Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 7

Obsah přednášky

Formální lingvistika

- Matematické modely jazyka
  - jazyk = množina slov nad nějakou abecedou
  - prvky abecedy mohou být znaky, slova, ...
  - původně navrženy k popisu přirozených jazyků
  - dnes rozlišujeme tzv. formální jazyky
- Cíl přednášky
  - seznámit se se základními konstrukcemi teorie formálních jazyků
  - $\rightarrow$ schopnost používat je v dalších kurzech

Formální lingvistika – základní pojmy

- abeceda
  - množina symbolů Σ (např. $\{a, b\}$)
- slovo
  - libovolná konečná posloupnost prvků Σ
  - např. $aabab$
- délka slova $|v|$
  - počet prvků této posloupnosti
  - např. $|aabab| = 5$
- prázdné slovo ϵ
  - slovo nulové délky

Formální lingvistika – základní pojmy (II)

- množina Σ^*
  - množina všech slov nad abecedou Σ
  - např. $\{a, b\}^* = \{\epsilon, a, b, aa, bb, ab, ba, aab, abb, \ldots\}$
- operace zřetězení slov „."
  - pro slova u, v: $u.v = uv$
  - např. $aab.ab = aabab$
- mocnina slova u^i
  - definována induktivně: $u^0 = \epsilon; u^{i+1} = u.u^i$
  - např. $(ab)^3 = ababab$
- Jazyk
  - množina (některých) slov nad danou abecedou
  - pro každý jazyk L platí $L \subseteq \Sigma^*$

Formální lingvistika – základní pojmy (III)

- zřetězení jazyků
  - $L_1.L_2 = \{u.v \mid u \in L_1 \wedge v \in L_2\}$
- podobně i další operace nad jazyky

Formální gramatika

- Čtveřice (N, Σ, P, S)
  - N – množina neterminálů
  - Σ – množina terminálů (symbolů abecedy)
  - $\rightarrow N \cap \Sigma = \emptyset$
  - $\rightarrow N \cup \Sigma$ označíme V (množina symbolů)
  - $P \subseteq (V^*.N.V^*)x(V^*)$ – množina pravidel
  - S – počáteční symbol gramatiky
- Pravidla gramatiky
  - (α, β) zapisujeme jako $\alpha \rightarrow \beta$
  - α, β jsou slova nad V (řetězce terminálů a neterminálů)
  - kde α obsahuje alespoň jeden neterminál

Odvození z gramatiky

- Gramatika je model, který generuje jazyk
  - začneme počátečním neterminálem
  - používáme pravidla gramatiky jako přepisovací systém
  - $\rightarrow$ tj. levou stranu pravidla nahradíme pravou
  - přepisujeme tak dlouho, dokud nedostaneme řetězec terminálů
- Vztah jazyka a gramatiky
  - gramatika G generuje jazyk L, pokud existuje odvození každého slova jazyka L z gramatiky G
  - značíme $L(G)$

Odvození z gramatiky – příklad

- Gramatika
  - $\Sigma = \{a, b\}, N = \{S, A\}$
  - $P = \{ \quad S \to A, \qquad A \to AA, \qquad A \to a \quad \}$
- Příklady odvození
  - $S \Rightarrow A \Rightarrow a$
  - $S \Rightarrow A \Rightarrow AA \Rightarrow aA \Rightarrow aAA \Rightarrow aaA \Rightarrow aaa$
  - kolik slov obsahuje jazyk generovaný touto gramatikou?

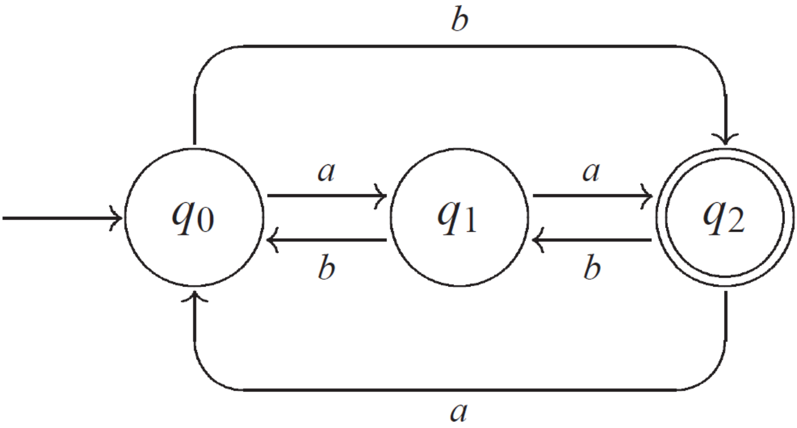
Chomského hierarchie gramatik

- Typy gramatik podle omezení na pravidla
- typ 0
    - žádná omezení
- typ 1
    - pro každé pravidlo $\alpha \to \beta$ je $|\alpha| \leq |\beta|$
    - též kontextová gramatika
- typ 2
    - každé pravidlo je tvaru $A \to \beta$ $(A \in N)$
    - též bezkontextová gramatika
- typ 3
    - každé pravidlo je tvaru $A \to aB$ nebo $A \to a$ $(A, B \in N; a \in \Sigma)$
    - též regulární gramatika

Konečný automat

- Jiný model charakterizující jazyky
- Pětice $(Q, \Sigma, \delta, q_0 F)$
    - Q – neprázdná konečná množina stavů
    - Σ – konečná množina vstupních symbolů (abeceda)
    - $\delta : Qx\Sigma \rightarrow Q$ – přechodová funkce
    - q_0 – počáteční stav
    - F – množina koncových stavů
- Automat necháváme běžet nad vstupním slovem
    - začneme v počátečním stavu
    - podle dalšího symbolu na vstupu a aktuálního stavu se přesuneme do jiného stavu
    - opakujeme, dokud není slovo dočteno do konce

Konečný automat



Automaty a jazyky

- Automaty a jazyky
  - automat akceptuje slovo, pokud po jeho zpracování skončí v akceptujícím stavu
  - automat akceptuje jazyk, pokud akceptuje právě slova jazyka
- Automaty a gramatiky
  - pro každou regulární gramatiku G existuje automat, který akceptuje jazyk $L(G)$ (důkaz existuje :))
  - platí i naopak $\rightarrow$ ekvivalentní formalismy
- Co se nevešlo
  - existují i další typy automatů
  - některé ekvivalentní s jinými typy gramatik
  - např. zásobníkový automat, Turingův stroj