Induktivní statistika

Odhady

Odhady

- bodové odhady
- intervalové odhady
- konstrukce intervalu spolehlivosti pro průměr
- odhady podílů (kategoriální proměnné)

Odhady

- v příkladech v předchozích přednáškách jsme znali hodnoty průměru a rozptylu populace
- obvykle tomu ale bývá přesně naopak: **známe hodnoty (statistiky) výběru a neznáme hodnoty (parametry) populace**
- ty chceme z výběru **odhadnout**

Odhady

- 2 typy odhadů: bodové a intervalové
- **bodový odhad**: použijeme průměr vzorku a odhadneme, že se rovná průměru populace

Bodový odhad

- bodový odhad je problematický v tom, že dva různé výběry nám mohou dát dva různé odhady
- bodový odhad **neobsahuje** žádnou **informaci** o jeho **přesnosti** či **spolehlivosti**
- na čem závisí přesnost odhadu?

Bodový odhad

přesnost odhadu závisí na dvou charakteristikách

- **velikost výběru** (čím větší n, tím menší výběrová chyba)
- **variabilita hodnot v populaci** (čím vyšší, tím vyšší i výběrová chyba)

Intervalový odhad

- poskytuje rozsah (interval) hodnot, který s určitou pravděpodobností obsahuje hledanou hodnotu parametru

Intervalový odhad

je založen na:

- bodovém odhadu
- velikosti výběru
- variabilitě znaku v populaci (známé nebo rovněž odhadované)

