Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic

{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 8

Obsah přednášky

Kombinatorika

- Motivace
  - vědět kolik možností (situací) může nastat
  - umožňuje výpočet pravděpodobností
- Znáte ze SŠ
  - kombinační čísla, faktoriály
  - vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)
- Cíl přednášky
  - odnaučit se vzorečky
  - řešit kombinatorické problémy „úvahou" (selským rozumem)

Kombinatorika

- Motivace
  - vědět kolik možností (situací) může nastat
  - umožňuje výpočet pravděpodobností
- Znáte ze SŠ
  - kombinační čísla, faktoriály
  - vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)
- Cíl přednášky
  - odnaučit se vzorečky
  - řešit kombinatorické problémy „úvahou” (selským rozumem)

Kombinatorika

- Motivace
  - vědět kolik možností (situací) může nastat
  - umožňuje výpočet pravděpodobností
- Znáte ze SŠ
  - kombinační čísla, faktoriály
  - vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)
- Cíl přednášky
  - odnaučit se vzorečky
  - řešit kombinatorické problémy „úvahou" (selským rozumem)

Kombinatorika

- Motivace
  - vědět kolik možností (situací) může nastat
  - umožňuje výpočet pravděpodobností
- Znáte ze SŠ
  - kombinační čísla, faktoriály
  - vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)
- Cíl přednášky
  - odnaučit se vzorečky
  - řešit kombinatorické problémy „úvahou" (selským rozumem)

Kombinatorika

- Motivace
  - vědět kolik možností (situací) může nastat
  - umožňuje výpočet pravděpodobností
- Znáte ze SŠ
  - kombinační čísla, faktoriály
  - vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)
- Cíl přednášky
  - odnaučit se vzorečky
  - řešit kombinatorické problémy „úvahou" (selským rozumem)

Kombinatorika

- Motivace
  - vědět kolik možností (situací) může nastat
  - umožňuje výpočet pravděpodobností
- Znáte ze SŠ
  - kombinační čísla, faktoriály
  - vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)
- Cíl přednášky
  - odnaučit se vzorečky
  - řešit kombinatorické problémy „úvahou" (selským rozumem)

Kombinatorika

- Motivace
  - vědět kolik možností (situací) může nastat
  - umožňuje výpočet pravděpodobností
- Znáte ze SŠ
  - kombinační čísla, faktoriály
  - vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)
- Cíl přednášky
  - odnaučit se vzorečky
  - řešit kombinatorické problémy „úvahou" (selským rozumem)

Kombinatorika

- Motivace
  - vědět kolik možností (situací) může nastat
  - umožňuje výpočet pravděpodobností
- Znáte ze SŠ
  - kombinační čísla, faktoriály
  - vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)
- Cíl přednášky
  - odnaučit se vzorečky
  - řešit kombinatorické problémy „úvahou" (selským rozumem)

Kombinatorika

- Motivace
  - vědět kolik možností (situací) může nastat
  - umožňuje výpočet pravděpodobností
- Znáte ze SŠ
  - kombinační čísla, faktoriály
  - vzorečky pro variace, kombinace, permutace (s opakováním nebo bez, ...)
- Cíl přednášky
  - odnaučit se vzorečky
  - řešit kombinatorické problémy „úvahou" (selským rozumem)

Základní kombinatorická pravidla

- Pravidlo součtu
  - pro disjunktní množiny $A_1, A_2, \dots, A_n$ o velikostech $p_1, p_2, \dots, p_n$
  - množina $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \dots + p_n$
- Pravidlo součinu
  - počet všech uspořádaných k-tic, takových, že
  - 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, ..., k-tý člen n_k způsoby
  - je $n_1 * n_2 * \dots * n_k$

Základní kombinatorická pravidla

- Pravidlo součtu
  - pro disjunktní množiny $A_1, A_2, \dots, A_n$ o velikostech $p_1, p_2, \dots, p_n$
  - množina $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \dots + p_n$
- Pravidlo součinu
  - počet všech uspořádaných k-tic, takových, že
  - 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, …, k-tý člen n_k způsoby
  - je $n_1 * n_2 * \dots * n_k$

