

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 60200 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 7

Obsah přednášky

Formální lingvistika

Formální gramatika

Konečný automat

Formální lingvistika

- ▶ Matematické modely jazyka
 - ▶ jazyk = množina slov nad nějakou abecedou
 - ▶ prvky abecedy mohou být znaky, slova, ...
 - ▶ původně navrženy k popisu přirozených jazyků
 - ▶ dnes rozlišujeme tzv. **formální jazyky**
- ▶ Cíl přednášky
 - ▶ seznámit se se základními konstrukcemi teorie formálních jazyků
 - ▶ → schopnost používat je v dalších kurzech

Formální lingvistika – základní pojmy

- ▶ abeceda
 - ▶ množina symbolů Σ (např. $\{a, b\}$)
- ▶ slovo
 - ▶ libovolná konečná posloupnost prvků Σ
 - ▶ např. *aabab*
- ▶ délka slova $|v|$
 - ▶ počet prvků této posloupnosti
 - ▶ např. $|aabab| = 5$
- ▶ prázdné slovo ϵ
 - ▶ slovo nulové délky

Formální lingvistika – základní pojmy (II)

- ▶ množina Σ^*
 - ▶ množina všech slov nad abecedou Σ
 - ▶ např. $\{a, b\}^* = \{\epsilon, a, b, aa, bb, ab, ba, aab, abb, \dots\}$
- ▶ operace zřetězení slov „...“
 - ▶ pro slova u, v : $u.v = uv$
 - ▶ např. $aab.ab = aabab$
- ▶ mocnina slova u^i
 - ▶ definována induktivně: $u^0 = \epsilon$; $u^{i+1} = u.u^i$
 - ▶ např. $(ab)^3 = ababab$
- ▶ Jazyk
 - ▶ množina (některých) slov nad danou abecedou
 - ▶ pro každý jazyk L platí $L \subseteq \Sigma^*$

Formální lingvistika – základní pojmy (III)

- ▶ zřetězení jazyků
 - ▶ $L_1.L_2 = \{u.v \mid u \in L_1 \wedge v \in L_2\}$

- ▶ podobně i další operace nad jazyky

Formální gramatika

- ▶ Čtveřice (N, Σ, P, S)
 - ▶ N – množina neterminálů
 - ▶ Σ – množina terminálů (symbolů abecedy)
 - ▶ $\rightarrow N \cap \Sigma = \emptyset$
 - ▶ $\rightarrow N \cup \Sigma$ označíme V (množina symbolů)
 - ▶ $P \subseteq (V^*.N.V^*) \times (V^*)$ – množina pravidel
 - ▶ S – počáteční symbol gramatiky
- ▶ Pravidla gramatiky
 - ▶ (α, β) zapisujeme jako $\alpha \rightarrow \beta$
 - ▶ α, β jsou slova nad V (řetězce terminálů a neterminálů)
 - ▶ kde α obsahuje alespoň jeden neterminál

Odvození z gramatiky

- ▶ Gramatika je model, který generuje jazyk
 - ▶ začneme počátečním neterminálem
 - ▶ používáme pravidla gramatiky jako přepisovací systém
 - ▶ \rightarrow tj. levou stranu pravidla nahradíme pravou
 - ▶ přepisujeme tak dlouho, dokud nedostaneme řetězec terminálů
- ▶ Vztah jazyka a gramatiky
 - ▶ **gramatika G generuje jazyk L** , pokud existuje odvození každého slova jazyka L z gramatiky G
 - ▶ značíme $L(G)$

Odvození z gramatiky – příklad

▶ Gramatika

- ▶ $\Sigma = \{a, b\}, N = \{S, A\}$
- ▶ $P = \{ S \rightarrow A, A \rightarrow AA, A \rightarrow a \}$

▶ Příklady odvození

- ▶ $S \Rightarrow A \Rightarrow a$
- ▶ $S \Rightarrow A \Rightarrow AA \Rightarrow aA \Rightarrow aAA \Rightarrow aaA \Rightarrow aaa$
- ▶ kolik slov obsahuje jazyk generovaný touto gramatikou?

Chomského hierarchie gramatik

▶ Typy gramatik podle omezení na pravidla

▶ typ 0

- ▶ žádná omezení

▶ typ 1

- ▶ pro každé pravidlo $\alpha \rightarrow \beta$ je $|\alpha| \leq |\beta|$
- ▶ též **kontextová gramatika**

▶ typ 2

- ▶ každé pravidlo je tvaru $A \rightarrow \beta$ ($A \in N$)
- ▶ též **bezkontextová gramatika**

▶ typ 3

- ▶ každé pravidlo je tvaru $A \rightarrow aB$ nebo $A \rightarrow a$ ($A, B \in N; a \in \Sigma$)
- ▶ též **regulární gramatika**

Konečný automat

▶ Jiný model charakterizující jazyky

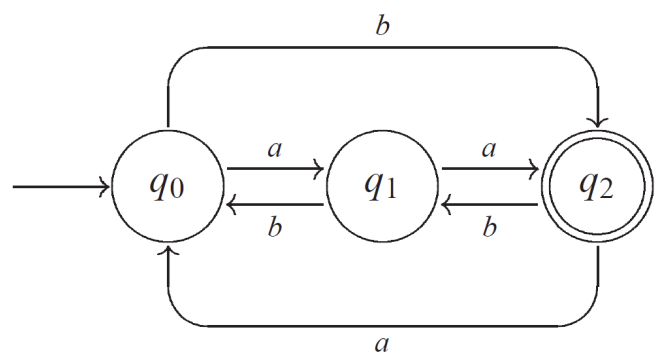
▶ Pětice $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- ▶ Q – neprázdná konečná množina stavů
- ▶ Σ – konečná množina vstupních symbolů (abeceda)
- ▶ $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ – přechodová funkce
- ▶ q_0 – počáteční stav
- ▶ F – množina koncových stavů

▶ Automat necháváme běžet nad vstupním slovem

- ▶ začneme v počátečním stavu
- ▶ podle dalšího symbolu na vstupu a aktuálního stavu se přesuneme do jiného stavu
- ▶ opakujeme, dokud není slovo dočteno do konce

Konečný automat



Automaty a jazyky

▶ Automaty a jazyky

- ▶ automat akceptuje slovo, pokud po jeho zpracování skončí v akceptujícím stavu
- ▶ automat akceptuje jazyk, pokud akceptuje právě slova jazyka

▶ Automaty a gramatiky

- ▶ pro každou regulární gramatiku G existuje automat, který akceptuje jazyk $L(G)$ (důkaz existuje :))
- ▶ platí i naopak → **ekvivalentní formalismy**

▶ Co se nevešlo

- ▶ existují i další typy automatů
- ▶ některé ekvivalentní s jinými typy gramatik
- ▶ např. zásobníkový automat, Turingův stroj