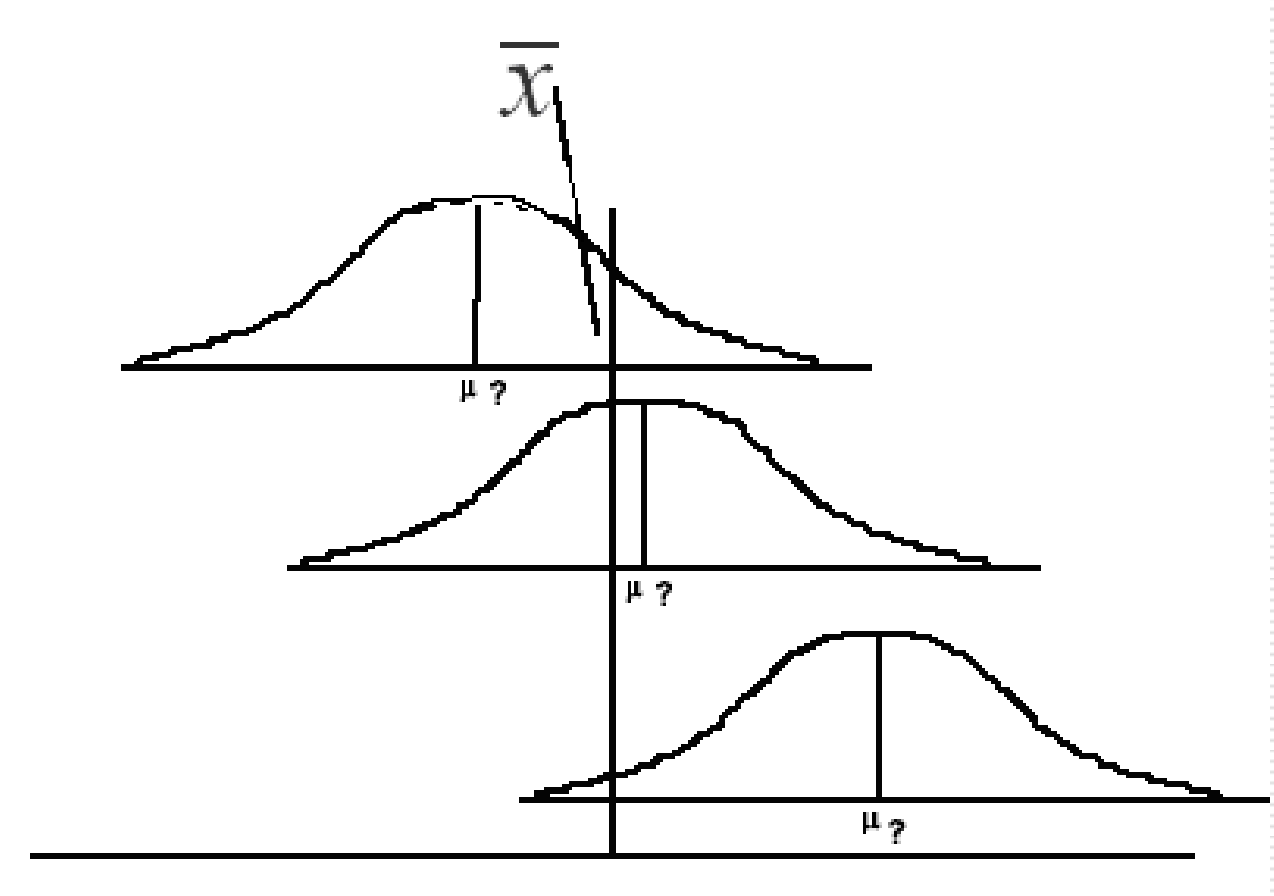
Intervalový odhad

- ptáme se: **jaká je hodnota μ ?**

Intervalový odhad

- ptáme se: **jaká je hodnota μ ?**
- výběrový průměr určité hodnoty může pocházet z populací o různých průměrech
- proto **nemůžeme jednoznačně určit hodnotu μ**

Intervalový odhad



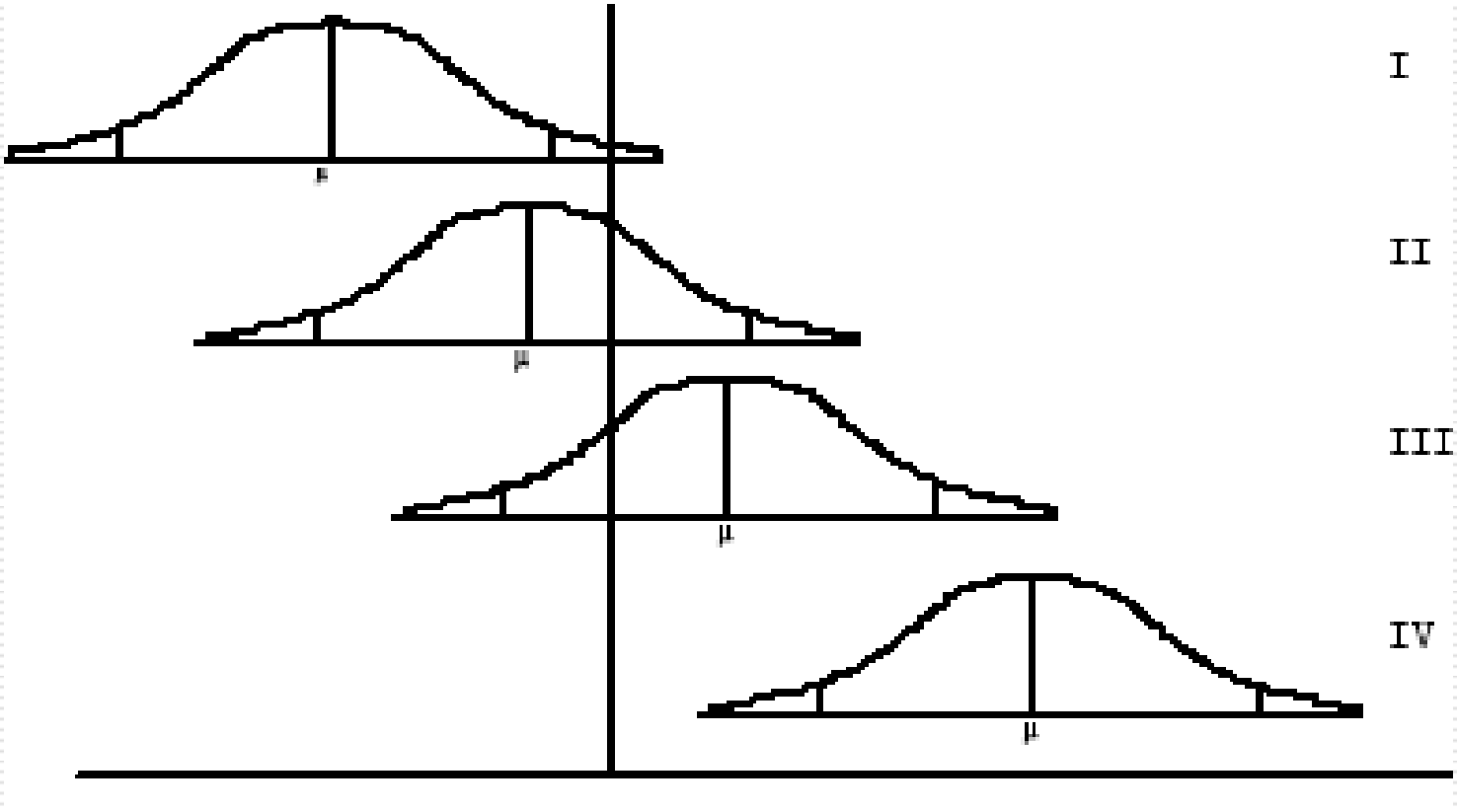
Intervalový odhad

- takže se místo toho snažíme určit, jaký je **možný rozsah hodnot** μ
- jaké populace (tj. s jakou hodnotou průměru) by mohly být pravděpodobným zdrojem našeho vzorku?