Základní kombinatorická pravidla

- Pravidlo součtu
  - pro disjunktní množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o velikostech $p_1, p_2, \ldots, p_n$
  - množina $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$
- Pravidlo součinu
  - počet všech uspořádaných k-tic, takových, že
  - 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, ..., k-tý člen n_k způsoby
  - je $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$

Základní kombinatorická pravidla

- Pravidlo součtu
  - pro disjunktní množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o velikostech $p_1, p_2, \ldots, p_n$
  - množina $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$
- Pravidlo součinu
  - počet všech uspořádaných k-tic, takových, že
  - 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, …, k-tý člen n_k způsoby
  - je $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$

Základní kombinatorická pravidla

- Pravidlo součtu
  - pro disjunktní množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o velikostech $p_1, p_2, \ldots, p_n$
  - množina $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$
- Pravidlo součinu
  - počet všech uspořádaných k-tic, takových, že
  - 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, ..., k-tý člen n_k způsoby
  - je $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$

Základní kombinatorická pravidla

- Pravidlo součtu
  - pro disjunktní množiny $A_1, A_2, \dots, A_n$ o velikostech $p_1, p_2, \dots, p_n$
  - množina $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \dots + p_n$
- Pravidlo součinu
  - počet všech uspořádaných k-tic, takových, že
  - 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, …, k-tý člen n_k způsoby
  - je $n_1 * n_2 * \dots * n_k$

Základní kombinatorická pravidla

- Pravidlo součtu
  - pro disjunktní množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o velikostech $p_1, p_2, \ldots, p_n$
  - množina $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ má velikost $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$
- Pravidlo součinu
  - počet všech uspořádaných k-tic, takových, že
  - 1. člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, ..., k-tý člen n_k způsoby
  - je $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$

Pravděpodobnost

- Už znáte ze SŠ
  - pravděpodobnost jevu A je podíl m/n
  - kde m je počet situací, kdy jev A nastal
  - kde n je počet všech možných situací

Pravděpodobnost

- Už znáte ze SŠ
  - pravděpodobnost jevu A je podíl m/n
  - kde m je počet situací, kdy jev A nastal
  - kde n je počet všech možných situací

Pravděpodobnost

- Už znáte ze SŠ
  - pravděpodobnost jevu A je podíl m/n
  - kde m je počet situací, kdy jev A nastal
  - kde n je počet všech možných situací

Pravděpodobnost

- Už znáte ze SŠ
  - pravděpodobnost jevu A je podíl m/n
  - kde m je počet situací, kdy jev A nastal
  - kde n je počet všech možných situací

