

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 60200 Brno, Czech Republic
xkovar3@fi.muni.cz

Část 2

Obsah přednášky

Matematická logika

Výroková logika

Něco z predikátové logiky

Matematická indukce

Matematická logika – motivace

- ▶ Jazyk matematiky
 - ▶ přirozený jazyk je víceznačný
 - ▶ „k jednání XY na úřadě YZ potřebujete pas a řidičský průkaz nebo občanský průkaz“
 - ▶ matematická fakta potřebujeme zapisovat přesně
- ▶ Formalizace pojmu důkaz
 - ▶ důkaz = posloupnost elementárních kroků
 - ▶ to, co je „elementární“ je individuální
 - ▶ logika zavádí přesnou definici elementárního kroku

Typy logik

- ▶ Výroková logika
 - ▶ výroky, logické funkce, pravidlo modus ponens
- ▶ Predikátová logika
 - ▶ predikáty, kvantifikátory
- ▶ Další typy logik
 - ▶ modální, temporální, fuzzy, intenzionální, ...
 - ▶ nebudeme se jimi zabývat
- ▶ Naším cílem je naučit se logiku prakticky používat
 - ▶ → číst a psát
 - ▶ nikoli zkoumat její temná zákoutí (viz předmět „Matematická logika“ na FI)

Výroková logika

- ▶ Výrok
 - ▶ základní jednotka
 - ▶ tvrzení, jemuž lze přiřadit pravdivostní hodnotu
 - ▶ např. „ $a = 1$ “, „4 je prvočíslo“
- ▶ Pravdivost
 - ▶ přiřazení hodnoty 0 nebo 1 každému výroku
 - ▶ zapisujeme $v(A) = 1$ („výrok A platí“)
 - ▶ $v(A) = 0$ („výrok A neplatí“)
- ▶ Logické funkce
 - ▶ konstrukce složitějších výroků z výroků jednodušších

Logické funkce (1)

- ▶ Základní logické funkce
 - ▶ nechť A, B jsou výroky
 - ▶ **negace** $\neg A$
 - ▶ $v(\neg A) = 0$, je-li $v(A) = 1$
 - ▶ $v(\neg A) = 1$, je-li $v(A) = 0$
 - ▶ **implikace** $A \Rightarrow B$
 - ▶ $v(A \Rightarrow B) = 0$, je-li $v(A) = 1$ a $v(B) = 0$
 - ▶ $v(A \Rightarrow B) = 1$ v ostatních případech
 - ▶ kombinací těchto funkcí lze vyjádřit všechny ostatní logické funkce

Logické funkce (2)

- ▶ Odvozené logické funkce
 - ▶ **konjunkce** $A \wedge B$ (logické „a“)
 - ▶ $v(A \wedge B) = 1$, je-li $v(A) = 1$ a $v(B) = 1$
 - ▶ $v(A \wedge B) = 0$ v ostatních případech
 - ▶ **disjunkce** $A \vee B$ (logické „nebo“)
 - ▶ $v(A \vee B) = 0$, je-li $v(A) = 0$ a $v(B) = 0$
 - ▶ $v(A \vee B) = 1$ v ostatních případech
 - ▶ **ekvivalence** $A \Leftrightarrow B$
 - ▶ $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Odvozování

- ▶ Schémata axiomů
 - ▶ pro libovolné výroky A, B, C platí
 - ▶ $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
 - ▶ $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
 - ▶ $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
 - ▶ dosazením konkrétních výroků vzniknou **axiomy**
- ▶ Odvozovací pravidlo modus ponens
 - ▶ pokud platí A a platí $A \Rightarrow B$, pak platí B
- ▶ Formální definice důkazu
 - ▶ posloupnost výroků, z nichž každý je buď axiom nebo výsledek aplikace odvozovacího pravidla na předchozí výroky

Příklad důkazu: $X \Rightarrow X$

► Schémata axiomů

- $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
- $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