Intervalové odhady

- ze které populace nejpravděpodobněji pochází výběr, jehož průměr je v následujícím grafu naznačen svislou čarou?

RVP pro populace I-IV



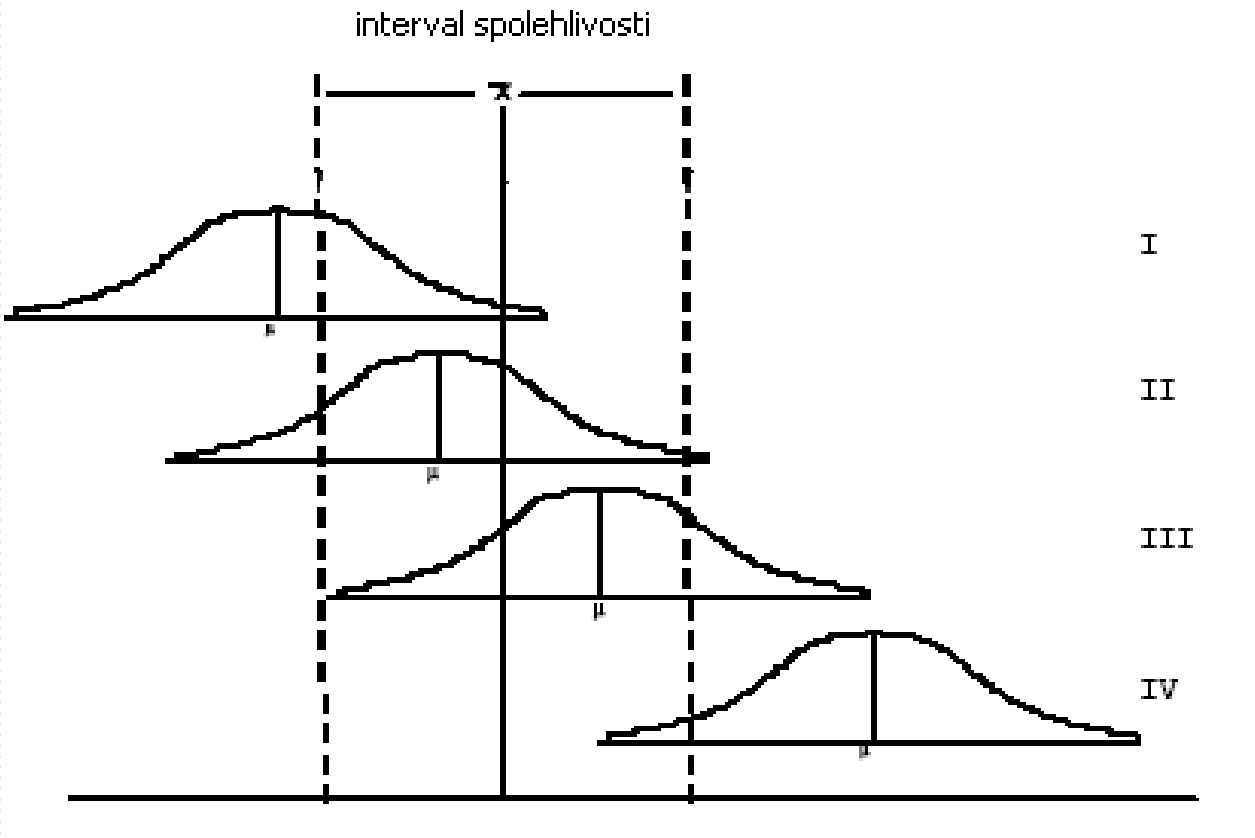
Intervalové odhady

- výběr pochází
  - nejpravděpodobněji z populace II nebo III
  - méně pravděpodobně z populace I
  - a velmi málo pravděpodobně z populace IV

Intervalové odhady

- intervalový odhad spočívá v konstrukci tzv. **intervalu spolehlivosti** (confidence interval) = rozsahu hodnot, ve kterém s určitou pravděpodobností leží průměr populace

