ – binární relace
 - ▶ $\geq(N) = \{(a, b) \in N \times N \mid b \leq a\}$
 - ▶ (podle množinové konstrukce přirozených čísel – viz minulá přednáška)
- ▶ Relace plus na přirozených číslech
 - ▶ $+(N)$ – ternární relace
 - ▶ $+(N) = \{(a, b, c) \in N \times N \times N \mid a + b = c\}$
 - ▶ $a + b = c$ je jen jiný zápis pro $(a, b, c) \in +(N)$
 - ▶ \rightarrow všechny operace na číslech jsou relace

Vlastnosti binárních relací

- ▶ Už jste se s nimi setkali jinde
- ▶ Reflexivita
 - ▶ $R(A)$ je reflexivní, právě tehdy, když
 - ▶ $\forall a \in A ((a, a) \in R)$
- ▶ Symetrie
 - ▶ $R(A)$ je symetrická, právě tehdy, když
 - ▶ $\forall a, b \in A ((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R)$
- ▶ Antisymetrie
 - ▶ $R(A)$ je antisymetrická, právě tehdy, když
 - ▶ $\forall a, b \in A ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b)$

Vlastnosti binárních relací (2)

- ▶ **Tranzitivita**
 - ▶ $R(A)$ je tranzitivní, právě tehdy, když
 - ▶ $\forall a, b, c \in A ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R)$
- ▶ **Ekvivalence**
 - ▶ $R(A)$ je ekvivalence, právě tehdy, když je současně reflexivní, symetrická i tranzitivní
- ▶ **Uspořádání**
 - ▶ $R(A)$ je uspořádání, právě tehdy, když je současně reflexivní, antisymetrická i tranzitivní

Vlastnosti binárních relací – příklady

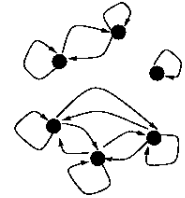
- ▶ **Identita na libovolné množině**
 - ▶ splňuje všechny výše uvedené vlastnosti
 - ▶ \rightarrow **ekvivalence i uspořádání**
- ▶ **Relace \leq na přirozených číslech**
 - ▶ není symetrická
 - ▶ \rightarrow **uspořádání**
- ▶ **Relace $<$ na přirozených číslech**
 - ▶ není symetrická ani reflexivní
 - ▶ \rightarrow **ani ekvivalence, ani uspořádání**
- ▶ **Relace na prázdné množině $R(\emptyset)$**
 - ▶ je \emptyset (podmnožina $\emptyset \times \emptyset$)
 - ▶ \rightarrow **ekvivalence i uspořádání**
 - ▶ (pro všechny prvky prázdné množiny platí kde co)

Další příklady relací

- ▶ **Diskutujte jejich vlastnosti**
 - ▶ pro malé množiny je zkuste zakreslit
- ▶ Relace „sedí vedle“ na přítomných studentech
- ▶ Relace „sedí ve stejné řadě jako“ na přítomných studentech
- ▶ Relace „je dělitelem“ na přirozených číslech
- ▶ Relace „krát“ (*) na přirozených číslech
- ▶ Relace „má stejný zbytek po vydělení 2“ na přirozených číslech

Ekvivalence a rozklad

- ▶ **Ekvivalence na množině A**
 - ▶ reflexivní, symetrická, tranzitivní
 - ▶ díky těmto vlastnostem vytvoří „ostrůvky“
 - ▶ \rightarrow podmnožiny, v nichž každý prvek je v relaci s každým
 - ▶ \rightarrow žádný prvek není v relaci s žádným prvkem z jiné podmnožiny
- ▶ **Rozklad podle ekvivalence**
 - ▶ množina těchto „ostrůvků“



Ekvivalence a rozklad

- ▶ **Třída ekvivalence**
 - ▶ „jeden ostrůvek“
 - ▶ $A_x = \{a \in A \mid (a, x) \in R\}$
- ▶ **Rozklad množiny A podle ekvivalence R**
 - ▶ $A/R = \{A_x \mid x \in A\}$

Definice celých čísel

- ▶ **Uvažujme množinu dvojic přirozených čísel ...**
 - ▶ $D = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$
- ▶ ... spolu s ekvivalencí R
 - ▶ $((a, b), (c, d)) \in R \iff a + d = b + c$
- ▶ **Uvažujme rozklad podle této ekvivalence**
 - ▶ třídy rozkladu jsou $D_{a,b} = \{(x, y) \mid ((x, y), (a, b)) \in R\}$
 - ▶ rozklad D/R odpovídá množině $\{D_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$
- ▶ **Tento rozklad je konstrukcí celých čísel \mathbb{Z}**
 - ▶ každá třída $D_{a,b}$ odpovídá číslu $a - b$

Náměty k přemýšlení

- ▶ **Jak bude vypadat definice operací $+$ a $*$ na celých číslech?**
 - ▶ **nápověda:** s využitím příslušných operací nad přirozenými čísly
- ▶ **Jak bude vypadat definice operace odečítání na celých číslech?**
 - ▶ **nápověda:** s využitím operace $+$
- ▶ **Jak by vypadala definice racionálních čísel**
 - ▶ **nápověda:** použijeme podobnou konstrukci jako v případě celých čísel
 - ▶ místo sčítání bude násobení
 - ▶ příslušná třída rozkladu bude odpovídat podílu
 - ▶ opět zkuste přemýšlet o definicích operací $+$, $*$, $-$, $/$