► Dokazujeme, že pro libovolný výrok X platí $X \Rightarrow X$

1. $(X \Rightarrow ((X \Rightarrow X) \Rightarrow X)) \Rightarrow ((X \Rightarrow (X \Rightarrow X)) \Rightarrow (X \Rightarrow X))$ / axiom 2
2. $X \Rightarrow ((X \Rightarrow X) \Rightarrow X)$ / axiom 1
3. $(X \Rightarrow (X \Rightarrow X)) \Rightarrow (X \Rightarrow X)$ / aplikace modus ponens na 2. a 1.
4. $X \Rightarrow (X \Rightarrow X)$ / axiom 1
5. $X \Rightarrow X$ / aplikace modus ponens na 4. a 3.

Něco z predikátové logiky

► Ohodnocení proměnných

- formule („výroky“) mohou obsahovat proměnné ($x = 1$)
- pravdivost pak závisí na ohodnocení, tj. přiřazení hodnot proměnným

► Kvantifikátory

- \exists – existuje alespoň jedno ohodnocení, při kterém formule platí
- \forall – výrok platí pro všechna možná ohodnocení
- např.: $\exists x(x = 0 \wedge x = 1)$

Něco z predikátové logiky (2)

► Funkční symboly

- kombinují objekty, se kterými zacházíme (množiny, čísla)
- výsledkem je další objekt
- např. plus, množinové sjednocení
- např. $+(x, y)$, resp. $x + y$

► Predikáty

- vyjadřují fakta o konstantách a proměnných
- výstupem je pravdivostní hodnota
- např. $\text{Prime}(x)$ – „ x je prvočíslo“
- např. $\in(x, Y)$, resp. $x \in Y$ – „prvek x patří do množiny Y “

Něco z predikátové logiky (3)

► Příklady složitějších formulí

- $\exists x(\exists k(x = 2k + 1) \wedge \exists m(x = 2m))$
- $\forall x(\text{Prime}(x) \Rightarrow \exists k(x = 2k))$
- $\exists x(\text{Prime}(x) \wedge \exists k(x = 2k))$
- dokážete je přečíst?

Matematická indukce

► Obecný matematický princip

- použitelný pro definice, důkazy
- napřed vyrobíme/dokážeme něco jednoduchého
- → **báze indukce**
- pak vyrobíme z obecného jednoduchého objektu o krok složitější objekt
- případně dokážeme, že z platnosti pro jednoduchý objekt vyplývá platnost pro složitější objekt
- → **indukční krok**
- tím dostaneme nekonečnou řadu definic/důkazů

Induktivní definice

► Báze indukce

- definujeme nejjednodušší prvky

► Indukční krok

- popíšeme, jak se z jednodušších prvků vyrobí složitější

► Příklad: induktivně definované posloupnosti

- definujeme nekonečnou posloupnost 3, 5, 7, 9, ...
- báze indukce: $a_1 = 3$
- indukční krok: $a_{n+1} = a_n + 2$

Induktivní definice (2)

► Bázi může být víc

- Fibonacciho posloupnost: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
- báze indukce: $a_1 = 0$
- báze indukce: $a_2 = 1$
- indukční krok: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

► Indukčních kroků může být víc

- definice toho, jak vypadá správná výroková formule
- báze indukce: libovolný jednoduchý výrok A je výroková formule
- indukční krok: pokud A je výroková formule, pak $\neg(A)$ je výroková formule
- indukční krok: pokud A a B jsou výrokové formule, pak $(A \Rightarrow B)$ je výroková formule

Důkaz matematickou indukcí

► Princip

- potřebujeme dokázat, že pro všechny prvky nějaké posloupnosti x_0, \dots, x_n, \dots platí nějaký výrok A
- $\forall n(A(x_n))$
- dokážeme výrok pro x_0
- → **báze indukce**
- dokážeme, že pokud výrok platí pro x_{i-1} , pak platí i pro x_i pro libovolné i
- $A(x_{i-1}) \Rightarrow A(x_i)$
- → **indukční krok**
- levá strana implikace výše se nazývá **indukční předpoklad**