Interval spolehlivosti



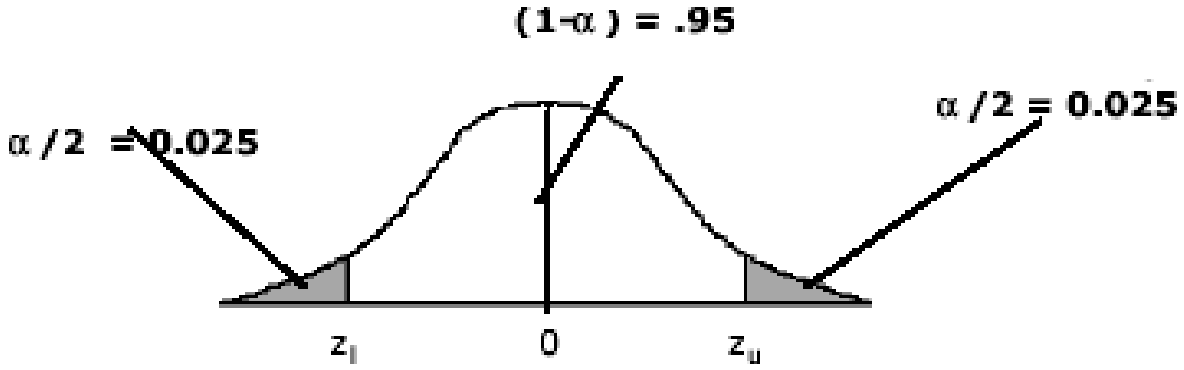
Interval spolehlivosti

- nejprve je třeba si **stanovit tuto pravděpodobnost** – tj. úroveň přesnosti (spolehlivosti);
- obvyklá je např. **95% -** snažíme se najít interval hodnot, ve kterém s 95% pravděpodobností leží průměr populace
- pak jde o tzv. **95% interval spolehlivosti**

Interval spolehlivosti

- poté **najít hodnotu *z* pro tuto pravděpodobnost** – tj. rozsah, ve kterém bude ležet středních 95% hodnot (výběrových průměrů)
- 2,5% na každé straně rozdělení