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
  - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
  - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
  - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
  - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
  - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
  - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
  - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
  - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
  - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
  - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
  - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
  - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
  - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
  - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
  - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
  - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
  - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
  - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
  - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
  - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
  - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
  - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
  - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
  - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 1: Tři po sobě jdoucí hody mincemi (záleží na pořadí)
- Kolik různých výsledků můžeme dostat?
    - pravidlo součinu: $2 * 2 * 2 = 8$
- Jaká je pravděpodobnost, že nám padne aspoň dvakrát panna?
    - počet možností, kdy padne panna aspoň dvakrát?
    - 4 (p-p-p, p-p-o, p-o-p, o-p-p)
    - $\rightarrow 4/8 = 0.5$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu {1, 2, ..., n} ?
  - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n-1$ prvků atd.
  - pravidlo součinu: $n*(n-1)*(n-2)*...=n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
  - počet všech uspořádání: 6!
  - ale některá uspořádání jsou identická
  - vždy můžeme prohodit obě jedničky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 2
  - vždy můžeme prohodit všechny trojky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 6 (= 3!, počet možných seřazení 3 prvků)
  - $\rightarrow$ výsledek: $6!/12=60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu {1, 2, ..., n} ?
  - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n-1$ prvků atd.
  - pravidlo součinu: $n*(n-1)*(n-2)*\ldots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
  - počet všech uspořádání: 6!
  - ale některá uspořádání jsou identická
  - vždy můžeme prohodit obě jedničky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 2
  - vždy můžeme prohodit všechny trojky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 6 (= 3!, počet možných seřazení 3 prvků)
  - $\rightarrow$ výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu {1, 2, ..., n} ?
  - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n-1$ prvků atd.
  - pravidlo součinu: $n * (n-1) * (n-2) * \ldots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
  - počet všech uspořádání: 6!
  - ale některá uspořádání jsou identická
  - vždy můžeme prohodit obě jedničky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 2
  - vždy můžeme prohodit všechny trojky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 6 ($= 3!$, počet možných seřazení 3 prvků)
  - $\rightarrow$ výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu {1, 2, ..., n} ?
  - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n-1$ prvků atd.
  - pravidlo součinu: $n * (n-1) * (n-2) * \ldots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
  - počet všech uspořádání: 6!
  - ale některá uspořádání jsou identická
  - vždy můžeme prohodit obě jedničky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 2
  - vždy můžeme prohodit všechny trojky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 6 ($= 3!$, počet možných seřazení 3 prvků)
  - $\rightarrow$ výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu {1, 2, ..., n} ?
  - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n-1$ prvků atd.
  - pravidlo součinu: $n * (n-1) * (n-2) * \ldots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
  - počet všech uspořádání: 6!
  - ale některá uspořádání jsou identická
  - vždy můžeme prohodit obě jedničky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 2
  - vždy můžeme prohodit všechny trojky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 6 (= 3!, počet možných seřazení 3 prvků)
  - $\rightarrow$ výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu {1, 2, ..., n} ?
  - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n-1$ prvků atd.
  - pravidlo součinu: $n*(n-1)*(n-2)*...=n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
  - počet všech uspořádání: 6!
  - ale některá uspořádání jsou identická
  - vždy můžeme prohodit obě jedničky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 2
  - vždy můžeme prohodit všechny trojky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 6 ($=3!$, počet možných seřazení 3 prvků)
  - $\rightarrow$ výsledek: $6!/12=60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu {1, 2, ..., n} ?
  - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n-1$ prvků atd.
  - pravidlo součinu: $n * (n-1) * (n-2) * \ldots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
  - počet všech uspořádání: 6!
  - ale některá uspořádání jsou identická
  - vždy můžeme prohodit obě jedničky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 2
  - vždy můžeme prohodit všechny trojky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 6 (= 3!, počet možných seřazení 3 prvků)
  - $\rightarrow$ výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu {1, 2, ..., n} ?
  - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n-1$ prvků atd.
  - pravidlo součinu: $n*(n-1)*(n-2)*\ldots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
  - počet všech uspořádání: 6!
  - ale některá uspořádání jsou identická
  - vždy můžeme prohodit obě jedničky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 2
  - vždy můžeme prohodit všechny trojky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 6 ($= 3!$, počet možných seřazení 3 prvků)
  - $\rightarrow$ výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu {1, 2, ..., n} ?
  - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n-1$ prvků atd.
  - pravidlo součinu: $n * (n-1) * (n-2) * ... = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
  - počet všech uspořádání: 6!
  - ale některá uspořádání jsou identická
  - vždy můžeme prohodit obě jedničky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 2
  - vždy můžeme prohodit všechny trojky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 6 ($= 3!$, počet možných seřazení 3 prvků)
  - $\rightarrow$ výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu {1, 2, ..., n} ?
  - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n-1$ prvků atd.
  - pravidlo součinu: $n * (n-1) * (n-2) * \ldots = n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
  - počet všech uspořádání: 6!
  - ale některá uspořádání jsou identická
  - vždy můžeme prohodit obě jedničky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 2
  - vždy můžeme prohodit všechny trojky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 6 (= 3!, počet možných seřazení 3 prvků)
  - $\rightarrow$ výsledek: $6!/12 = 60$

Příklady

- Př. 2: Kolika způsoby lze seřadit množinu {1, 2, ..., n} ?
  - první prvek vybíráme z n prvků, druhý z $n-1$ prvků atd.
  - pravidlo součinu: $n*(n-1)*(n-2)*\ldots=n!$
- Př. 3: Kolik je různých posloupností s prvky 1, 1, 2, 3, 3, 3 ?
  - počet všech uspořádání: 6!
  - ale některá uspořádání jsou identická
  - vždy můžeme prohodit obě jedničky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 2
  - vždy můžeme prohodit všechny trojky
  - $\rightarrow$ počet možností podělíme 6 (= 3!, počet možných seřazení 3 prvků)
  - $\rightarrow$ výsledek: $6!/12=60$