Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 4

Obsah přednášky

Čísla – znalosti ze SŠ

- Číselné množiny
  - přirozená čísla $N = \{0, 1, ...\}$
  - celá čísla $Z = N \cup \{-1, -2, ...\}$
  - racionální čísla $Q = \{r/s \mid r, s \in Z \ \wedge \ s \neq 0\}$
  - reálná čísla – ,,celá číselná osa"
  - komplexní čísla – ,,pokrývají rovinu"
- Náš cíl
  - všechny objekty v matematice jsou množiny
  - $\rightarrow$ definice čísel s pomocí množin
  - definice číselných operací

Přirozená čísla

- Přirozená čísla
  - formálně definována jako objekt splňující nějaké axiomy
  - tzv. Peanova aritmetika
- Axiomy přirozených čísel
  - existuje nula
  - každé číslo x má následníka $S(x)$
  - nula není následníkem žádného čísla
  - různá čísla mají různé následníky: $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$
  - všechna čísla jsou "potomky" nuly

Axiomy přirozených čísel

- Ve formální logice
  - $\exists x(x = 0)$
  - $\forall x(\exists y(y = S(x)))$
  - $\forall x(0 \neq S(x))$
  - $\forall a, b(a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b))$
  - $\forall K(0 \in K \wedge \forall x(x \in K \Rightarrow S(x) \in K) \Rightarrow \forall y(y \in K))$

Konstrukce přirozených čísel

- Definujeme množinový systém, který splňuje Peanovy axiomy
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $S(x) \equiv x \cup \{x\}$
- Jak tedy čísla vypadají?
  - $0 \equiv \emptyset$
  - $1 = \{\emptyset\}$
  - $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
  - atd. – vždy $n = \{0, ..., n-1\}$

Číselné operace

- Definovány induktivně
- Sčítání
  - $a + 0 = a$
  - $a + S(b) = S(a + b)$
- Násobení
  - $a * 0 = 0$
  - $a * S(b) = (a * b) + a$

Příklad – sčítání podle definice

- Definice sčítání
  - a + 0 = a
  - a + S(b) = S(a+b)
- 1 + 2
  - 1 = S(0), 2 = S(1) = S(S(0))
- 1 + 2
  - 1 + S(1)
  - S(1 + 1)
  - S(1 + S(0))
  - S(S(1 + 0))
  - S(S(1))
  - S(S(S(0)))
  - = 3

Další číselné množiny

- Jsou konstruovány s využitím dvojic a ekvivalencí
  - pojmy, které ,,neznáme"
  - $\rightarrow$ v následujících přednáškách