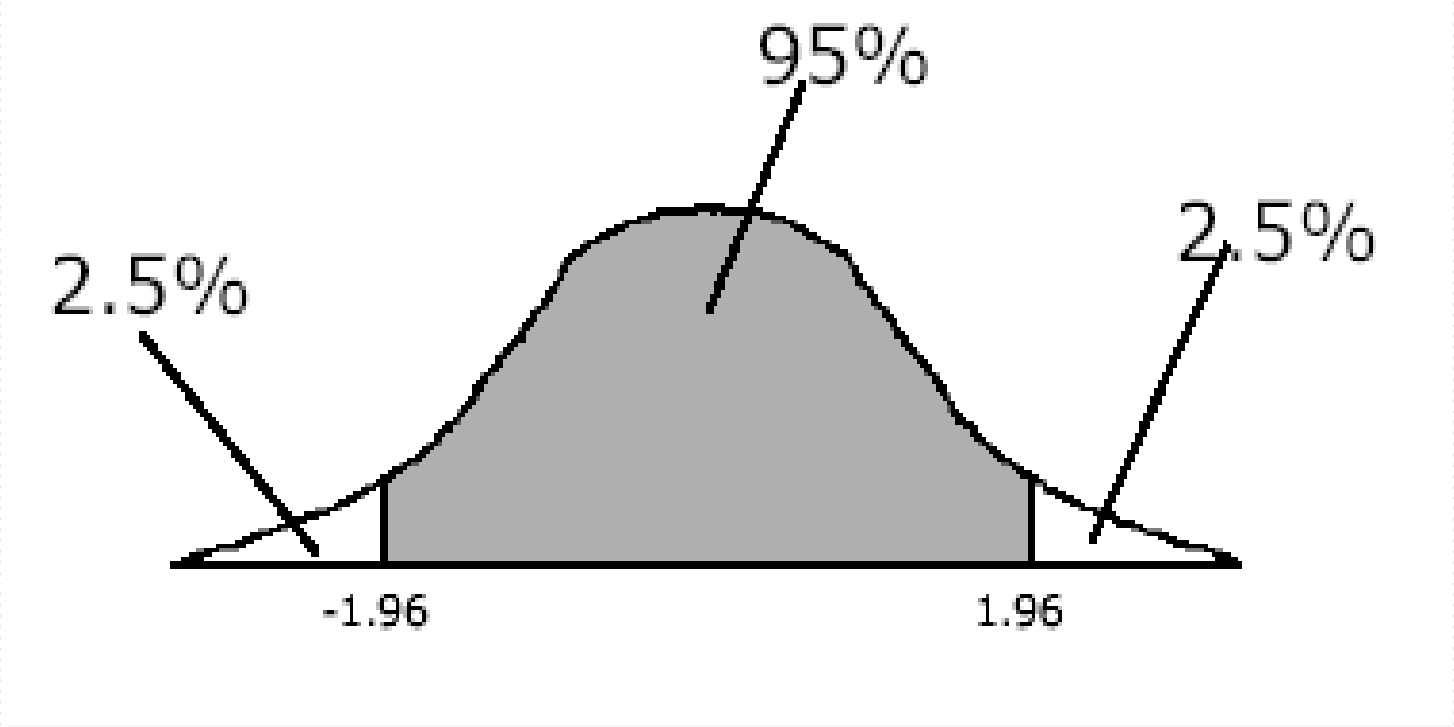
Interval spolehlivosti



Interval spolehlivosti

- tomu odpovídají hodnoty
  z=-1,96
  z=1,96

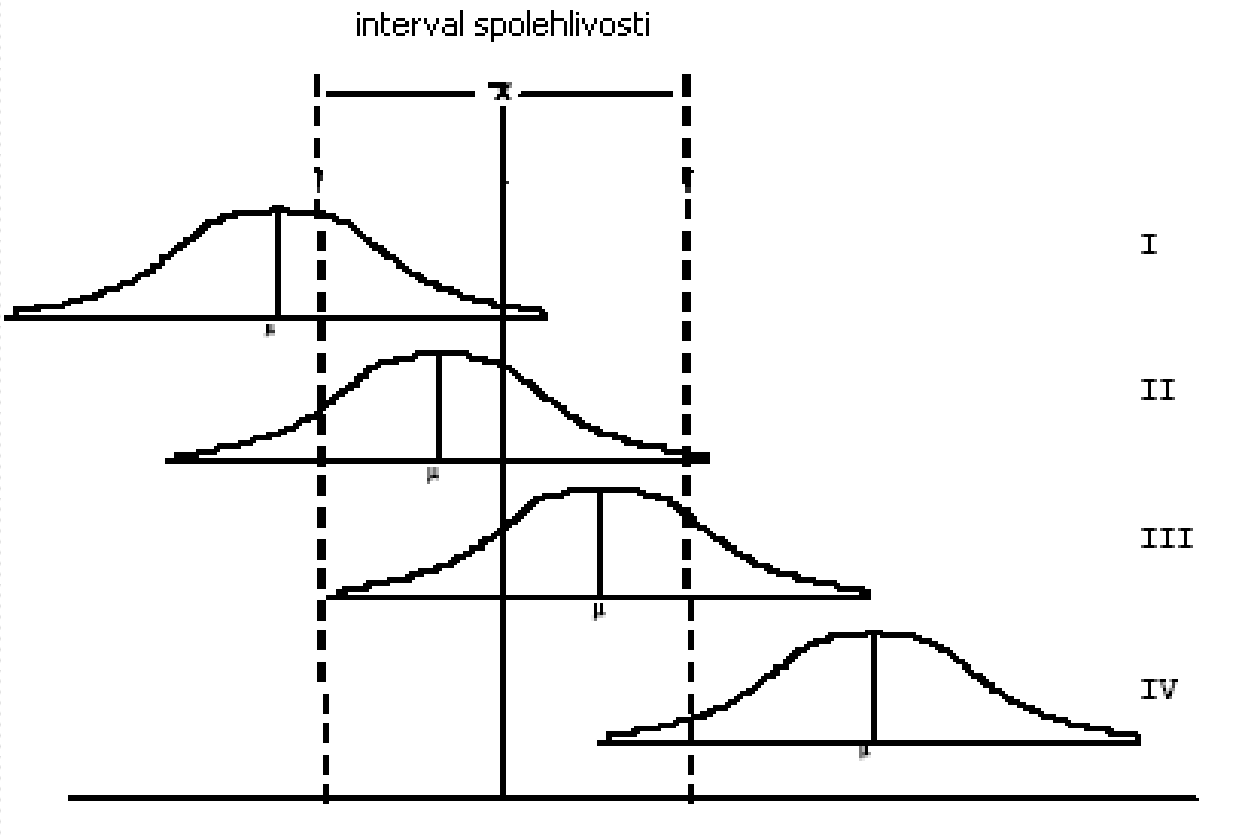
Interval spolehlivosti



Interval spolehlivosti - výpočet

$$\overline{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Interval spolehlivosti