Příklad indukce

- ▶ Dokážeme, že pro všechna přirozená $n \geq 1$ platí:
 - ▶ $1 + 2 + \dots + n = n/2 * (1 + n)$
- ▶ Báze
 - ▶ $1 = 1/2 * (1 + 1)$
- ▶ Indukční krok
 - ▶ předpokládáme: $1 + 2 + \dots + k = k/2 * (1 + k)$
 - ▶ dokážeme: $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = (k + 1)/2 * (1 + (k + 1))$

Příklad indukce (2)

- ▶ Indukční krok
 - ▶ předpokládáme: $1 + 2 + \dots + k = k/2 * (1 + k)$
 - ▶ dokážeme: $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = (k + 1)/2 * (1 + (k + 1))$
 - ▶ $1 + 2 + \dots + k + (k + 1)$
 - ▶ $k/2 * (1 + k) + (k + 1)$
 - ▶ $(k + k^2)/2 + (k + 1)$
 - ▶ $(k + k^2 + 2k + 2)/2$
 - ▶ $(k^2 + 3k + 2)/2$
 - ▶ $(k + 2) * (k + 1)/2$
 - ▶ $(k + 1)/2 * (k + 2)$
 - ▶ $(k + 1)/2 * (1 + (k + 1))$

Proč to funguje?

- ▶ Intuitivní ověření korektnosti
 - ▶ báze \rightarrow platí $A(x_0)$
 - ▶ indukční krok \rightarrow platí $(A(x_0) \Rightarrow A(x_1))$
 - ▶ modus ponens \rightarrow platí i $A(x_1)$
 - ▶ indukční krok \rightarrow platí $(A(x_1) \Rightarrow A(x_2))$
 - ▶ modus ponens \rightarrow platí i $A(x_2)$
 - ▶ atd. ad infinitum
- ▶ Formální důkaz korektnosti matematické indukce
 - ▶ existuje, ale nad rámec předmětu

Složitější typy indukce (1)

- ▶ Složitější indukční předpoklad
 - ▶ např. platí $A(x_{i-1})$ i $A(x_{i-2})$
 - ▶ musíme dokázat odpovídající bázi
 - ▶ tj. $A(x_0)$ i $A(x_1)$

Složitější typy indukce (2)

- ▶ Strukturální indukce
 - ▶ aplikujeme na induktivně definované objekty (např. výrokové formule)
 - ▶ báze indukce: věta platí pro jednoduché výroky
 - ▶ indukční krok 1: věta platí pro formulí A
 \Rightarrow platí i pro $\neg(A)$
 - ▶ indukční krok 2: věta platí pro formule A a B
 \Rightarrow platí i pro $(A \Rightarrow B)$
- ▶ Princip zůstává stejný, pouze vedení důkazu je komplikovanější
- ▶ Důkaz, že každá formule podle definice výše má sudý počet závorek?

Všichni koně mají stejnou barvu

- ▶ **Věta:** V každém stádě mají všichni koně stejnou barvu.
- ▶ **Důkaz:** indukcí vzhledem k velikosti stáda
 - ▶ **báze:** Ve stádě o 1 koni mají všichni stejnou barvu.
 - ▶ **indukční krok:** Předp., že věta platí pro dvě stáda o n koních; dokážeme, že platí pro stádo o velikosti $n + 1$
 - ▶ $S_1 = \{K_1, \dots, K_n\}$, $S_2 = \{K_2, \dots, K_{n+1}\}$
 - ▶ podle předpokladu mají v S_1 i v S_2 všichni koně stejnou barvu
 - ▶ koně K_2, \dots, K_{n+1} jsou v obou stádech \Rightarrow i barva obou stád je stejná
 - ▶ tedy i ve stádě $S = \{K_1, \dots, K_{n+1}\}$ mají všichni koně stejnou barvu
- ▶ Kde je problém? (zřejmě existují různí koně :))