Interval spolehlivosti

- interpretace intervalu spolehlivosti:

  pokud bychom z populace vybrali 100 náhodných výběrů o velikosti *n* a pro každý z nich sestrojili tento interval, 95 intervalů by obsahovalo průměr populace a 5 nikoliv

Interval spolehlivosti

- oblíbený omyl:
  - v 95% intervalu spolehlivosti leží 95% hodnot populace (NEPLATÍ!)

- kromě 95% intervalu spolehlivosti se používá také např. 99% a 90% pravděpodobnost

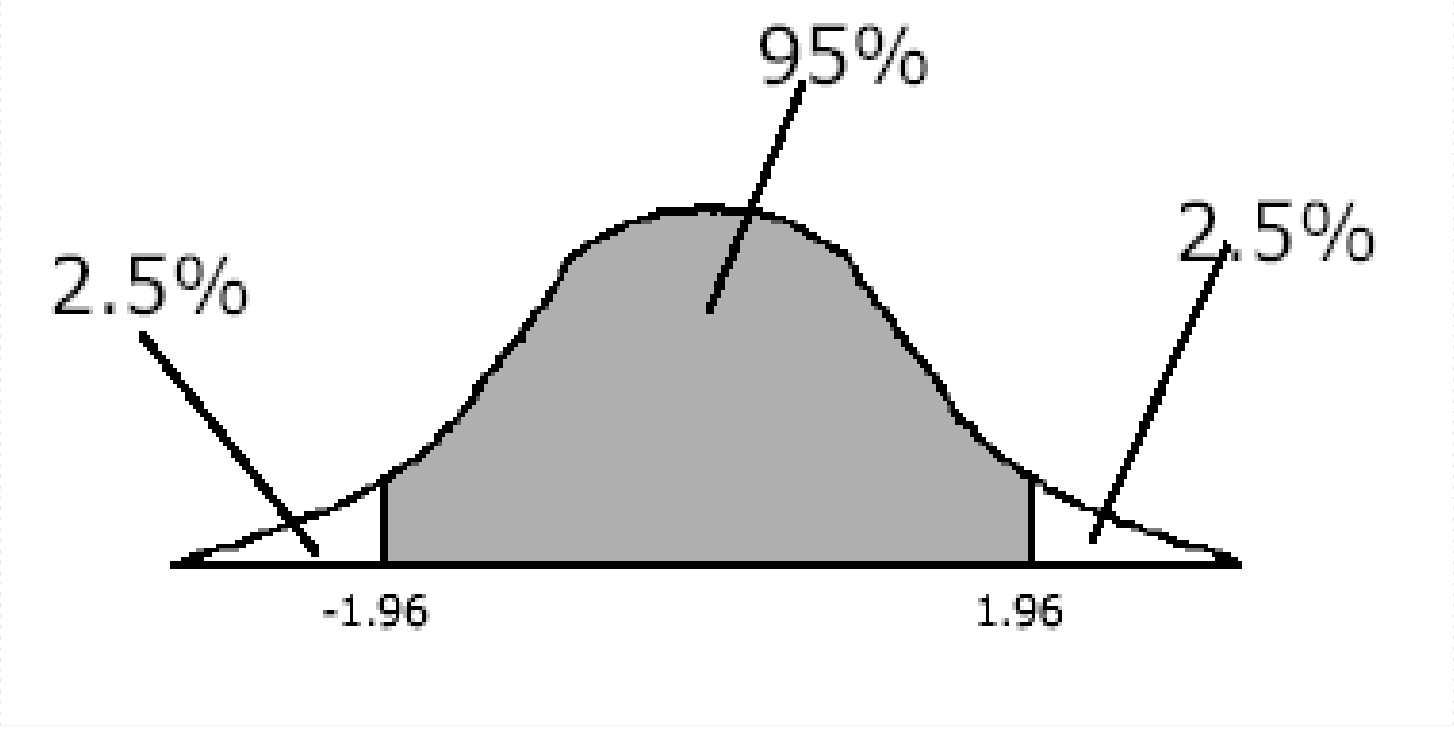
Příklad

- náhodný výběr 36 dětí hospitalizovaných bez matky v raném věku (do 6 měsíců), průměrné IQ vzorku = 96
- na základě tohoto zjištění odhadněte průměrné IQ populace dětí hospitalizovaných bez matky v raném věku (sestavte 95% interval spolehlivosti)

Příklad

- Postup:
  - bodový odhad: μ=96
  - výpočet výběrové chyby (směrodatné odchylky RVP):
    $\sigma/\sqrt{n}$ = 15/√36 = 15/6 = **2,5**
  - stanovení úrovně spolehlivosti: 95%
  - najít hodnotu *z* pro 95% pravděpodobnost

Příklad



Příklad

- v tabulce normálního rozdělení najdeme hodnoty *z*
- hodnoty *z* pro 95% : 1,96 a -1,96

Příklad

- k výběrovému průměru přičteme (pro horní hranici intervalu) a odečteme (pro spodní hranici) výběrovou chybu, vynásobenou hodnotou *z*

Příklad

$CI\ (\mu) = \mathbf{x \pm z\ (\sigma/\sqrt{n})}$

$CI\ (\mu) = 96 + 1{,}96 * 2{,}5 = 96 + 4{,}9 = \mathbf{100{,}9}$

$CI\ (\mu) = 96 - 1{,}96 * 2{,}5 = 96 - 4{,}9 = \mathbf{91{,}10}$

95% interval spolehlivosti je 91,1 – 100,9

Interval spolehlivosti

- **hodnoty *z*** pro nejčastěji užívané pravděpodobnosti:
  - 90% (zbývá 5% + 5%) z= +/- 1,645
  - 95% (zbývá 2,5% + 2,5%) z= +/- 1,96
  - 99% (zbývá 0,5% + 0,5%) z= +/- 2,57

Příklad 2

- pro odhad průměru z předchozího příkladu sestrojte 99% interval spolehlivosti

Příklad 2

$CI\ (\mu) = \mathbf{x \pm z\ (\sigma/\sqrt{n})}$

$CI\ (\mu) = 96 + 2{,}57 * 2{,}5 = 96 + 6{,}4 = \mathbf{102{,}4}$

$CI\ (\mu) = 96 - 2{,}57 * 2{,}5 = 96 - 6{,}4 = \mathbf{89{,}6}$

99% interval spolehlivosti je 89,6 – 102,4

Odhady podílů

- u kategoriálních proměnných nemůžeme počítat průměry
- odhadujeme proto **podíly** jednotlivých kategorií proměnné

Odhady podílů

- např. podíl kuřáků v populaci českých adolescentů
- podíl pacientů s rakovinou plic, kteří přežijí 5 let od diagnózy
- podíl chlapců mezi dětmi s poruchou pozornosti

Odhady podílů

- pokud zkoumáme místo celé populace pouze výběr z ní, nezajímá nás tolik, jaký je podíl kategorií proměnné ve výběru (četnost **p**)
- ale spíše jaký je skutečný podíl v populaci – četnost π

Odhady podílů

- při dostatečně velkém *n* platí i pro rozdělení podílů centrální limitní věta
- rozdělení výběrových podílů je normální rozdělení, s **průměrnou četností π** a směrodatnou odchylkou (výběrovou chybou)

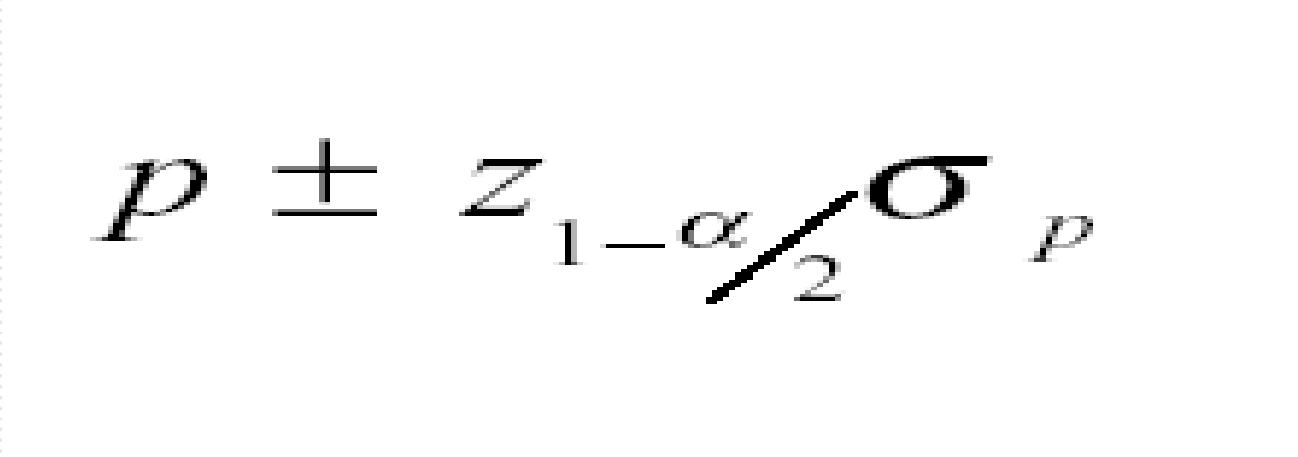
$$SE = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

Příklad 4

- chceme zjistit, jaká je podpora politiky EU vůči uprchlíkům u občanů ČR (jde o *fiktivní* data)
- náhodný výběr z populace (n=1000 osob)
- 315 osob se vyjádřilo pro (p=0,315)
- odhadněte s 95% spolehlivostí podporu této politiky v populaci

Odhady podílů

- interval spolehlivosti pro podíly se spočítá podobně jako pro průměry:



Odhady podílů

- nemůžeme však spočítat výběrovou chybu, protože neznáme π
- v tomto případě je však možné dosadit místo toho *p* a přitom použít normální rozdělení (pokud je n>30)
- pokud je n<30, pak dosadíme místo π hodnotu 0,5

Příklad 4

- p=0,315
- z=1,96
- SE(p)=$\sqrt{[0,315(1-0,315)/1000]}$

=0,0147

interval spolehlivosti

0.315 ± 1.96(0.0147)

0.315 ± 0,0288

--- **přesnost odhadu je ± 3%**

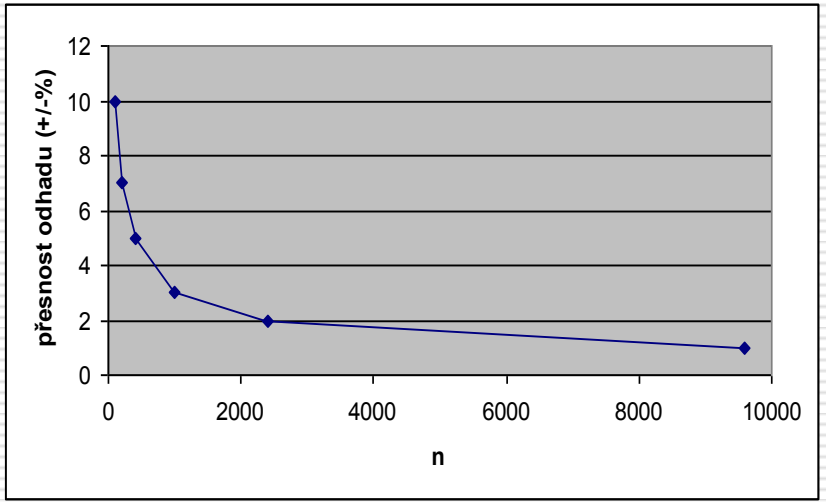
Příklad 4

- s 95% pravděpodobností je podíl osob podporujících politiku EU v populaci občanů ČR **mezi 28.6% a 34.4%**

Odhady podílů

vztah mezi velikostí vzorku a přesností odhadu

- n=100 ± 10%
- n=200 ± 7%
- n=400 ± 5%
- n=1000 ± 3%
- n=2400 ± 2%
- n=9600 ± 1%



Odhady podílů

- požadovaná velikost vzorku roste mnohem rychleji než spolehlivost odhadu (pro zdvojnásobení spolehlivosti je nutné asi čtyřnásobně zvětšit vzorek)
- důležité při plánování výzkumu – jakou přesnost potřebujeme? jaké budou náklady?
- podobný vztah platí pro odhad průměrů

Příklad na závěr

- z denního tisku:
  - **Padesát pět procent** českých voličů nesouhlasí se zavedením registračních pokladen, zatímco před dvěma týdny sdílelo tento názor **jen 50 procent** voličů. Průzkum byl proveden v posledních čtyřech dnech a statistická chyba je 2,9 % (jde o fiktivní údaje).
- můžeme dojít k závěru, že nesouhlas se zavedením RP skutečně roste?

Kontrolní otázky

- 2 typy odhadů
- na čem závisí šířka intervalu spolehlivosti? (*není nutno znát zpaměti vzorce, ale je třeba chápat princip výpočtu)*
- vztah velikosti výběru a spolehlivosti odhadu

Literatura

- Hendl: kapitoly 4 a 5